

אלגברה ליניארית בדרך הישר

Linear Algebra Done Right

מהדורה רביעית

07 בספטמבר 2026

© 2024 שלדון אקסלר – Sheldon Axler

שלדון אקסלר – Sheldon Axler

הערות, תיקונים, והצעות

בנוגע לספר יתקבלו בברכה רבה.

אנא שלחו אותם לכתובת linear@axler.net.

–

תרגם לעברית: צורי בר יוחאי

Hebrew translation by Züri Bar Yochay

גרסה מודפסת של המהדורה האנגלית של ספר זה יצאה לאור בהוצאת שפרינגר.

גישת פתוחה ספר זה מופץ תחת רישיון בהתאם לתנאי רישיון Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>), המתיר

כל שימוש לא-מסחרי, עיבוד, הפצה ושכפול בכל אמצעי או פורמט, כל עוד יינתן קרדיט

מתאים למחבר ולמקור המקוריים, יסופק קישור לרישיון Creative Commons, ויצוין אם נעשו שינויים. התמונות או חומרים אחרים של צד שלישי ספר זה כלולים ברישיון Creative Commons של הספר, אלא אם צוין אחרת בשורת הקרדיט לחומר. אם חומר כלשהו אינו כלול ברישיון Creative Commons של הספר, והשימוש המיועד בו אינו מותר על-פי דין או חורג מן השימוש המותר, יהיה עליך לקבל רשות ישירות מבעל זכויות היוצרים.



$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

על המחבר

שלדון אקסלר קיבל את תואר הבוגר שלו מאוניברסיטת פרינסטון, ולאחריו תואר דוקטור במתמטיקה מאוניברסיטת קליפורניה בברקלי.

במהלך תקופת הפוסט-דוקטורט שלו כשהוא מועסק כמנחה (Moore Instructor) במכון הטכנולוגי של מסצ'וסטס (MIT), זכה אקסלר בפרס הצטיינות בהוראה מטעם האוניברסיטה. לאחר מכן כיהן כמרצה בכיר, כפרופסור חבר, וכפרופסור מן המניין באוניברסיטת מדינת מישגן (Michigan State University), שם הוענקו לו פרס ההוראה הראשון ע"ש J. Sutherland Frame ופרס הסגל המצטיין (Distinguished Faculty Award). בשנת 1996 זכה אקסלר בפרס לסטר פורד (Lester R. Ford) לכתיבה עיונית מטעם האיגוד האמריקאי למתמטיקה (MAA), עבור מאמר שהתרחב ברבות הימים לספר זה. בנוסף לפרסום מאמרי מחקר רבים, הוא חיבר שישה ספרי לימוד במתמטיקה, החל מרמת שנה א' באוניברסיטה ועד לרמת תארים מתקדמים. מהדורות קודמות של ספר זה אומצו כספר לימוד בלמעלה מ-375 אוניברסיטאות ומכללות, ותורגמו לשלוש שפות.

אקסלר שימש כעורך הראשי של כתב העת Mathematical Intelligencer וכעורך משנה של ה-American Mathematical Monthly. הוא היה חבר במועצת האגודה האמריקאית למתמטיקה (AMS) ובחבר הנאמנים של המכון למחקר במדעי המתמטיקה (MSRI). כמו כן, כיהן במערכת העריכה של סדרות הספרים של הוצאת שפרינגר: Undergraduate Texts in Mathematics, Graduate Texts in Mathematics, Universitext ו-Springer Monographs in Mathematics.

אקסלר הוא עמית של האגודה האמריקאית למתמטיקה, וזכה במענקי מחקר רבים מטעם הקרן הלאומית למדע (NSF).

בשנת 1997 הצטרף אקסלר לאוניברסיטת סן פרנסיסקו סטייט כראש המחלקה למתמטיקה. הוא שימש כדיקן הפקולטה למדעים והנדסה בין השנים 2002 ל-2015, ולאחר מכן חזר למשרת סגל רגילה כפרופסור במחלקה למתמטיקה.



Carrie Heeter, Bishnu Sarangi

המחבר וחתולו מון

המשוואה שעל עטיפת הספר: הנוסחה למספר פיבונאצ'י ה- n^{th} . תרגיל 21 ביחידה 4ה משתמש באלגברה ליניארית לגזירת נוסחה זו.

תוכן העניינים

v על המחבר

vii דברי פתיחה לסטודנטים

viii דברי פתיחה למרצים

xii דברי תודה

פרק א

1 מרחבים וקטוריים

2 R^n ו- C^n א1

2 מספרים מרוכבים

5 רשימות

6 F^n

10 אתנחתא בנושא שדות

10 תרגילים א1

12 א2 הגדרת מרחב וקטורי

16 תרגילים א2

18 א3 תתי־מרחב

19 סכומי תתי־מרחב

21 סכומים ישרים

24 תרגילים א3

פרק ב

27 מרחבים וקטוריים מממד סופי

28 ב1 פְּרִיָסָה ואי־תלות ליניארית

28 צירופים ליניאריים ופריסה

31 אי־תלות ליניארית

37 תרגילים ב1

ב2 בסיסים 39

תרגילים ב2 42

ב3 ממד 44

תרגילים ב3 48

פרק ג

העתקות ליניאריות 51

ג1 מרחב וקטורי של העתקות ליניאריות 52

הגדרה ודוגמאות של העתקות ליניאריות 52

פעולות אלגבריות מעל $\mathcal{L}(V, W)$ 55

תרגילים ג1 57

ג2 מרחבי אפס וטווחים 59

מרחב אפס וחד־חד־ערכיות 59

טווח ותכונת העל 61

המשפט היסודי של ההעתקות הליניאריות 62

תרגילים ג2 66

ג3 מטריצות 69

ייצוג העתקה ליניארית באמצעות מטריצה 69

חיבור וכפל בסקלר של מטריצות 71

כפל מטריצות 72

פירוק עמודה־שורה ודרגת מטריצה 77

תרגילים ג3 79

ג4 ה־פִּיכּוּת ואיזומורפיזמים 82

העתקות ליניאריות ה־פִּיכּוּת 82

מרחבים וקטוריים איזומורפיים 86

העתקות ליניאריות ככפל מטריצות 88

שינוי בסיס 90

תרגילים ג4 93

ג5 מכפלות ומנות של מרחבים וקטוריים 96

מכפלות של מרחבים וקטוריים 96

מרחבי מנה 98

תרגילים ג5 103

ג6 דואליות 105

מרחב דואלי והעתקה דואלית 105

מרחב האפס והטווח של העתקה דואלית 109

- 113 מטריצה של העתקה דואלית
115 תרגילים 6

פרק ד

פולינומים 119

- 122 שורשי פולינומים
123 אלגוריתם חלוקת פולינומים
124 פירוק לגורמים של פולינומים מעל $\mathbb{C}$
127 פירוק לגורמים של פולינומים מעל $\mathbb{R}$
129 תרגילים ד

פרק ה

ערכים עצמיים וקטורים עצמיים 132

- 1ה תתי־מרחב שמורים 133
ערכים עצמיים 133
יישום פולינומים על אופרטורים 137
תרגילים 1ה 139
2ה הפולינום המינימלי 143
קיומם של ערכים עצמיים מעל מרחב וקטורי מרוכב 143
ערכים עצמיים והפולינום המינימלי 144
ערכים עצמיים מעל מרחבים וקטוריים ממשיים מממד אי־זוגי 149
תרגילים 2ה 150
3ה מטריצות משולשיות עליונות 154
תרגילים 3ה 160
4ה אופרטורים לכסינים 163
מטריצות אלכסוניות 163
תנאים ללכסינות 165
משפט עיגולי גרשגורן 170
תרגילים 4ה 172
5ה אופרטורים מתחלפים 175
תרגילים 5ה 179

פרק ו

מרחבי מכפלה פנימית 181

- 1ו מכפלות פנימיות ונורמות 182
מכפלות פנימיות 182

נורמות 186

תרגילים 11 191

21 בסיסים אורתונורמליים 197

רשימות אורתונורמליות ותהליך גרס-שמידט 197

פונקציונלים ליניאריים מעל מרחבי מכפלה פנימית 204

תרגילים 21 207

31 משלימים אורתוגונליים ובעיות מזעור 211

משלימים אורתוגונליים 211

בעיות מזעור 217

פְּסִידוֹ-הוֹפְכִי 220

תרגילים 31 224

פרק ז

אופרטורים מעל מרחבי מכפלה פנימית 227

1ז אופרטורים צמודים לעצמם ואופרטורים נורמליים 228

צמודים 228

אופרטורים צמודים לעצמם 233

אופרטורים נורמליים 235

תרגילים 1ז 239

2ז משפט הפירוק הספקטרלי 243

משפט הפירוק הספקטרלי הממשי 243

משפט הפירוק הספקטרלי המרוכב 246

תרגילים 2ז 247

3ז אופרטורים חיוביים 251

תרגילים 3ז 255

4ז איזומטריות, אופרטורים אוניטריים, ופירוק מטריצה לגורמים 258

איזומטריות 258

אופרטורים אוניטריים 260

פירוק QR 263

פירוק שולסקי 266

תרגילים 4ז 268

5ז פירוק לערכים סינגולריים 270

ערכים סינגולריים 270

פירוק לערכים סינגולריים עבור העתקות ליניאריות ומטריצות 273

תרגילים 5ז 278

- 6ז מסקנות מהפירוק לערכים סינגולריים 280
- נורמות של העתקות ליניאריות 280
- קירובים באמצעות העתקות ליניאריות עם ממד טווח נמוך יותר 283
- פירוק פולרי 285
- יישום אופרטורים על אליפסואידים ומקבילונים 287
- נפח באמצעות ערכים סינגולריים 291
- תכונות של אופרטור כפי שנקבעות על ידי הערכים העצמיים שלו 293
- תרגילים 6ז 294

פרק ח

אופרטורים מעל מרחבים וקטוריים מרוכבים 297

- 1ח וקטורים עצמיים מוכללים ואופרטורים נילפוטנטיים 298
- מרחבי האפס של חזקות אופרטור 298
- וקטורים עצמיים מוכללים 300
- אופרטורים נילפוטנטיים 303
- תרגילים 1ח 306
- 2ח פירוק למרחבים עצמיים מוכללים 308
- מרחבים עצמיים מוכללים 308
- ריבוי של ערך עצמי 310
- מטריצות בלוקים אלכסוניות 314
- תרגילים 2ח 316
- 3ח מסקנות מהפירוק למרחבים עצמיים מוכללים 319
- שורשים ריבועיים של אופרטורים 319
- צורת ז'ורדן 321
- תרגילים 3ח 324
- 4ח עקבה: הקשר בין מטריצות ואופרטורים 326
- תרגילים 4ח 330

פרק ט

אלגברה מולטי-ליניארית ודטרמיננטות 332

- 1ט תבניות ביליניאריות ותבניות ריבועיות 333
- תבניות ביליניאריות 333
- תבניות ביליניאריות סימטריות 337
- תבניות ריבועיות 341
- תרגילים 1ט 344

20	ט	תבניות מולטי-ליניאריות מתחלפות	346
		תבניות מולטי-ליניאריות	346
		תבניות מולטי-ליניאריות מתחלפות ותמורות	348
		תרגילים ט	352
	30	דטרמיננטות	354
		הגדרת הדטרמיננטה	354
		תכונות של דטרמיננטות	357
		תרגילים ט	367
	40	מכפלות טנזוריות	370
		מכפלה טנזורית של שני מרחבים וקטוריים	370
		מכפלה טנזורית של מרחבי מכפלה פנימית	376
		מכפלה טנזורית של מספר מרחבים וקטוריים	378
		תרגילים ט	380
		קריטיים לתמונות	383
		אינדקס סמלים וסימנים	384
		אינדקס	385
		קולופון: הערות בנוגע לסֵדֶר	391

דברי פתיחה לסטודנטים

סביר להניח שאתם עומדים בפני המפגש השני שלכם עם אלגברה ליניארית. שלא כמו בהיכרות הראשונה שלכם עם הנושא, שכל הנראה שמה דגש על מרחבים אוקלידיים ומטריצות, הפעם המוקד יהיה על מרחבים וקטוריים מופשטים ועל העתקות ליניאריות. מונחים אלו יוגדרו בהמשך, כך שאין צורך לדאוג אם אינכם יודעים את משמעותם כעת. ספר זה מתחיל מראשית הנושא, ואינו מניח שום ידע מוקדם באלגברה ליניארית. הנקודה המרכזית היא שאתם עומדים לשקוע במתמטיקה רצינית, תוך שימת דגש על השגת הבנה מעמיקה של ההגדרות, המשפטים, וההוכחות.

אי אפשר לקרוא מתמטיקה כפי שקוראים רומן. אם אתם עוברים על עמוד בפחות משעה, סביר להניח שאתם מתקדמים מהר מדי. כאשר אתם נתקלים בביטוי "כפי שעליכם לוודא", עליכם אכן לבצע את הבדיקה, משימה שלרוב תדרוש מכם כתיבה כלשהי. כאשר שלבים הושמטו, עליכם להשלים את החסר. עליכם להתעמק בכל הגדרה ולהפנים אותה. עבור כל משפט, עליכם לחפש דוגמאות שימחישו מדוע כל הנחה בו היא הכרחית. דיונים עם סטודנטים אחרים עשויים לעזור.

כעזר חזותי, הגדרות וסימונים מופיעים בתיבות צהובות (וכותרתם מתחילה במילה "הגדרה" או "סימון") והמשפטים בתיבות כחולות (בגרסאות הצבעוניות של הספר). לכל משפט יש שם תיאורי לא-פורמלי.

אנא בקרו באתר האינטרנט שלהלן למידע נוסף על הספר, לרבות קישור לסרטונים הזמינים בחינם והמלווים את החומר.

הצעות, הערות, ותיקונים יתקבלו בברכה רבה.

איחוליי להצלחה והנאה בלימוד אלגברה ליניארית!

שלדון אקסלר

אוניברסיטת סן פרנסיסקו סטייט

אתר: <https://linear.axler.net>

מייל: linear@axler.net

דברי פתיחה למרצים

אתם עומדים ללמד קורס שיעניק לסטודנטים, ככל הנראה, את חשיפתם השנייה לאלגברה ליניארית. במפגשם הראשון עם הנושא, סביר להניח שהסטודנטים שלכם עבדו עם מרחבים אוקלידיים ועם מטריצות. לעומת זאת, בקורס זה נשים את הדגש על מרחבים וקטוריים מופשטים ועל העתקות ליניאריות.

שם הספר ראוי להסבר. רוב ספרי הלימוד באלגברה ליניארית משתמשים בדטרמיננטות כדי להוכיח שלכל אופרטור ליניארי מעל מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי יש ערך עצמי. נושא הדטרמיננטות אינו קל, אינו אינטואיטיבי, ולעיתים קרובות מוגדר ללא מוטיבציה. כדי להוכיח את המשפט על קיום ערכים עצמיים במרחבים וקטוריים מרוכבים, רוב הספרים נאלצים להגדיר דטרמיננטות, להוכיח שאופרטור ליניארי אינו הפיך אס-ז'ורק-אם הדטרמיננטה שלו שווה 0, ורק אז להגדיר את הפולינום האופייני. דרך חתחתים (מייסרת?) זו מעניקה לסטודנטים תפיסה מועטה להצדקת קיומם של ערכים עצמיים.

לעומת זאת, ההוכחות הפשוטות ונטולות-הדטרמיננטות המוצגות כאן (ראו למשל 5.19) מעניקות תובנות עמוקות יותר. משעה שנושא הדטרמיננטות הועבר לסוף הספר, אנו סוללים דרך חדשה אל המטרה המרכזית של האלגברה הליניארית – הבנת המבנה של אופרטורים ליניאריים.

ספר זה מתחיל מראשית הנושא, ללא דרישות קדם מלבד הדרישה המקובלת לבשלות מתמטית מתאימה. חלק קטן מהדוגמאות והתרגילים כולל מושגים מחשבון אינפיניטסימלי, כגון רציפות, גזירה, ואינטגרציה. ניתן לדלג בקלות על דוגמאות ותרגילים אלה אם הסטודנטים שלכם עדיין לא למדו חשבון אינפיניטסימלי. אם הסטודנטים שלכם כבר נחשפו לחשבון אינפיניטסימלי, הדוגמאות והתרגילים הללו אמורים להעשיר את חווייתם בכך שהם מצביעים על קשרים בין חלקים שונים של המתמטיקה.

גם אם הסטודנטים שלכם כבר נחשפו לחלק מהחומר שבפרקים הראשונים, ייתכן שאינם מורגלים בפתרון תרגילים מהסוג המוצג כאן, אשר רובם דורשים הבנה של הוכחות.

להלן סיכום של עיקרי הספר פרק-אחר-פרק:

- פרק א: בפרק זה מוגדרים מרחבים וקטוריים, ומפותחות תכונותיהם הבסיסיות.
- פרק ב: בפרק זה מוגדרים אִי-תלות ליניארית, פריסה, בסיס, וממד, ובו מוצגת התאוריה הבסיסית של מרחבים וקטוריים מממד סופי.
- פרק ג: בפרק זה אנו עורכים היכרות עם העתקות ליניאריות. המסקנה המרכזית בפרק היא המשפט היסודי של ההעתקות הליניאריות: אם T העתקה ליניארית מעל V , אזי $\dim V = \dim \text{null } T + \dim \text{range } T$. רמת ההפשטה בנושאים מרחבי מנה ודואליות גבוהה יותר מרוב שאר הנושאים בספר; ניתן לדלג על נושאים אלו (דואליות נדרשת עבור מכפלות טנזוריות ביחידה (4ט)).

- פרק ד: בפרק זה אנו מציגים את החלקים בתאוריה של פולינומים אשר יידרשו להבנת אופרטורים ליניאריים. פרק זה אינו מכיל נושאים באלגברה ליניארית. אפשר לשקול לעבור עליו בזריזות, בייחוד אם לסטודנטים ישנה היכרות מוקדמת עם הנושא והמסקנות המובאות.
- פרק ה: הרעיון של חקירת אופרטור ליניארי באמצעות צמצומו לתתי-מרחב קטנים יותר מוביל לווקטורים עצמיים בחלקו המוקדם של פרק זה. שיאו של הפרק הוא הוכחה פשוטה לכך שבמרחבים וקטוריים מרוכבים תמיד קיימים ערכים עצמיים. מסקנה זו משמשת לאחר מכן להראות שלכל אופרטור ליניארי על מרחב וקטורי מרוכב יש מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו. הפולינום המינימלי ממלא תפקיד חשוב כאן ובהמשך הספר. למשל, פרק זה נותן אפיון של האופרטורים הלכסינלים במונחי הפולינום המינימלי. ניתן לדלג על יחידה ה-5 אם ברצונכם לחסוך זמן.
- פרק ו: בפרק זה מוגדרים מרחבי מכפלה פנימית, ומפותחות תכונותיהם הבסיסיות לצד כלים כגון בסיסים אורתונורמליים ותהליך גרס-שמידט. פרק זה גם מראה כיצד ניתן להשתמש בהטלות אורתוגונליות לפתרון בעיות מזעור מסוימות. לאחר מכן מוצג הפסידו-הופכי ככלי שימושי כאשר ההופכי אינו קיים. ניתן לדלג על החומר על הפסידו-הופכי אם ברצונכם לחסוך זמן.
- פרק ז: משפט הפירוק הספקטרלי, המאפיין את האופרטורים הליניאריים שעבורם קיים בסיס אורתונורמלי המורכב מווקטורים עצמיים, הוא משיאי הספר. העבודה שנעשתה בפרקים הקודמים נושאת כאן פרי בדמות הוכחות פשוטות במיוחד. פרק זה עוסק גם באופרטורים חיוביים, באיזומטריות, באופרטורים אוניטריים, בפירוקי מטריצות, ובמיוחד בפירוק לערכים סינגולריים, המוביל לפירוק הפולרי ולנורמות של העתקות ליניאריות.
- פרק ח: פרק זה מראה שלכל אופרטור מעל מרחב וקטורי מרוכב קיים בסיס של המרחב הווקטורי המורכב מווקטורים עצמיים מוכללים של האופרטור. לאחר מכן, הפירוק למרחבים עצמיים מוכללים מתאר אופרטור ליניארי מעל מרחב וקטורי מרוכב. הריבוי של ערך עצמי מוגדר כממד של המרחב העצמי המוכלל המתאים. כלים אלה משמשים להוכחה שלכל אופרטור ליניארי הפיך מעל מרחב וקטורי מרוכב יש שורש ריבועי. בהמשך מובאת בפרק הוכחה שכל אופרטור ליניארי מעל מרחב וקטורי מרוכב ניתן להבאה לצורת ז'ורדן. הפרק מסתיים בחקירת העקבה של אופרטורים.
- פרק ט: פרק זה פותח בהתבוננות בתבניות ביליניאריות ומראה שהמרחב הווקטורי של התבניות הביליניאריות הוא סכום ישר של התת-מרחב של התבניות הביליניאריות הסימטריות ושל התת-מרחב של התבניות הביליניאריות המתחלפות. לאחר מכן מלוכסנות תבניות ריבועיות. במעבר לתבניות מולטי-ליניאריות, הפרק מראה שהתת-מרחב של תבניות n -ליניאריות המתחלפות על מרחב וקטורי n -ממדי הוא חד-ממדי. מסקנה זו מובילה להגדרה נקייה, ללא תלות בבסיס, של הדטרמיננטה של אופרטור. עבור מרחבים וקטוריים מרוכבים מתברר שהדטרמיננטה שווה למכפלת הערכים העצמיים, כאשר כל ערך עצמי נכלל במכפלה מספר פעמים השווה לריבוי. הפרק מסתיים במבוא למכפלות טנזוריות.

בספר זה לרוב אנו מפתחים את האלגברה הליניארית עבור מרחבים וקטוריים ממשיים ומרוכבים בו זמנית, בכך ש- F מסמן את המספרים הממשיים או את המספרים המרוכבים. אם קיימת העדפה שלכם או של הסטודנטים לחשוב על F כעל שדה שרירותי, ראו את ההערות שבסוף יחידה **א1**. אני מעדיף להימנע משדות שרירותיים בשלב זה, משום שהם דורשים תוספת הפשטה מבלי להוביל למסקנות חדשות כלשהן באלגברה ליניארית. כמו כן, סטודנטים חשים בנוח רב יותר לחשוב על פולינומים כעל פונקציות, ולא כעל האובייקטים הפורמליים יותר הנדרשים לפולינומים עם מקדמים בשדות סופיים. לבסוף, גם אילו פותח חלקה הראשון של התאוריה עם שדות שרירותיים, מרחבי המכפלה הפנימית היו מחזירים את הדיון למרחבים וקטוריים ממשיים ומרוכבים בלבד.

קרוב לוודאי שלא תוכלו לכסות את כל הספר בסמסטר אחד. מעבר על כל החומר שבשבעת או שמונת הפרקים הראשונים בקורס בן סמסטר אחד עשוי להכתיב קצב מזוה. אם עליכם להגיע לפרק **ט**, שקלו לדלג על החומר בנושא מרחבי מנה ביחידה **5א**, לדלג על יחידה **6ג** על נושא הדואליות (אלא אם בכוונתכם לכסות מכפלות טנזוריות ביחידה **ט4**), לכסות את פרק **ד** על פולינומים בחצי שעה, לדלג על יחידה **5ה** בנושא אופרטורים מתחלפים, ולדלג על הפסידו־הופכי ביחידה **3י**.

מטרה חשובה יותר מהוראת משפט מסוים זה או אחר היא לפתח אצל הסטודנטים את היכולת להבין את האובייקטים של האלגברה הליניארית ולבצע בהם מניפולציות. מתמטיקה נלמדת רק מתוך עשייה. למרבה המזל, באלגברה ליניארית יש תרגילים טובים ורבים. כשאני מלמד קורס זה, אני נוהג לתת בכל שיעור כמה מהתרגילים כשיעורי בית, להגשה בשיעור הבא. מעבר על שיעורי הבית עשוי לתפוס זמן ניכר מהשיעור.

חלק מהתרגילים נועדו להוביל סטודנטים סקרנים אל נושאים חשובים מעבר למה שנכלל בדרך כלל בקורס שני בסיסי באלגברה ליניארית.

העשירייה המובילה של המחבר

להלן עשר מסקנות בספר החביבות ביותר על המחבר, לפי סדר הופעתן. סטודנטים שיסיימו את הקורס שלכם עם הבנה טובה של מסקנות מכרעות אלה ייצאו מהקורס כשבאמתחתם יסודות איתנים באלגברה ליניארית.

- לכל שני בסיסים של מרחב וקטורי מממד סופי אותו האורך (2.34)
- המשפט היסודי של ההעתקות הליניאריות (3.21)
- קיומם של ערכים עצמיים אם $F = C$ ראו (5.19)
- צורה משולשית עליונה תמיד קיימת אם $F = C$ ראו (5.47)
- אי־שוויון קושי־שוורץ (6.14)
- תהליך גרס־שמידט (6.32)
- משפט הפירוק הספקטרלי (7.29 ו־ 7.31)
- הפירוק לערכים סינגולריים (7.70)
- משפט הפירוק למרחבים עצמיים מוכללים כאשר $F = C$ ראו (8.22)
- ממד מרחב התבניות ה־ n -ליניאריות המתחלפות על V הוא 1 כאשר $\dim V = n$ ראו (9.37)

שיפורים מרכזיים ותוספות במהדורה הרביעית

- נוספו מעל 250 תרגילים חדשים ומעל 70 דוגמאות חדשות.
- הגדלת השימוש בפולינום המינימלי לקבלת הוכחות נקיות יותר של מספר מסקנות, בהן תנאים הכרחיים ומספיקים לכך שלאופרטור תהיה מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו (ראו יחידה 3), תנאים הכרחיים ומספיקים ללכסינות (ראו יחידה 4), ומשפט הפירוק הספקטרלי הממשי (ראו יחידה 2).
- יחידה חדשה על אופרטורים מתחלפים (ראו יחידה 5).
- תת-יחידה חדשה על הפסידו-הופכי (ראו יחידה 3).
- תתי-יחידות חדשות על פירוק QR ופירוק שולסקי (ראו יחידה 4).
- הפירוק לערכים סינגולריים נעשה כעת עבור העתקות ליניאריות ממרחב מכפלה פנימית אל מרחב מכפלה פנימית אחר (העשוי להיות שונה), ולא רק עבור אופרטורים ליניאריים ממרחב מכפלה פנימית אל עצמו (ראו יחידה 5).
- הפירוק הפולרי מוכח כעת מתוך הפירוק לערכים סינגולריים, ולא בסדר ההפוך; הדבר הוביל להוכחות נקיות יותר הן של הפירוק לערכים סינגולריים (ראו יחידה 5) והן של הפירוק הפולרי (ראו יחידה 6).
- תת-יחידה חדשה על נורמות של העתקות ליניאריות מעל מרחבי מכפלה פנימית מממד סופי, תוך שימוש בפירוק לערכים סינגולריים כדי להימנע מפילו מאזכור הסופרמום בהגדרת הנורמה של העתקה ליניארית (ראו יחידה 6).
- תת-יחידה חדשה על קירוב באמצעות העתקות ליניאריות בעלות טווח מממד נמוך יותר (ראו יחידה 6).
- הוכחה אלמנטרית חדשה למסקנה החשובה שלפיה אם T הוא אופרטור מעל מרחב וקטורי מרוכב V מממד סופי, אז קיים בסיס של V המורכב מווקטורים עצמיים מוכללים של T (ראו 8.9).
- פרק חדש ט על אלגברה מולטי-ליניארית, הכולל תבניות ביליניאריות, תבניות ריבועיות, תבניות מולטי-ליניאריות, ומכפלות טנזוריות. הדטרמיננטות מוגדרות כעת בגישה ללא תלות בבסיס, באמצעות תבניות מולטי-ליניאריות מתחלפות.
- עיצוב חדש לשיפור המראה הידיוטי לסטודנט של הספר. לדוגמה, לתיבות ההגדרות והמסקנות יש כעת פינות מעוגלות במקום פינות ישרות, למראה רך יותר. גודל הגופן הראשי הוקטן מ-11 נקודות ל-10.5 נקודות.
- אנא בקרו באתר שלהלן לקבלת קישורים ומידע נוסף על הספר. הצעותיכם, הערותיכם, ותיקוניכם יתקבלו בברכה רבה. איחולים לבביים להוראת קורס מוצלח באלגברה ליניארית!

צרו קשר עם המחבר, או הוצאת הספרים שפרינגר אם המחבר אינו זמין, לקבלת רשות לתרגום או לכל שימוש מסחרי אחר בתכנים שבספר.

שלדון אקסלר
אוניברסיטת סן פרנסיסקו סטייט

אתר: <https://linear.axler.net>
מייל: linear@axler.net

זכרי תודה

אני חב חוב אינטלקטואלי עצום לכל המתמטיקאים שיצרו ופיתחו את האלגברה הליניארית במהלך מאתיים השנים האחרונות. המסקנות המובאות בספר זה שייכות למורשת המשותפת של המתמטיקה. ייתכן שמקרה פרטי של משפט הוכח לראשונה לפני זמן רב, ולאחר מכן לוטש ושופר על ידי מתמטיקאים רבים בתקופות זמן שונות. מתן ההכרה הראויה לכל התורמים יהיה משימה מורכבת שלא לקחתי על עצמי. בשום מקרה אל לקורא להניח שמסקנה כלשהי המוצגת כאן מהווה תרומה מקורית שלי.

אנשים רבים עזרו להפוך את הספר הזה לטוב יותר. שלוש המהדורות הקודמות של ספר זה שימשו כספר לימוד בלמעלה מ-375 אוניברסיטאות ומכללות ברחבי העולם. קיבלתי אלפי הצעות והערות מחברי סגל ומסטודנטים שהשתמשו בספר. רבות מההצעות הללו הובילו לשיפורים במהדורה הנוכחית. כתב היד של מהדורה רביעית זו נוסה בכיתות לימוד ב-30 אוניברסיטאות. אני אסיר תודה עמוקה על המשוב המועיל שקיבלתי מחברי סגל ומסטודנטים במהלך התנסויות אלו.

הרשימה הארוכה של האנשים שיש להודות להם על הצעותיהם הייתה ממלאת עמודים רבים. רשימות הן משעממות לקריאה. לכן, כדי לייצג את כלל התורמים למהדורה זו, אזכיר רק את נואל הינטון (Noel Hinton), סטודנט לתארים מתקדמים באוניברסיטה הלאומית של אוסטרליה (Australian National University), ששלח לי יותר הצעות ותיקונים למהדורה הרביעית מכל אדם אחר. לכל מי שתרם ממרצו והציע הצעות, הרשו לי לומר עד כמה אני באמת אסיר תודה לכולכם. תודה רבה רבה!

אני מודה להוצאת שפרינגר (Springer) על העזרה שהעניקה לי כשהזדקקתי לה, ועל כך שאפשרה לי את החופש לקבל את ההחלטות הסופיות לגבי התוכן והמראה של ספר זה. תודה מיוחדת לשתי עורכות המתמטיקה הנפלאות בשפרינגר שעבדו איתי על פרויקט זה—לורטה ברטוליני (Loretta Bartolini) במהלך המחצית הראשונה של עבודתי על המהדורה הרביעית, ואליזבת לו (Elizabeth Loew) במהלך המחצית השנייה. אני חב תודה עמוקה לדיוויד קריימר (David Kramer), שעשה עבודה נהדרת בעריכת הלשון ומנע ממני לעשות טעויות רבות.

תודה מיוחדת וגדולה לבת זוגי המדהימה, קארי היטר (Carrie Heeter). ההבנה והעידוד שלה אפשרו לי לעבוד באינטנסיביות על מהדורה חדשה זו. החתול הנפלא שלנו, מון (Moon), שתמונתו מופיעה בעמוד על הפיחבר, סיפק הפוגות מתוקות לאורך תהליך הכתיבה. מון מת בפתאומיות כתוצאה מקריש דם עם סיום כתיבת הספר. אנו אסירי תודה על חמש שנים יקרות מפז במחיצתו.

דבר המתרגם

טרם אעסוק בהכרעות התרגום עצמן, חובה עלי להודות לארבעה מתמטיקאים המלווים אותי בשביליה המופלאים של אספקלריית סודות היקום, היא המתמטיקה. ארבעה אישים נכבדים אלו השפיעו ועודם משפיעים השפעה ישירה, בהרצאותיהם, פרסומיהם ואצל שלושה מהם – עד כדי מענה אישי להתכתבויות, למרות שמעולם לא נפגשנו ולמרות תפקידיהם ועיסוקיהם הרבים.

פותחין בכבוד אכסניא ולפיכך בראש ובראשונה אודה למחבר, הפרופסור שלדון אקסלר (Sheldon Axler) מאוניברסיטת סן פרנסיסקו סטייט, אשר נתן בי אומן והסכים, אחרי היסוסים לא מעטים, להפקיד את מלאכת התרגום לעברית של ספרו הפופולרי בידיו.

את הניצוץ שהפך ללפיד, הצית בקרבי הפרופסור סטיבן סטרוגץ (Steven Strogatz) מאוניברסיטת קורנל בהרצאותיו ובספרו Infinite Powers שאותו טרם סיימתי, שכן כשהגעתי בערך למחציתו של הספר החלטתי להקדיש את זמני ללימוד מתמטיקה בצורה רצינית ומסודרת.

כשניגשתי להכין עצמי ללימוד מתמטיקה, נתקלתי במפעלו המהפכני של הדוקטור אביב צנזור מהטכניון, הוא אשר בעזרת טושים, לוח, כריזמה המשולבת בצניעות וענווה ראויות להערצה, מקצוענות מרשימה וצלם, פתח את השערים וסלל את השבילים והנגיש לכל מבקשי דעת, מקורסי המבוא ועד לקורסי המשך מתקדמים בעברית ובאנגלית. מול הרצאות מצולמות אלו ישבתי כתלמיד ממושמע, כתבתי סיכומים ותרגלתי, תוך שאני מנסה לעצמי את תואר תלמידו למרות שמעולם לא נכחתי בהרצאותיו.

ייבדלו המוזכרים לעיל לחיים ארוכים בבריאות, שלווה ונחת, אציין את המורה הדגול והנערץ, נעים ההליכות אף הוא מהטכניון, הפרופסור דוד צילג, זכרו לברכה, ששני הקורסים שלו, אלגברה א' ואלגברה ב', היו לחם חוקי במשך כשנה. בסגנונו השנון וההומוריסטי המשולב בפשטות, צניעות ואנושיות טבעית ונטולת מסכות, הרצה את חומר הלימוד באופן שריתק ומרתק אלפי סטודנטים, גם כשחלפו שנים מאז ההקלטות. חדי העין יבחינו פה ושם בבחירות תרגום התואמות את בחירותיו.

מלאכת התרגום דורשת הכרעות, לרוב מנומקות אך לעיתים שרירותיות, בייחוד במקרים שבהם אין תמימות דעים בקרב המתמטיקאים דוברי העברית (העתקה או טרנספורמציה, אסוציאטיביות לעומת קיבוציות), או כאשר האקדמיה ללשון הותירה את ההכרעה בידי הדובר (תתי־מרחב לעומת תתי־מרחבים, ליניארית לעומת לינארית, אינסופי לעומת אין־סופי ודומיהם).

במקומות לא מעטים בחר המחבר במודע, בשפת המקור, במונחים שאינם הנפוצים ביותר (חלקם מצוינים בתיבות אפורות לאורכו של הספר). בחירות אלו כובדו במלואן גם כאשר בז'רגון המקצועי המקומי נפוצה בחירה שונה (רשימת וקטורים לעומת ה־יה או קבוצה, סימטריית צמוד לעומת הרמיטיות ודומיהם), זאת מתוך נאמנות למקור ושאיפה כי התרגום העברי ייתן ביטוי מלא לרוח הספר והסופר.

השתדלתי ככל שיד משגת כי התרגום יהיה חד־חד־ערכי, כלומר, ככלל, מונח נתון יתורגם באופן אחיד לאורכו של הספר גם כאשר האפשרויות השונות שקולות. אני ממתין ומצפה להערות, תיקוני שגיאות והמלצות שאותם נשלב במהדורה הדיגיטלית המתעדכנת תכופות ואף במהדורה המודפסת בבוא העת.

מוקדש באהבה ליובל, אביגיל, רון, ניקולאי רפאל ואימהותיהם המסורות.

צורי בר יוחאי

פרק א

מרחבים וקטוריים

אלגברה ליניארית היא תורת ההעתקות הליניאריות מעל מרחבים וקטוריים מממד סופי. עם הזמן נכיר את המשמעות של כל אחד מהמונחים הללו. בפרק זה נגדיר מרחבים וקטוריים ונדון במאפייניהם היסודיים.

באלגברה ליניארית, חקירת המספרים המרוכבים לצד המספרים הממשיים מובילה להבנה מעמיקה יותר, ולניסוח משפטים באופן מיטבי. לפיכך נפתח בהיכרות עם המספרים המרוכבים ומאפייניהם הבסיסיים.

אנו נכליל את הדוגמאות של מישור ומרחב רגיל ל- $\mathbb{R}^n$ ו- $\mathbb{C}^n$, שאותם נכליל בהמשך לרעיון של מרחב וקטורי. כפי שנראה, מרחב וקטורי הוא קבוצה עם פעולות חיבור וכפל בסקלר המקיימות תכונות אלגבריות טבעיות.

לאחר מכן הנושא שבו נעסוק יהיה תתי-מרחב, שתפקידם ביחס למרחבים וקטוריים דומה לתפקיד שממלאות תתי-קבוצה עבור קבוצות. לבסוף, נלמד על סכום תתי-מרחב (באנלוגיה לאיחוד תתי-קבוצה), וסכום ישר של תתי-מרחב (באנלוגיה לאיחוד קבוצות זרות).



Pierre Louis Dumesnil, Nils Forsberg

רנה דקארט מתאר את עבודתו לכריסטינה מלכת שוודיה.
מרחבים וקטוריים הם הכללה של תיאור המישור באמצעות שתי קואורדינטות,
כפי שפרסם דקארט בשנת 1637.

או R^n ו- C^n

מספרים מרוכבים

אתם כבר אמורים להכיר את המאפיינים הבסיסיים של קבוצת המספרים הממשיים R . מספרים מרוכבים הומצאו כדי שנוכל להוציא שורשים ריבועיים של מספרים שליליים. הרעיון הוא להניח שיש שורש ריבועי של -1 , המסומן ב- i , והוא מציית לכללי האריתמטיקה הרגילים. להלן ההגדרות הרשמיות.

1.1 הגדרה: מספרים מרוכבים, C

- מספר מרוכב הוא זוג סדור (a, b) כאשר $a, b \in R$, אך אנו נרשום אותו באופן הבא: $a + bi$.
 - קבוצת כל המספרים המרוכבים מסומנת ב- C :
- $$C = \{a + bi : a, b \in R\}.$$
- חיבור וכפל מעל C מוגדרים על ידי

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i;$$

כאשר $a, b, c, d \in R$.

אם $a \in R$, אנו מזהים את $a + 0i$ כמספר הממשי a . לפיכך אנו מחשיבים את R כתת-קבוצה של C . בדרך כלל נכתוב $0 + bi$ רק כ- bi , ואת $0 + 1i$ רק כ- i .

השימוש בסמל i כסימון $\sqrt{-1}$ נעשה לראשונה על ידי לאונרד אוילר בשנת 1777.

להצדקת ההגדרה של כפל מרוכבים שהבאנו לעיל, העמידו פנים שידוע לנו מכבר כי $i^2 = -1$ ואז השתמשו בכללי האריתמטיקה הרגילים כדי לגזור את הנוסחה שלעיל לכפל שני מספרים מרוכבים. כעת השתמשו בנוסחה זו כדי לוודא שאכן קיבלנו

$$i^2 = -1.$$

אין צורך לשנן את הנוסחה לכפל שני מספרים מרוכבים—תמיד נוכל להגיע אליה כשנזכור ש- $i^2 = -1$ ואז נשתמש בכללי האריתמטיקה הרגילים (כפי שמוצג ב-1.3). הדוגמה הבאה ממחישה תהליך זה.

1.2 דוגמה: אריתמטיקה של מרוכבים

את המכפלה $(2 + 3i)(4 + 5i)$ נוכל לחשב תוך הפעלת תכונות הדיסטריבוטיביות והקומוטטיביות המפורטות ב-1.3:

$$\begin{aligned}(2 + 3i)(4 + 5i) &= 2 \cdot (4 + 5i) + (3i)(4 + 5i) \\ &= 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5i + 3i \cdot 4 + (3i)(5i) \\ &= 8 + 10i + 12i - 15 \\ &= -7 + 22i.\end{aligned}$$

המסקנה הראשונה שלנו קובעת כי לפעולת החיבור במרוכבים ולפעולת הכפל במרוכבים יש את התכונות המוכרות שלהן אנו מצפים.

1.3 תכונות של אריתמטיקת מרוכבים

קומוטטיביות (חילופיות)

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \alpha\beta = \beta\alpha \quad \text{ו-} \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

אסוציאטיביות (קיבוציות)

$$\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C} \quad (\alpha\beta)\lambda = \alpha(\beta\lambda) \quad \text{ו-} \quad (\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda)$$

איברי זהות (יחידה)

$$\lambda \in \mathbb{C} \quad \lambda 1 = \lambda \quad \text{ו-} \quad \lambda + 0 = \lambda$$

איבר נגדי לחיבור

$$\text{לכל } \alpha \in \mathbb{C}, \text{ קיים איבר יחיד } \beta \in \mathbb{C} \text{ כך ש- } \alpha + \beta = 0$$

איבר הופכי

$$\text{לכל } \alpha \in \mathbb{C} \text{ כאשר } \alpha \neq 0, \text{ קיים איבר יחיד } \beta \in \mathbb{C} \text{ כך ש- } \alpha\beta = 1$$

תכונת הדיסטריבוטיביות (הפילוג)

$$\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$$

התכונות לעיל מוכחות תוך שימוש בתכונות המוכרות של מספרים ממשיים ובהגדרות של פעולות הכפל והחיבור של מספרים מרוכבים. הדוגמה הבאה מראה איך מוכיחים את הקומוטטיביות של כפל מרוכבים. ההוכחות של יתר התכונות לעיל מושארות כתרגילים.

1.4 דוגמה: קומוטטיביות של כפל מרוכבים

כדי להראות כי $\alpha\beta = \beta\alpha$ לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, נניח ש-

$$\alpha = a + bi \quad \text{וגם} \quad \beta = c + di,$$

כאשר $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. אזי, הגדרת פעולת הכפל של מספרים מרוכבים מראה ש-

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= (a + bi)(c + di) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned} \beta\alpha &= (c + di)(a + bi) \\ &= (ca - db) + (cb + da)i. \end{aligned}$$

המשוואות לעיל והקומוטטיביות של כפל וחיבור של מספרים ממשיים מראות ש-
 $\alpha\beta = \beta\alpha$

בשלב הבא, אנו מגדירים את האיבר הנגדי לחיבור והאיבר ההופכי לכפל של מספרים מרוכבים, ואז משתמשים באיברים ההופכי והנגדי הללו כדי להגדיר פעולות חיסור וחילוק של מספרים מרוכבים.

1.5 הגדרה: $-\alpha$, חיסור, $1/\alpha$, חילוק

נניח ש- $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

- נסמן ב- $-\alpha$ את האיבר הנגדי לחיבור של α . לפיכך $-\alpha$ הוא המספר המרוכב היחיד כך ש-

$$\alpha + (-\alpha) = 0.$$

- פעולת החיסור מעל $\mathbb{C}$ מוגדרת על ידי

$$\beta - \alpha = \beta + (-\alpha).$$

- עבור $\alpha \neq 0$, נסמן ב- $1/\alpha$ את האיבר ההופכי של α . לפיכך $1/\alpha$ הוא המספר המרוכב היחיד כך ש-

$$\alpha(1/\alpha) = 1.$$

- עבור $\alpha \neq 0$, פעולת החילוק ב- α מוגדרת על ידי

$$\beta/\alpha = \beta(1/\alpha).$$

כדי שנוכל להגדיר בנוחות ולהוכיח משפטים החלים על שתי קבוצות המספרים, הממשיים והמרוכבים כאחד, נאמץ את הסימון הבא:

1.6 סימון: F

לאורכו של ספר זה, F מסמן את $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.

לפיכך, אם הוכחנו משפט העוסק ב- F , נדע כי הוא מתקיים בין אם נציב ב- R במקום F ובין אם נציב ב- C במקום F .

האיברים ב- F נקראים סקלרים. נשתמש במילה "סקלר" (שאינה אלא מילה מסוגננת עבור "מספר") לעיתים קרובות כאשר נרצה להדגיש כי האובייקט המדובר הוא מספר, בניגוד לווקטור (וקטורים יוגדרו בקרוב).

עבור $\alpha \in F$ ו- m מספר שלם חיובי, אנו מגדירים את α^m כמכפלת α בעצמו m פעמים:

$$\alpha^m = \underbrace{\alpha \cdots \alpha}_m \text{ פעמים}$$

הגדרה זו גוררת ש-

$$(\alpha^m)^n = \alpha^{mn} \quad \text{וגם} \quad (\alpha\beta)^m = \alpha^m \beta^m$$

לכל $\alpha, \beta \in F$ ולכל המספרים השלמים החיוביים m, n .

רשימות

לפני שנגדיר את $\mathbb{R}^n$ ו- $\mathbb{C}^n$, נתבונן בשתי דוגמאות חשובות.

1.7 דוגמה: $\mathbb{R}^2$ ו- $\mathbb{R}^3$

- הקבוצה $\mathbb{R}^2$, שניתן לחשוב עליה כמישור, היא קבוצת כל הזוגות הסדורים של מספרים ממשיים:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

- הקבוצה $\mathbb{R}^3$, שניתן לחשוב עליה כמרחב הרגיל, היא קבוצת כל השלישיות הסדורות של מספרים ממשיים:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

לצורך הכללת $\mathbb{R}^2$ ו- $\mathbb{R}^3$ לממדים גבוהים יותר, נצטרך תחילה לדבר על הרעיון של רשימות.

1.8 הגדרה: רשימה, אורך

- נניח ש- n מספר שלם אי-שלילי. רשימה באורך n היא אוסף סדור של n איברים (שייתכן שיהיו מספרים, רשימות אחרות, או אובייקטים מופשטים יותר).
- שתי רשימות הן שוות אם-ורק-אם יש להן אותו אורך ואותם איברים באותו סדר.

לרשימה באורך n מתמטיקאים רבים קוראים **רשימה**.

רשימות נכתבות לעיתים קרובות כאיברים מופרדים בפסיק, ומוקפים בסוגריים. לפיכך רשימה באורך שתיים היא זוג סדור שייתכן שייכתב כ- (a, b) . רשימה באורך שלוש היא שלשייה סדורה שייתכן שתיכתב כ- (x, y, z) . רשימה באורך n עשויה להיראות כך:

$$(z_1, \dots, z_n).$$

לעיתים נשתמש במונח רשימה ללא ציון אורכה. נזכור, עם זאת, כי על פי ההגדרה, לכל רשימה יש אורך סופי שהוא מספר שלם אי-שלילי. לפיכך אובייקט הנראה כך $(x_1, x_2, \dots)$, שאפשר לומר עליו כי אורכו אינסופי, אינו רשימה. רשימה באורך 0 מסומנת כך: $()$. אנו מכלילים אובייקט זה בקטגוריית הרשימות כך שחלק ממשפטינו לא יכללו החרגות טריוויאליות. הרשימות נבדלות מקבוצות סופיות בשני אופנים: ברשימות, הסדר משמעותי, ומספר המופעים של כל איבר משמעותי; בקבוצות, סדר הופעת האיברים והופעות חוזרות אינם רלוונטיים.

1.9 דוגמה: רשימה לעופת קבוצה

- הרשימות $(3, 5)$ ו- $(5, 3)$ אינן שוות, אך הקבוצות $\{3, 5\}$ ו- $\{5, 3\}$ שוות.
- הרשימות $(4, 4)$ ו- $(4, 4, 4)$ אינן שוות (אין להן אותו אורך), אף שהקבוצות $\{4, 4\}$ ו- $\{4, 4, 4\}$ שתיהן שוות לקבוצה $\{4\}$.

F^n

כדי להגדיר את האנלוגים של R^2 ו- R^3 בממדים גבוהים יותר, פשוט נחליף את R ב- F (השווה ל- R או ל- C) ונחליף את 2 או 3 במספר שלם חיובי שרירותי.

1.10 סימון: n

נקבע מספר שלם חיובי n עד לסוף הפרק.

1.11 הגדרה: F^n , קואורדינטה

F^n היא קבוצת כל הרשימות באורך n של איברי F :

$$F^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_k \in F, k = 1, \dots, n\}.$$

עבור $(x_1, \dots, x_n) \in F^n$ ו- $k \in \{1, \dots, n\}$, נאמר ש- x_k היא הקואורדינטה ה- k^{th} של $(x_1, \dots, x_n)$.

אם $F = R$ ו- n שווה 2 או 3, אזי ההגדרה לעיל של F^n עולה בקנה אחד עם הרעיונות הקודמים של R^2 ו- R^3 .

1.12 דוגמה: C^4

C^4 היא קבוצת כל הרשימות של ארבעה מספרים מרוכבים:

$$C^4 = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) : z_1, z_2, z_3, z_4 \in C\}.$$

קראו את ספרו של **אדווין אבוט אבוט** - **שטוחלנדיה** (או **שטוחארץ** בתרגומו הקדום יותר) - לתיאור משעשע של האופן שבו R^3 ייתפס בתודעת יצורים החיים ב- R^2 . הספר, שיצא לאור בשנת 1884, יכול לסייע לכם לדעיין מרחב פיזי בעל ארבעה ממדים או יותר.

אם $n \geq 4$, איננו יכולים לדמיין את R^n כאובייקט פיזי. באופן דומה, ניתן לחשוב על C^1 כמישור, אך עבור $n \geq 2$, תפיסה מוחשית ומלאה של C^n היא מעבר ליכולתו של המוח האנושי. חרף מגבלה זו, ביכולתנו לבצע מניפולציות אלגבריות ב- F^n , אפילו עבור ערכי n גבוהים, באותה קלות שבה אנו פועלים ב- R^2 או ב- R^3 . לדוגמה, חיבור ב- F^n מוגדר באופן הבא.

1.13 הגדרה: פעולת חיבור ב- F^n

פעולת חיבור ב- F^n מוגדרת על ידי חיבור קואורדינטות בהתאמה:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

ככלל, במתמטיקה של F^n נקבל תחביר מתמטי נקי יותר אם נשתמש באות יחידה לסימון רשימה של n מספרים, מבלי לכתוב את הקואורדינטות באופן מפורש. לדוגמה, המסקנה הבאה מנוסחת עם x ו- y ב- F^n , אף שההוכחה דורשת את הסימון המסורבל יותר של $(x_1, \dots, x_n)$ ו- $(y_1, \dots, y_n)$.

1.14 קומוטטיביות של חיבור ב- F^n אם $x, y \in F^n$ אזי $x + y = y + x$.**הוכחה** נניח ש- $x = (x_1, \dots, x_n) \in F^n$ ו- $y = (y_1, \dots, y_n) \in F^n$. אזי

$$\begin{aligned}
 x + y &= (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \\
 &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\
 &= (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) \\
 &= (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n) \\
 &= y + x,
 \end{aligned}$$

כאשר השוויון השני והשוויון הרביעי מתקיימים לפי הגדרת החיבור ב- F^n והשוויון השלישי מתקיים לפי הקומוטטיביות הרגילה של החיבור ב- F .

הסמל ■ משמעותו סוף ההוכחה (מש"ל).

אם אנו משתמשים באות יחידה כדי לסמן איבר של F^n , אזי אותה האות עם אינדקסים מתאימים תשמש לרוב כאשר אנו נאלצים להציג את הקואורדינטות. לדוגמה, אם $x \in F^n$, אזי הגדרת $x = (x_1, \dots, x_n)$ היא סימון טוב, כפי שהוצג בהוכחה לעיל. אך טוב יותר לעבוד עם x בלבד, ולהימנע משימוש בקואורדינטות מפורשות ככל הניתן.

1.15 סימון: 0

נסמן ב- 0 את הרשימה שאורכה n ושהקואורדינטות שלה כולן 0:

$$0 = (0, \dots, 0).$$

כאן אנו משתמשים בסמל 0 בשני אופנים שונים—באגף השמאלי של המשוואה לעיל, הסמל 0 מסמן רשימה באורך n , שהיא איבר ב- F^n ואילו באגף הימני, כל 0 מסמן מספר. הרגל זה, שלכאורה עלול לגרום לבלבול, אינו בעייתי כלל שכן מתוך ההקשר תמיד ברור לאיזה 0 מתכוונים.

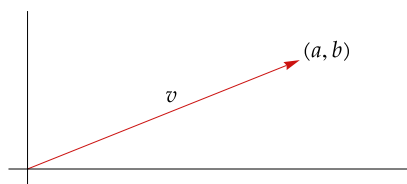
1.16 דוגמה: ההקשר קובע לאיזה 0 מתכוונים

נתבונן במשפט המגדיר את 0 כאיבר זהות לחיבור ב- F^n :

$$x + 0 = x \quad \text{לכל } x \in F^n$$

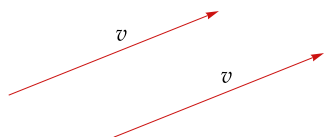
בדוגמה זו, 0 הוא הרשימה שהוגדרה ב- 1.15, ולא המספר 0, שהרי לא הגדרנו את הסכום של איבר ב- F^n (במקרה שלנו x) והמספר 0.

איור יכול לסייע לאינטואיציה. נשרטט תמונות ב- $\mathbb{R}^2$ מאחר שאנו יכולים לשרטט את המרחב הזה על גבי משטחים דו-ממדיים כגון נייר ומסכי מחשב. איבר טיפוסי של $\mathbb{R}^2$ הוא נקודה $v = (a, b)$. לעיתים אנו חושבים על v לא כעל נקודה כי אם כעל חץ שמוצאו בראשית הצירים וראשו ב- (a, b) , כפי שמוצג כאן. כאשר אנו חושבים על איבר של $\mathbb{R}^2$ כעל חץ, אנו קוראים לו וקטור.



ניתן לחשוב על איברים של $\mathbb{R}^2$ כנקודות או כווקטורים.

כשאנו חושבים על וקטורים כעל חיצים ב- $\mathbb{R}^2$, אנו יכולים להזיז חץ במקביל לעצמו (מבלי לשנות כיוון או אורך) ועדיין להחשיב אותו כאותו הווקטור. מנקודת מבט זו, לעיתים קרובות תוכלו להגיע להבנה טובה יותר בכך שתתעלמו מצירי הקואורדינטות ומהקואורדינטות המפורשות, ותחשבו פשוט על הווקטור כפי שמופיע בשרטוט כאן. לשני החיצים המוצגים כאן אותו האורך ואותו הכיוון, ולכן אנו מחשיבים אותם כאותו הווקטור.



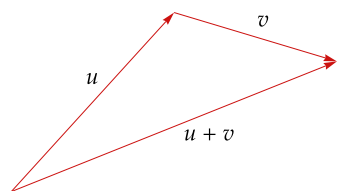
וקטור.

מודלים מתמטיים בכלכלה יכולים לכלול אלפי משתנים, לדוגמה, $x_1, \dots, x_{5000}$, ומשמעות הדבר היא שעלינו לעבוד ב- $\mathbb{R}^{5000}$. לא ניתן לעסוק במרחב מפעם כזה באופן גאומטרי ובכל זאת הגישה האלגברית עובדת ללא דופי. לפיכך הנושא שלנו נקרא **אלגברה ליניארית**.

בכל פעם שאנו משתמשים בשרטוטים ב- $\mathbb{R}^2$ או משתמשים בשפה מעורפלת במקצת של נקודות ווקטורים, זכרו שאלו הם רק עזרים להבנתנו, ואינם תחליף למתמטיקה שנפתח בפועל. אף שאיננו יכולים לשרטט תמונה גרפית טובה במרחבים מממד גבוה, האיברים במרחבים אלו מוגדרים באותה מידת קפדנות שבה אנו מגדירים איברים של $\mathbb{R}^2$.

לדוגמה, $(2, -3, 17, \pi, \sqrt{2})$ הוא איבר של $\mathbb{R}^5$, ואנו עשויים להתייחס אליו כלאחר יד כנקודה ב- $\mathbb{R}^5$ או כווקטור ב- $\mathbb{R}^5$ מבלי להיות מוטרדים מהשאלה האם לגאומטריה של $\mathbb{R}^5$ יש משמעות פיזית כלשהי.

נזכיר כי הגדרנו את הסכום של שני איברים של F^n כאיבר ב- F^n המושג באמצעות חיבור הקואורדינטות בהתאמה; ראו 1.13. כפי שנראה כעת, לפעולת החיבור יש פרשנות גאומטרית פשוטה במקרה הפרטי של $\mathbb{R}^2$.



הסכום של שני וקטורים.

נניח שיש לנו שני וקטורים u ו- v ב- $\mathbb{R}^2$ שאותם נרצה לחבר. נמקם את הווקטור v במקביל לעצמו, כך שנקודת מוצאו חופפת לנקודת סיומו של הווקטור u , כפי שמוצג בשרטוט. הסכום $u + v$ שווה אפוא לווקטור שנקודת מוצאו שווה לנקודת המוצא של u ונקודת סיומו שווה לנקודת הסיום של v , כפי שמוצג כאן.

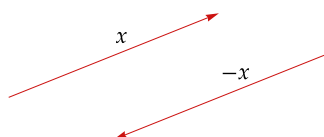
בהגדרה הבאה, ה- 0 באגף הימני של המשוואה הוא הרשימה $0 \in F^n$.

1.17 הגדרה: איבר נגדי לחיבור ב- F^n , סימון $-x$

עבור $x \in F^n$, האיבר הנגדי לחיבור של x , המסומן ב- $-x$, הוא הווקטור $-x \in F^n$ כך ש-

$$x + (-x) = 0.$$

לפיכך, אם $x = (x_1, \dots, x_n)$, אזי $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$.



וקטור ואיברו הנגדי לחיבור.

האיבר הנגדי לחיבור של וקטור ב- R^2 הוא הווקטור שאורכו זהה אך מצביע בכיוון ההפוך. השרטוט המובא כאן ממחיש את אופן חשיבה זה בנוגע לאיבר נגדי לחיבור ב- R^2 . כפי שאתם רואים, הווקטור המסומן ב- $-x$ אורכו זהה לאורכו של הווקטור המסומן ב- x אך הוא מצביע בכיוון ההפוך.

אחרי שעסקנו בפעולת החיבור ב- F^n , נעבור כעת לעסוק בכפל. ביכולתנו להגדיר את פעולת הכפל ב- F^n באופן דומה לזה שבו הגדרנו את פעולת החיבור, כלומר, באמצעות כפל קואורדינטות בהתאמה של שני איברים ב- F^n וקבלת איבר נוסף של F^n . הניסיון מראה שהגדרה זו אינה שימושית לצרכינו. סוג אחר של כפל, ששמו כפל בסקלר, יהיה מרכיב מרכזי בנושאים שבהם נעסוק. בפרט, עלינו להגדיר מהי משמעות פעולת הכפלת איבר ב- F^n באיבר ב- F .

1.18 הגדרה: כפל בסקלר ב- F^n

המכפלה של מספר λ ווקטור ב- F^n מחושבת באמצעות הכפלת כל קואורדינטה של הווקטור ב- λ :

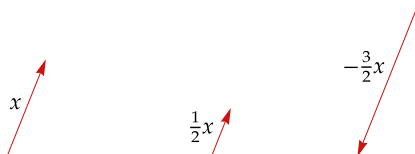
$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n);$$

כאן $\lambda \in F$ ו- $(x_1, \dots, x_n) \in F^n$.

בכפל בסקלר ב- F^n אנו מכפילים סקלר בווקטור ומקבלים וקטור. בניגוד לכך, המכפלה הסקלרית ב- R^2 או R^3 מכפילה יחד שני וקטורים ועפיקה סקלר. ההכללות של המכפלה הסקלרית יהיו חשובות בפרק 1.

להכפלת וקטור בסקלר יש פרשנות גאומטרית נחמדה ב- R^2 . אם $\lambda > 0$ ו- $x \in R^2$, אזי λx הוא הווקטור המצביע לאותו הכיוון שאליו מצביע x ואורכו הוא λ פעמים אורכו של x . כלומר, כדי ליצור את λx , אנו מכווצים או מותחים את x פי λ , בהתאמה למקרים $\lambda < 1$ או $\lambda > 1$.

אם $\lambda < 0$ ו- $x \in R^2$, אזי λx הוא הווקטור הפונה בכיוון ההפוך מזה שאליו פונה x ואורכו $|\lambda|$ פעמים אורכו של x , כפי שאנו רואים בשרטוט.



כפל בסקלר.

אתנחתא בנושא שדות

שדה הוא קבוצה המכילה לכל הפחות שני איברים שונים הנקראים 0 ו-1, יחד עם פעולות חיבור וכפל המקיימות את כל התכונות שפורטו ב-1.3. לפיכך, R ו- C הם שדות, כמו גם קבוצת המספרים הרציונליים יחד עם פעולות החיבור והכפל הרגילות. דוגמה נוספת לשדה היא הקבוצה $\{0, 1\}$ עם פעולות החיבור והכפל הרגילות פרט לכך ש- $1 + 1 = 0$.

בספר זה לא נעסוק בשדות שאינם R ו- C . אף על פי כן, הגדרות, משפטים והוכחות רבים באלגברה ליניארית המתקיימים בשדות R ו- C יתקיימו גם בכל שדה שרירותי ללא שינוי או התאמה. אם תרצו, לאורכו של ספר זה (למעט פרקים 1 ו-2, הדגים במרחבי מכפלה פנימית) תוכלו לחשוב על F כעל סימון לשדה שרירותי במקום R או C . עבור מסקנות (מלבד פרקי המכפלה הפנימית) המבוססות על ההנחה ש- F הוא C , תוכלו ככל הנראה להחליף הנחה זו בהנחה ש- F הוא שדה סגור מבחינה אלגברית, שמשמעותו כי לכל פולינום שאינו קבוע עם מקדמים ב- F יש שורש. במספר מסקנות כמו זו שבתרגיל 13 ביחידה 3 נדרשת ההנחה שב- F מתקיים $1 + 1 \neq 0$.

תרגילים א

1 הראו ש- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ לכל $\alpha, \beta \in C$.

2 הראו ש- $(\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda)$ לכל $\alpha, \beta, \lambda \in C$.

3 הראו ש- $(\alpha\beta)\lambda = \alpha(\beta\lambda)$ לכל $\alpha, \beta, \lambda \in C$.

4 הראו ש- $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$ לכל $\lambda, \alpha, \beta \in C$.

5 הראו שלכל $\alpha \in C$, קיים איבר יחיד $\beta \in C$ כך ש- $\alpha + \beta = 0$.

6 הראו שלכל $\alpha \in C$ עם $\alpha \neq 0$, קיים איבר יחיד $\beta \in C$ כך ש- $\alpha\beta = 1$.

7 הראו ש-

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

הוא שורש שלישי של 1 (כלומר, העלאתו בחזקה שלישית נותנת 1).

8 מצאו שני שורשים ריבועיים שונים של i .

9 מצאו $x \in \mathbb{R}^4$ כך ש-

$$(4, -3, 1, 7) + 2x = (5, 9, -6, 8).$$

10 הסבירו מדוע לא קיים $\lambda \in C$ כך ש-

$$\lambda(2 - 3i, 5 + 4i, -6 + 7i) = (12 - 5i, 7 + 22i, -32 - 9i).$$

11 הראו ש- $(x + y) + z = x + (y + z)$ לכל $x, y, z \in \mathbb{F}^n$.

12 הראו ש- $(ab)x = a(bx)$ לכל $x \in F^n$ ולכל $a, b \in F$.

13 הראו ש- $1x = x$ לכל $x \in F^n$.

14 הראו ש- $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ לכל $\lambda \in F$ ולכל $x, y \in F^n$.

15 הראו ש- $(a + b)x = ax + bx$ לכל $a, b \in F$ ולכל $x \in F^n$.

"חיבור את יודעת?" שאלה המלכה הלבנה. "כמה זה אחד ועוד אחד ועוד אחד ועוד אחד ועוד אחד ועוד אחד ועוד אחד ועוד אחד ועוד אחד ועוד אחד?"

"אינני יודעת", אמרה אליס. "הפסקתי לספור."

—מבעד למראה ומה אליס מצאה שם, לואיס קרול

א2 הגדרת מרחב וקטורי

המוטיבציה להגדרה של מרחב וקטורי נובעת מתכונות פעולות החיבור והכפל בסקלר ב F^n : החיבור הוא קומוטטיבי, אסוציאטיבי, ויש לו איבר זהות. לכל איבר יש איבר נגדי לחיבור. כפל בסקלר הוא אסוציאטיבי. כפל בסקלר 1 פועל כמצופה. החיבור והכפל בסקלר קשורים זה לזה באמצעות תכונות הדיסטריבוטיביות.

נגדיר אפוא מרחב וקטורי כקבוצה V שעליה מוגדרות פעולות חיבור וכפל בסקלר, המקיימות את התכונות שפורטו לעיל.

1.19 הגדרה: חיבור, כפל בסקלר

- חיבור מעל הקבוצה V הוא פונקציה המתאימה איבר $u + v \in V$ לכל זוג איברים $u, v \in V$.
- כפל בסקלר מעל הקבוצה V הוא פונקציה המתאימה איבר $\lambda v \in V$ לכל $\lambda \in F$ ולכל $v \in V$.

כעת באפשרותנו להגדיר מרחב וקטורי באופן פורמלי.

1.20 הגדרה: מרחב וקטורי

מרחב וקטורי הוא קבוצה V שעבורה הגדרנו פעולת חיבור ופעולת כפל בסקלר כך שהתכונות להלן מתקיימות.

קומוטטיביות

$$u + v = v + u \text{ לכל } u, v \in V$$

אסוציאטיביות

$$(u + v) + w = u + (v + w) \text{ ו- } (ab)v = a(bv) \text{ לכל } u, v, w \in V \text{ ולכל } a, b \in F$$

איבר זהות לחיבור

$$0 \in V \text{ כך ש- } v + 0 = v \text{ לכל } v \in V$$

איבר נגדי לחיבור

$$\text{לכל } v \in V, \text{ קיים איבר } w \in V \text{ כך ש- } v + w = 0$$

איבר זהות לכפל

$$1v = v \text{ לכל } v \in V$$

תכונות הדיסטריבוטיביות

$$a(u + v) = au + av \text{ ו- } (a + b)v = av + bv \text{ לכל } a, b \in F \text{ ולכל } u, v \in V$$

הניסוח הגאומטרי הבא מסייע לעיתים לאינטואיציה שלנו.

1.21 הגדרה: וקטור, נקודה

האיברים במרחב הווקטורי נקראים וקטורים או נקודות.

הכפל בסקלר במרחב וקטורי תלוי ב- F . לפיכך כשנזדקק להגדרה מדויקת, נאמר כי V מרחב וקטורי מעל F , במקום לומר בפשטות ש- V מרחב וקטורי. לדוגמה, $\mathbb{R}^n$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ו- $\mathbb{C}^n$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

1.22 הגדרה: מרחב וקטורי ממש, מרחב וקטורי מרוכב

- מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ נקרא מרחב וקטורי ממשי.
- מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ נקרא מרחב וקטורי מרוכב.

בדרך כלל ה- F שבחרנו ברור מההקשר או שאינו רלוונטי. לפיכך ברוב המקרים נניח ש- F אורב ברקע מבלי שנציין אותו מפורשות. בצירוף פעולות החיבור והכפל בסקלר הרגילות, F^n הוא מרחב וקטורי מעל F , כפי שעליכם לוודא. הדוגמה של F^n היוותה מוטיבציה להגדרה של מרחב וקטורי.

1.23 דוגמה: F^∞

F^∞ מוגדרת כקבוצת כל הסדרות של איברים ב- F :

$$F^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) : x_k \in F, k = 1, 2, \dots\}.$$

חיבור וכפל בסקלר ב- F^∞ מוגדרים כצפוי:

$$(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots),$$

$$\lambda(x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots).$$

עם הגדרות אלו, F^∞ הופכת למרחב וקטורי מעל F , כפי שעליכם לוודא. במרחב זה, איבר זההות לחיבור הוא הסדרה שכל איבריה 0.

דוגמתנו הבאה למרחב וקטורי עוסקת בקבוצת פונקציות.

1.24 סימון: F^S

- אם S קבוצה, אזי F^S מסמן את קבוצת הפונקציות מ- S ל- F .
- עבור $f, g \in F^S$, הסכום $f + g \in F^S$ הוא הפונקציה המוגדרת על ידי

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

לכל $x \in S$.

- עבור $\lambda \in F$ ו- $f \in F^S$, המכפלה $\lambda f \in F^S$ היא הפונקציה המוגדרת על ידי

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

לכל $x \in S$.

כדוגמה לסימון לעיל, אם S הוא הקטע $[0, 1]$ ו- $F = \mathbb{R}$, אזי $\mathbb{R}^{[0,1]}$ היא הקבוצה של הפונקציות הממשיות מעל הקטע $[0, 1]$. עליכם לוודא את כל שלושת הסעיפים בדוגמה הבאה.

1.25 דוגמה: F^S הוא מרחב וקטורי

- אם S היא קבוצה לא ריקה, אזי F^S (בצירוף פעולות החיבור והכפל בסקלר שתוארו לעיל) הוא מרחב וקטורי מעל F .
- איבר זהות לחיבור של F^S הוא הפונקציה $0 : S \rightarrow F$ המוגדרת על ידי

$$0(x) = 0$$

לכל $x \in S$.

- עבור $f \in F^S$, האיבר הנגדי לחיבור של f הוא הפונקציה $-f : S \rightarrow F$ המוגדרת על ידי

$$(-f)(x) = -f(x)$$

לכל $x \in S$.

האיברים במרחב הווקטורי $\mathbb{R}^{[0,1]}$ הם הפונקציות הממשיות מעל הקטע $[0, 1]$, ולא רשימות. באופן כללי, מרחב וקטורי הוא ישות מופשטת שאיבריה יכולים להיות רשימות, פונקציות או אובייקטים אחרים.

המרחב הווקטורי F^n הוא מקרה פרטי של המרחב הווקטורי F^S מכיוון שכל $(x_1, \dots, x_n) \in F^n$ יכול להיחשב כפונקציה x מהקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$ אל F בכך שנכתוב $x(k)$ במקום x_k עבור הקואורדינטה ה- k^{th} של $(x_1, \dots, x_n)$. כלומר, אפשר לחשוב על F^n כ- $F^{\{1, 2, \dots, n\}}$. באופן דומה, אפשר לחשוב על F^∞ כ- $F^{\{1, 2, \dots\}}$.

בהמשך נכיר דוגמאות נוספות של מרחבים וקטוריים, אך תחילה עלינו לפתח חלק מהתכונות הבסיסיות של מרחבים וקטוריים. הגדרת מרחב וקטורי דורשת קיומו של איבר זהות לחיבור. המסקנה הבאה קובעת כי איבר זה הוא יחיד.

1.26 יחידות איבר זהות לחיבור

במרחב וקטורי איבר זהות לחיבור הוא יחיד.

הוכחה נניח ש- 0 ו- $0'$ שניהם איברי זהות לחיבור במרחב וקטורי כלשהו V . אזי

$$0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0,$$

כאשר השוויון הראשון תקף מכיוון ש- 0 הוא איבר זהות לחיבור, השוויון השני תקף בשל תכונת הקומוטטיביות, ואילו השוויון השלישי מתקיים מכיוון ש- $0'$ הוא איבר זהות לחיבור בעצמו. לפיכך, $0' = 0$, ובכך הראינו כי ל- V יש איבר זהות לחיבור יחיד. ■

לכל איבר v במרחב וקטורי יש איבר נגדי לחיבור, איבר w במרחב הווקטורי כך ש- $v + w = 0$. המסקנה הבאה מראה שלכל איבר במרחב וקטורי יש איבר נגדי לחיבור יחיד.

1.27 יחידות איבר נגדי לחיבור

לכל איבר במרחב וקטורי יש איבר נגדי לחיבור יחיד.

הוכחה נניח ש- V הוא מרחב וקטורי. יהי $v \in V$. נניח ש- w ו- w' איברים נגדיים לחיבור של v . אזי

$$w = w + 0 = w + (v + w') = (w + v) + w' = 0 + w' = w'.$$

לפיכך $w = w'$, כפי שרצינו.

מאחר שאיברים נגדיים לחיבור הם יחידים, הסימון הבא מקבל כעת משמעות.

1.28 סימון: $-v, w - v$

יהיו $v, w \in V$. אזי

- $-v$ מסמן את האיבר הנגדי לחיבור של v ;
- $w - v$ מוגדר כ- $w + (-v)$.

כמעט כל המסקנות בספר עוסקות במרחב וקטורי כלשהו. כדי להימנע מלהגדיר בכל פעם מחדש את V כמרחב וקטורי, ננסח כעת את ההצהרה הנדרשת אחת ולתמיד.

1.29 סימון: V

מכאן ואילך בספר זה, V מסמן מרחב וקטורי מעל F .

במסקנה הבאה, 0 מסמן סקלר (המספר $0 \in F$) באגף השמאלי של המשוואה, ואילו באגף הימני הוא מסמן וקטור (איבר הזהות לחיבור ב- V).

1.30 המספר 0 כפול וקטור

$$0v = 0 \text{ לכל } v \in V.$$

הוכחה עבור $v \in V$, מתקיים

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v.$$

כשנוסיף את האיבר הנגדי לחיבור של $0v$ לכל אגף של המשוואה לעיל, נקבל $0 = 0v$, כפי שרצינו.

מסקנה 1.30 עוסקת באיבר הזהות לחיבור של V ובכפל בסקלר. בהגדרת מרחב וקטורי, תכונת הדיסטריוטיביות היא הגורם היחיד המקשר בין חיבור וקטורים לבין כפל בסקלר. לפיכך בהוכחת 1.30 עלינו להשתמש בתכונה זו.

במסקנה הבאה, 0 מסמן את איבר הזהות לחיבור ב- V . למרות ההוכחות הדומות, 1.30 ו-1.31 אינן זהות. ביתר דיוק, 1.30 קובעת שמכפלת הסקלר 0 בכל וקטור היא וקטור האפס, ואילו 1.31 קובעת שמכפלת כל סקלר בווקטור האפס היא וקטור האפס.

1.31 מספר כפול וקטור האפס

$$a0 = 0 \text{ לכל } a \in F$$

הוכחה לכל $a \in F$, מתקיים

$$a0 = a(0 + 0) = a0 + a0.$$

כשנוסיף את האיבר הנגדי לחיבור של $a0$ לכל אגף של המשוואה לעיל, נקבל $0 = a0$, כפי שרצינו. ■

כעת נראה שאם איבר ב- V מוכפל בסקלר -1 , התוצאה היא האיבר הנגדי לחיבור של האיבר ב- V .

1.32 המספר -1 כפול וקטור

$$(-1)v = -v \text{ לכל } v \in V$$

הוכחה לכל $v \in V$, מתקיים

$$v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = 0.$$

משוואה זו מראה שכאשר מחברים $(-1)v$ ל- v מקבלים 0 . לפיכך $(-1)v$ הוא האיבר הנגדי לחיבור של v , כפי שרצינו. ■

תרגילים א2

1 הוכיחו כי $-(-v) = v$ לכל $v \in V$.

2 נניח ש- $v \in V$, $a \in F$ ו- $av = 0$. הוכיחו כי $a = 0$ או $v = 0$.

3 נניח ש- $v, w \in V$. הסבירו מדוע קיים איבר יחיד $x \in V$ כך ש- $v + 3x = w$.

4 הקבוצה הריקה אינה מרחב וקטורי. הקבוצה הריקה מקיימת את כל הדרישות שהוגדרו עבור מרחבים וקטוריים (1.20). מלבד אחת. מהי הדרישה?

5 הראו כי בהגדרת מרחב וקטורי (1.20), אפשר להחליף את התנאי לאיבר נגדי לחיבור בתנאי הדורש

$$0v = 0 \text{ for all } v \in V.$$

כאן ה- 0 באגף השמאלי הוא המספר 0 , ואילו באגף הימני ה- 0 הוא איבר הזהות לחיבור ב- V .

הביטוי "אפשר להחליף את התנאי" בהגדרה משמעותו שאוסף האובייקטים הפיקייפים את ההגדרה אינו משתנה אם התנאי העקורי מוחלף בתנאי החדש.

6 נסמן ב- ∞ ו- $-\infty$ שני אובייקטים שונים, שאף אחד מהם אינו ב- $\mathbf{R}$. הגדירו פעולת חיבור וכפל בסקלר מעל $\mathbf{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ כפי שניתן לשער מהסימון. בפרט הסכום והמכפלה של שני מספרים ממשיים מוגדרים כרגיל, ועבור $t \in \mathbf{R}$ נגדיר

$$t\infty = \begin{cases} -\infty & \text{if } t < 0, \\ 0 & \text{if } t = 0, \\ \infty & \text{if } t > 0, \end{cases} \quad t(-\infty) = \begin{cases} \infty & \text{if } t < 0, \\ 0 & \text{if } t = 0, \\ -\infty & \text{if } t > 0, \end{cases}$$

כמו כן

$$\begin{aligned} t + \infty &= \infty + t = \infty + \infty = \infty, \\ t + (-\infty) &= (-\infty) + t = (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \\ \infty + (-\infty) &= (-\infty) + \infty = 0. \end{aligned}$$

עם פעולות חיבור וכפל בסקלר אלו, האם $\mathbf{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbf{R}$? הסבירו.

7 נניח ש- S קבוצה שאינה ריקה. יהי V^S סימון לקבוצת הפונקציות מ- S ל- V . הגדירו פעולות חיבור וכפל בסקלר טבעיות מעל V^S , והראו שאכן V^S הוא מרחב וקטורי לפי הגדרות אלו.

8 נניח ש- V מרחב וקטורי ממשי.

- המירכוז של V , המסומן ב- V_C , שווה ל- $V \times V$. איבר ב- V_C הוא זוג סדור (u, v) , כאשר $u, v \in V$, אך אנו נרשום אותו כ- $u + iv$.
- חיבור מעל V_C מוגדר על ידי

$$(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) = (u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2)$$

$$\text{לכל } u_1, v_1, u_2, v_2 \in V.$$

- כפל בסקלר מרוכב מעל V_C מוגדר על ידי

$$(a + bi)(u + iv) = (au - bv) + i(av + bu)$$

$$\text{לכל } a, b \in \mathbf{R} \text{ ולכל } u, v \in V.$$

הוכיחו כי עם ההגדרות של החיבור והכפל בסקלר מרוכב כמובא לעיל, V_C הוא מרחב וקטורי מרוכב.

חשבו על V כתת-קבוצה של V_C על ידי כך שתזהו את $u \in V$ עם $u + i0$. על בניית V_C מתוך V נוכל לחשוב כעל הכללה של בניית $\mathbf{C}^n$ מתוך $\mathbf{R}^n$.

א3 תתי־מרחב

בכך שנתבונן בתתי־מרחב, נוכל להרחיב באופן ניכר את הדוגמאות של מרחבים וקטוריים.

1.33 הגדרה: תת־מרחב

תת־קבוצה U של V נקראת תת־מרחב של V אם U גם היא מרחב וקטורי עם אותו איבר זהות לחיבור, פעולת חיבור, וכפל בסקלר כמו אלו שמוגדרים מעל V .

יש המשתמשים במונח **תת־מרחב ליניארי**, שמשמעותו זהה לתת־מרחב.

המסקנה הבאה מעניקה לנו את הדרך הקלה ביותר לבדוק האם תת־קבוצה של מרחב וקטורי היא תת־מרחב.

1.34 התנאים לתת־מרחב

תת־קבוצה U של V היא תת־מרחב של V אם ורק־אם U מקיימת את שלושת התנאים הבאים:

איבר זהות לחיבור
 $0 \in U$

סגירות תחת חיבור
 $u, w \in U$ גורר ש־ $u + w \in U$

סגירות תחת כפל בסקלר
 $a \in F$ ו־ $u \in U$ גורר ש־ $au \in U$

הוכחה

את התנאי לקיומו של איבר זהות לחיבור לעיל נוכל להחליף בתנאי ש־ U אינה ריקה (מאחר שאם ניקח $u \in U$ ונכפיל אותו ב־ 0 נקבל ש־ $0 \in U$). בכל זאת, אם U תת־קבוצה של V , היא אכן תת־מרחב, בדרך כלל הזרז המהירה ביותר להראות ש־ U אינה ריקה היא להראות ש־ $0 \in U$.

אם U תת־מרחב של V , אזי U , כתת־מרחב, מקיים את שלושת התנאים לעיל לפי הגדרת מרחב וקטורי.

בכיוון ההפוך, נניח ש־ U , כתת־קבוצה, מקיימת את שלושת התנאים הללו. התנאי הראשון מבטיח שאיבר הזהות לחיבור של V נמצא ב־ U . התנאי השני מבטיח לנו שניתן לחבר איברים ב־ U . התנאי השלישי מבטיח שנוכל להכפיל בסקלר ב־ U .

אם $u \in U$, אזי $-u$ (השווה ל־ $(-1)u$) לפי 1.32 גם הוא ב־ U לפי התנאי השלישי. לכן, לכל איבר ב־ U , קיים איבר נגדי לחיבור ב־ U .

שאר החלקים בהגדרת מרחב וקטורי, דוגמת האסוציאטיביות והקומוטטיביות, מתקיימים ב־ U מאליהם, מאחר שהם מתקיימים במרחב הגדול יותר V . לפיכך U מרחב וקטורי ולכן הוא גם תת־מרחב של V .

שלושת התנאים במסקנה לעיל בדרך כלל מאפשרים לנו לקבוע בזריזות האם תת־קבוצה נתונה של V היא תת־מרחב של V . עליכם לוודא את כל הטענות המופיעות בדוגמה הבאה.

א. אם $b \in F$, אזי

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F^4 : x_3 = 5x_4 + b\}$$

הוא תת־מרחב של F^4 אם ורק אם $b = 0$.

ב. קבוצת הפונקציות הממשיות הרציפות מעל הקטע $[0, 1]$ היא תת־מרחב של $\mathbf{R}^{[0,1]}$.

ג. קבוצת הפונקציות הממשיות הגזירות מעל $\mathbf{R}$ היא תת־מרחב של $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

ד. קבוצת הפונקציות הממשיות הגזירות f מעל הקטע $(0, 3)$ כך ש- $f'(2) = b$ היא תת־מרחב של $\mathbf{R}^{(0,3)}$ אם ורק אם $b = 0$.

ה. קבוצת כל הסדרות של מספרים מרוכבים שגבולן 0 היא תת־מרחב של C^∞ .

הקבוצה $\{0\}$ היא תת־מרחב הקטן ביותר של V , ואילו V עצמו הוא תת־מרחב הגדול ביותר של V . הקבוצה הריקה אינה תת־מרחב של V מאחר שתת־מרחב חייב להיות מרחב וקטורי, נדרש שיהיה בו איבר אחד לפחות, הלא הוא איבר הזהות לחיבור.

אימות חלק מהסעיפים לעיל חושף את המבנה הליניארי המונח ביסוד חלק מהחשבון האינפיניטסימלי. לדוגמה, לאימות סעיף (ב) נדרשת המסקנה כי סכום שתי פונקציות רציפות הוא פונקציה רציפה. דוגמה נוספת, לסעיף (ד) לעיל נדרשת המסקנה כי עבור קבוע c , הנגזרת של cf שווה ל- c פעמים הנגזרת של f .

תת־המרחב של $\mathbf{R}^2$ הם: $\{0\}$, כל הישרים ב- $\mathbf{R}^2$ העוברים דרך ראשית הצירים, ו- $\mathbf{R}^2$ עצמו בלבד. תת־המרחב של $\mathbf{R}^3$ הם: $\{0\}$, כל הישרים ב- $\mathbf{R}^3$ העוברים דרך ראשית הצירים, כל המישורים ב- $\mathbf{R}^3$ העוברים דרך ראשית הצירים, ו- $\mathbf{R}^3$ עצמו בלבד. ההוכחה שאובייקטים אלו תת־מרחב היא פשוטה—החלק המאתגר יותר הוא להראות שרק הם תת־המרחב של $\mathbf{R}^2$ ו- $\mathbf{R}^3$. משימה זו תהפוך לקלה יותר אחרי שבפרק הבא נכיר כלים נוספים.

סכומי תת־מרחב

איחוד של תת־מרחב לעיתים נדירות יהיה תת־מרחב (ראו תרגיל 12); זו הסיבה שלרוב נעסוק בסכומים ולא באיחודים.

כשאנו עוסקים במרחבים וקטוריים, לרוב נגלה עניין בתת־מרחב ולא בתת־קבוצה שרירותיות. הרעיון של סכום תת־מרחב יהיה שימושי.

1.36 הגדרה: סכום תת־מרחב

נניח ש- $V_1, \dots, V_m$ תת־מרחב של V . הסכום של $V_1, \dots, V_m$, המסומן ב- $V_1 + \dots + V_m$, הוא קבוצת כל הסכומים האפשריים של איברי $V_1, \dots, V_m$. וביתר דיוק,

$$V_1 + \dots + V_m = \{v_1 + \dots + v_m : v_1 \in V_1, \dots, v_m \in V_m\}.$$

נכיר כעת מספר דוגמאות של סכומי תתי־מרחב.

1.37 דוגמה: סכום תתי־מרחב של F^3

נניח ש־ U היא קבוצת כל איברי F^3 שבהם הקואורדינטות השנייה והשלישית הן 0, ו־ W היא קבוצת כל איברי F^3 שבהם הקואורדינטות הראשונה והשלישית הן 0:

$$U = \{(x, 0, 0) \in F^3 : x \in F\} \quad \text{וגם} \quad W = \{(0, y, 0) \in F^3 : y \in F\}.$$

אזי

$$U + W = \{(x, y, 0) \in F^3 : x, y \in F\},$$

כפי שעליכם לוודא.

1.38 דוגמה: סכום תתי־מרחב של F^4

נניח ש־

$$U = \{(x, x, y, y) \in F^4 : x, y \in F\} \quad \text{ו־} \quad W = \{(x, x, x, y) \in F^4 : x, y \in F\}.$$

בתיאור מילולי נאמר ש־ U היא קבוצת האיברים ב־ F^4 שערכיהם בצמד הקואורדינטות הראשון זהים, וערך זהה בצמד הקואורדינטות האחרון. באופן דומה נתאר את W כקבוצת האיברים ב־ F^4 שבהם ערך זהה בשלוש הקואורדינטות הראשונות. לתיאור $U + W$ ניקח איבר טיפוסי של U מהצורה (a, a, b, b) ואיבר טיפוסי של W מהצורה (c, c, c, d) כאשר $a, b, c, d \in F$ ונקבל:

$$(a, a, b, b) + (c, c, c, d) = (a + c, a + c, b + c, b + d),$$

מכך נסיק כי ערכי צמד הקואורדינטות הראשון בכל איבר ב־ $U + W$ שווים. לפיכך

$$1.39 \quad U + W \subseteq \{(x, x, y, z) \in F^4 : x, y, z \in F\}.$$

כדי להוכיח את ההכלה בכיוון השני, נניח ש־ $x, y, z \in F$ ונקבל

$$(x, x, y, z) = (x, x, y, y) + (0, 0, 0, z - y),$$

כאשר הווקטור הראשון באגף הימני של המשוואה הוא ב־ U והווקטור השני הוא ב־ W . לפיכך $(x, x, y, z) \in U + W$, מה שמראה כי הכלה 1.39 מתקיימת גם בכיוון ההפוך. לכן

$$U + W = \{(x, x, y, z) \in F^4 : x, y, z \in F\},$$

מה שמראה ש־ $U + W$ היא קבוצת האיברים ב־ F^4 שערכיהם בצמד הקואורדינטות הראשון שווים.

המסקנה הבאה קובעת כי סכום של תתי־מרחב הוא תת־מרחב, ולמעשה הוא תת־המרחב הקטן ביותר המכיל את כל המחוברים (משמעות הדבר היא שכל תת־מרחב המכיל את כל המחוברים מכיל גם את הסכום).

1.40 סכום תת־מרחב הוא התת־מרחב הקטן ביותר המכיל את תת־המרחב

נניח ש- $V_1, \dots, V_m$ תת־מרחב של V . אזי, $V_1 + \dots + V_m$ הוא התת־מרחב הקטן ביותר של V המכיל את $V_1, \dots, V_m$.

סכום תת־מרחב בתורת המרחבים הווקטוריים דומה לאיחוד תתי־קבוצה בתורת הקבוצות. בהינתן שני תת־מרחב של מרחב וקטורי כלשהו, התת־מרחב הקטן ביותר המכיל אותם הוא סכומם. באופן דומה, בהינתן שתי תתי־קבוצה של קבוצה כלשהי, התת־קבוצה הקטנה ביותר המכילה אותן היא איחודן.

הוכחה ניתן לוודא כי $V_1 + \dots + V_m$ מכיל את איבר הזהות לחיבור 0 וסגור תחת חיבור וכפל בסקלר. לפיכך מ-1.34 נסיק כי $V_1 + \dots + V_m$ תת־מרחב של V .

תת־המרחב $V_1, \dots, V_m$ כולם מוכלים ב- $V_1 + \dots + V_m$ (כדי להיווכח בכך, נשקול סכומים $v_1 + \dots + v_m$ כאשר כל האיברים מלבד אחד מהם v_k הם איבר האפס). בכיוון ההפוך, כל תת־מרחב של V המכיל את $V_1, \dots, V_m$ מכיל גם את $V_1 + \dots + V_m$ (שכן על התת־מרחב להכיל את כל הסכומים הסופיים של איבריו). לפיכך $V_1 + \dots + V_m$ הוא התת־מרחב הקטן ביותר של V המכיל את $V_1, \dots, V_m$.

סכומים ישרים

נניח ש- $V_1, \dots, V_m$ תת־מרחב של V . כל איבר ב- $V_1 + \dots + V_m$ יכול להיכתב באופן הבא

$$v_1 + \dots + v_m,$$

כאשר כל $v_k \in V_k$. קיים עניין מיוחד במקרים שבהם הייצוג של כל וקטור ב- $V_1 + \dots + V_m$ בצורה לעיל הוא יחיד. מצב זה חשוב עד כדי כך שהוענק לו שם מיוחד (סכום ישר) ואפילו סימון מיוחד ($\oplus$).

1.41 הגדרה: סכום ישר, $\oplus$

נניח ש- $V_1, \dots, V_m$ תת־מרחב של V .

- הסכום $V_1 + \dots + V_m$ נקרא סכום ישר אם כל איבר של $V_1 + \dots + V_m$ יכול להיכתב בדרך אחת בלבד כסכום $v_1 + \dots + v_m$, כאשר כל $v_k \in V_k$.
- אם $V_1 + \dots + V_m$ סכום ישר, אזי נסמן את $V_1 + \dots + V_m$ כ- $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ כאשר הסימון $\oplus$ משמש כאות לכך שהסכום הוא סכום ישר.

1.42 דוגמה: סכום ישר של שני תת־מרחב

נניח ש- U הוא תת־מרחב של $\mathbb{F}^3$ המורכב מכל הווקטורים שהקואורדינטה האחרונה שלהם שווה 0, ו- W הוא תת־מרחב של $\mathbb{F}^3$ המורכב מכל הווקטורים ששתי הקואורדינטות הראשונות שלהם שוות 0:

$$U = \{(x, y, 0) \in \mathbb{F}^3 : x, y \in \mathbb{F}\} \quad \text{וגם} \quad W = \{(0, 0, z) \in \mathbb{F}^3 : z \in \mathbb{F}\}.$$

אזי, $\mathbb{F}^3 = U \oplus W$, כפי שעליכם לוודא.

1.43 דוגמה: סכום ישר של מספר תתי-מרחב

נניח ש- V_k הוא תת-מרחב של $\mathbf{F}^n$ המורכב מהווקטורים שכל הקואורדינטות שלהם 0, פרט אולי לרכיב ה- k^{th} ; לדוגמה, $V_2 = \{(0, x, 0, \dots, 0) \in \mathbf{F}^n : x \in \mathbf{F}\}$. אזי

$$\mathbf{F}^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_n,$$

כפי שעליכם לוודא.

לעיתים אי-דוגמאות מסייעות להבנה באותה מידה שבה הדוגמאות מסייעות.

1.44 דוגמה: סכום שאינו סכום ישר

נניח ש-

$$V_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbf{F}^3 : x, y \in \mathbf{F}\},$$

$$V_2 = \{(0, 0, z) \in \mathbf{F}^3 : z \in \mathbf{F}\},$$

$$V_3 = \{(0, y, y) \in \mathbf{F}^3 : y \in \mathbf{F}\}.$$

אזי $\mathbf{F}^3 = V_1 + V_2 + V_3$ מאחר שכל וקטור $(x, y, z) \in \mathbf{F}^3$ יכול להיכתב כ-

$$(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z) + (0, 0, 0),$$

כאשר הווקטור הראשון באגף הימני של המשוואה הוא ב- V_1 , הווקטור השני הוא ב- V_2 , והווקטור השלישי הוא ב- V_3 .

אך עדיין, $\mathbf{F}^3$ אינו סכום ישר של V_1, V_2, V_3 , מאחר שהווקטור $(0, 0, 0)$ יכול להיכתב ביותר מדרך אחת כסכום $v_1 + v_2 + v_3$, עבור כל $v_k \in V_k$. בפרט, מתקיים

$$(0, 0, 0) = (0, 1, 0) + (0, 0, 1) + (0, -1, -1)$$

וכמובן גם,

$$(0, 0, 0) = (0, 0, 0) + (0, 0, 0) + (0, 0, 0),$$

כאשר הווקטור הראשון באגף הימני של כל משוואה לעיל הוא ב- V_1 , הווקטור השני ב- V_2 , והווקטור השלישי ב- V_3 . לפיכך הסכום $V_1 + V_2 + V_3$ אינו סכום ישר.

הסמל $\oplus$, שהוא סימן החיבור בתוך מעגל, מזכיר לנו שאנו עוסקים בעקרה מיוחד של סכום תתי-מרחב—לכל איבר בסכום ישר ייצוג יחיד כסכום איברים מתתי-המרחב הפעורים.

הגדרת סכום ישר דורשת כי לכל וקטור בסכום יהיה ייצוג יחיד כסכום מהצורה הנדרשת. במסקנה הבאה נראה כי כאשר עלינו לקבוע האם סכום של תתי-מרחב הוא סכום ישר, כל שעלינו לבדוק הוא האם 0 יכול להיכתב באופן יחיד כסכום מהצורה הנדרשת.

1.45 תנאי לסכום ישר

נניח ש- $V_1, \dots, V_m$ תתי־מרחב של V . אזי $V_1 + \dots + V_m$ הוא סכום ישר אם־ורק־אם הדרך היחידה לבטא את 0 כסכום $v_1 + \dots + v_m$, עבור כל $v_k \in V_k$, היא שכל $v_k = 0$. שווה 0.

הוכחה תחילה נניח ש- $V_1 + \dots + V_m$ הוא סכום ישר. הגדרת סכום ישר מכתיבה שהאופן היחיד שבו ניתן לבטא את 0 כסכום $v_1 + \dots + v_m$, עבור $v_k \in V_k$, הוא כשניקה את איבר האפס מכל תתי־מרחב, כלומר כל $v_k = 0$.

כעת נניח שהדרך היחידה לבטא את 0 כסכום $v_1 + \dots + v_m$, עבור $v_k \in V_k$, היא כשנבחר רק את איבר ה-0 עבור כל v_k . כדי להראות ש- $V_1 + \dots + V_m$ הוא סכום ישר, יהי $v \in V_1 + \dots + V_m$. נוכל לכתוב

$$v = v_1 + \dots + v_m$$

עבור $v_1 \in V_1, \dots, v_m \in V_m$ כלשהם. כדי להראות שזהו אופן ההצגה היחיד של הווקטור, נניח בנוסף שקיימת חלופה, כך ש-

$$v = u_1 + \dots + u_m,$$

עבור $u_1 \in V_1, \dots, u_m \in V_m$ כלשהם. בחיסור שתי המשוואות הללו, נקבל

$$0 = (v_1 - u_1) + \dots + (v_m - u_m).$$

מאחר ש- $v_1 - u_1 \in V_1, \dots, v_m - u_m \in V_m$, מהמשוואה לעיל נסיק שכל $v_k - u_k = 0$. לפיכך $v_1 = u_1, \dots, v_m = u_m$ כפי שרצינו. ■

הסימן $\Leftrightarrow$ שבשימוש להלן משמעותו "אם־ורק־אם"; אפשר לקרוא אותו גם כ-"ישקול ל...".

המסקנה הבאה מספקת תנאי פשוט לבדיקה האם סכום של שני תתי־מרחב הוא סכום ישר.

1.46 סכום ישר של שני תתי־מרחב

נניח ש- U ו- W תתי־מרחב של V . אזי

$$U + W \text{ סכום ישר} \Leftrightarrow U \cap W = \{0\}$$

הוכחה תחילה נניח ש- $U + W$ סכום ישר. אם $v \in U \cap W$, אזי $0 = v + (-v)$ כאשר $v \in U$ ו- $-v \in W$. לפי כלל הייצוג הייחודי ל-0 כסכום של וקטור ב- U ווקטור ב- W , קיבלנו $v = 0$. לפיכך $U \cap W = \{0\}$, ובכך השלמנו כיוון אחד של ההוכחה. להוכחת הכיוון השני, נניח כעת ש- $U \cap W = \{0\}$. כדי להוכיח ש- $U + W$ סכום ישר, נניח ש- $u \in U, w \in W$, וגם

$$0 = u + w.$$

להשלמת ההוכחה, כל שנדרש הוא להראות ש- $u = w = 0$ (לפי 1.45). מהמשוואה לעיל נסיק כי $u = -w \in W$. לפיכך $u \in U \cap W$. לכן $u = 0$, ולפי המשוואה לעיל זה גורר ש- $w = 0$, ובכך הושלמה ההוכחה. ■

סכומי תתי-מרחב מקבילים לאיחודי תתי-קבוצה. באופן דומה, קיימת הקבלה בין סכום ישר של תתי-מרחב לבין איחוד זר של תתי-קבוצה. אמנם, לאור העובדה ששני תתי-מרחב לעולם אינם זרים, שהרי איבר האפס משותף לשניהם, נוכל לומר שאת זרות תתי-הקבוצה המרנו, לפחות במקרה של שני תתי-מרחב, בדרישה שהחיתוך שווה ל- $\{0\}$.

המסקנה לעיל עוסקת רק במקרה של שני תתי-מרחב. כשנבוא לדון באפשרות של סכום ישר עבור יותר משני תתי-מרחב, הבדיקה שבחיתוך כל צמד קיים רק איבר האפס אינה מספיקה. כדי להיווכח בכך נתבונן בדוגמה 1.44. באי-דוגמה זו לסכום ישר, ראינו ש- $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = \{0\}$.

תרגילים א3

- עבור כל אחת מתתי-הקבוצה של F^3 להלן, קבעו האם היא גם תת-מרחב של F^3 .
 - $\{(x_1, x_2, x_3) \in F^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ א.
 - $\{(x_1, x_2, x_3) \in F^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\}$ ב.
 - $\{(x_1, x_2, x_3) \in F^3 : x_1 x_2 x_3 = 0\}$ ג.
 - $\{(x_1, x_2, x_3) \in F^3 : x_1 = 5x_3\}$ ד.
- ודאו את כל הטענות על תתי-מרחב בדוגמה 1.35.
- הראו שקבוצת כל הפונקציות הגזירות הממשיות f מעל הקטע $(-4, 4)$ כך ש- $f'(-1) = 3f(2)$ היא תת-מרחב של $R^{(-4,4)}$.
- נניח ש- $b \in R$. הראו שקבוצת הפונקציות הממשיות הרציפות f בקטע $[0, 1]$ כך ש- $\int_0^1 f = b$ היא תת-מרחב של $R^{[0,1]}$ אם ורק אם $b = 0$.
- האם R^2 תת-מרחב של המרחב הווקטורי המרוכב C^2 ?
- א. האם $\{(a, b, c) \in R^3 : a^3 = b^3\}$ תת-מרחב של R^3 ?
 ב. האם $\{(a, b, c) \in C^3 : a^3 = b^3\}$ תת-מרחב של C^3 ?
- הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם U היא תת-קבוצה לא ריקה של R^2 , סגורה תחת חיבור ואיבר נגדי לחיבור (כלומר $-u \in U$ עבור כל $u \in U$), אזי U תת-מרחב של R^2 .
- הביאו דוגמה לתת-קבוצה לא ריקה U של R^2 , הסגורה תחת כפל בסקלר, ועדיין U אינה תת-מרחב של R^2 .
- פונקציה $f: R \rightarrow R$ נקראת מחזורית אם קיים מספר חיובי p כך ש- $f(x) = f(x+p)$ לכל $x \in R$. האם קבוצת הפונקציות המחזוריות מ- R ל- R תת-מרחב של R^R ? הסבירו.
- נניח ש- V_1 ו- V_2 תתי-מרחב של V . הוכיחו כי החיתוך $V_1 \cap V_2$ הוא תת-מרחב של V .

11 הוכיחו כי החיתוך של כל אוסף תתי־מרחב של V הוא תת־מרחב של V .

12 הוכיחו כי איחוד שני תתי־מרחב של V הוא תת־מרחב של V אם ורק־אם אחד מתתי־המרחב מוכל באחר.

13 הוכיחו כי איחוד של שלושה תתי־מרחב של V הוא תת־מרחב של V אם ורק־אם תת־מרחב אחד מכיל את שני האחרים.

תרגיל זה קשה במפתיע יותר מתרגיל 12; ייתכן שהדבר נובע מכך שהטענה אינה נכונה אם מחליפים את F בשדה הפכיל $\mathbb{R}$ שני איברים.

14 נניח ש־

$$U = \{(x, -x, 2x) \in F^3 : x \in F\} \quad \text{וגם} \quad W = \{(x, x, 2x) \in F^3 : x \in F\}.$$

תארו את $U + W$ תוך שימוש בסימונים מתמטיים, ובנוסף, תנו תיאור מילולי ל־ $U + W$ ללא שימוש בסימונים מתמטיים.

15 נניח ש־ U תת־מרחב של V . מהו $U + U$?

16 האם פעולת החיבור מעל תתי־המרחב של V היא קומוטטיבית? כלומר, אם U ו־ W תתי־מרחב של V , האם $U + W = W + U$?

17 האם פעולת החיבור מעל תתי־המרחב של V היא אסוציאטיבית? כלומר, אם V_1, V_2, V_3 תתי־מרחב של V , האם

$$(V_1 + V_2) + V_3 = V_1 + (V_2 + V_3)?$$

18 האם לפעולת החיבור מעל תתי־המרחב של V יש איבר זהות לחיבור? לאילו תתי־מרחב יש איבר נגדי לחיבור?

19 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם V_1, V_2, U תתי־מרחב של V כך ש־

$$V_1 + U = V_2 + U,$$

$$\text{אזי } V_1 = V_2.$$

20 נניח ש־

$$U = \{(x, x, y, y) \in F^4 : x, y \in F\}.$$

$$F^4 = U \oplus W \quad \text{כך ש־}$$

21 נניח ש־

$$U = \{(x, y, x + y, x - y, 2x) \in F^5 : x, y \in F\}.$$

$$F^5 = U \oplus W \quad \text{כך ש־}$$

22 נניח ש־

$$U = \{(x, y, x + y, x - y, 2x) \in F^5 : x, y \in F\}.$$

מצאו שלושה תתי־מרחב W_1, W_2, W_3 של F^5 , שאף אחד מהם אינו שווה ל־ $\{0\}$, כך ש־ $F^5 = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

23 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם V_1, V_2, U תתי־מרחב של V כך ש־

$$V = V_1 \oplus U \quad \text{וגם} \quad V = V_2 \oplus U,$$

$$V_1 = V_2.$$

רמז: כאשר מניסים לגלות האם השערה מסוימת באלגברה ליניארית נכונה, לעיתים קרובות הבדיקה ב־ $\mathbb{F}^2$ היא נקודת התחלה טובה.

24 פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת זוגית אם:

$$f(-x) = f(x)$$

לכל $x \in \mathbb{R}$.

פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת אי־זוגית אם:

$$f(-x) = -f(x)$$

לכל $x \in \mathbb{R}$. נסמן ב־ V_e את קבוצת הפונקציות הממשיות הזוגיות מעל $\mathbb{R}$ וב־ V_o את קבוצת הפונקציות הממשיות האי־זוגיות מעל $\mathbb{R}$. הראו ש־ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = V_e \oplus V_o$.

פרק ב

מרחבים וקטוריים מממד סופי

בפרק הקודם למדנו על מרחבים וקטוריים. אלגברה ליניארית אינה עוסקת בכל מרחב וקטורי שרירותי, כי אם במרחבים בעלי ממד סופי, שאותם נכיר בפרק זה. את הפרק נפתח בדיון על צירופים ליניאריים של רשימות וקטורים, מה שיוביל אותנו אל הרעיון המרכזי ששמו אי־תלות ליניארית. לַמֶּת התלות הליניארית תהפוך לאחד הכלים השימושיים ביותר שלנו.

רשימת וקטורים במרחב וקטורי שהיא קטנה דיה להיות בלתי תלויה ליניארית, אך עדיין גדולה דיה כך שצירופי איבריה ממלאים את כל המרחב הווקטורי, נקראת בסיס של המרחב. אנו ניווכח כי לכל הבסיסים במרחב אורך זהה, מה שיאפשר לנו להגדיר את ממד המרחב.

את הפרק נחתום בנוסחה לממד של סכום שני תתי־מרחב.

הנחות המוצא לפרק זה

- F מסמן R או C .
- V מסמן מרחב וקטורי מעל F .



הבניין המרכזי של המכון למחקר מתקדם, בפרינסטון, ניו־ג'רזי, ארה"ב. פול הלמוש (1916–2006) כתב את ספר האלגברה הליניארית המודרני הראשון בבניין זה. ספר זה של הלמוש יצא לאור בשנת 1942 (מהדורה שנייה הודפסה בשנת 1958). שם ספרו זה של הלמוש הוא כשמו של פרק זה, ובאנגלית — *Finite-Dimensional Vector Spaces*.

13 פְּרִיָסָה ואי־תלות ליניארית

עד כה נהגנו להקיף בסוגריים רשימות מספרים, וכך נמשיך לעשות עבור איברים ב־ F^n ; לדוגמה, $(2, -7, 8) \in F^3$. אולם, כעת עלינו להביא בחשבון רשימות של וקטורים (שייתכן שיהיו איברים ב־ F^n או במרחבים וקטוריים אחרים). כדי להימנע מבלבול, ככלל, רשימות הווקטורים תיכתבנה ללא סוגריים. לדוגמה, $(4, 1, 6), (9, 5, 7)$ היא רשימה בת שני וקטורים ב־ R^3 .

2.1 סימון: רשימת וקטורים

בדרך כלל, נכתוב את רשימות הווקטורים ללא סוגריים.

צירופים ליניאריים ופריסה

סכום של כפולות סקלר של הווקטורים ברשימה נתונה נקרא צירוף ליניארי של הרשימה. להלן ההגדרה הרשמית.

2.2 הגדרה: צירוף ליניארי

צירוף ליניארי של רשימת הווקטורים $v_1, \dots, v_m$ ב V הוא וקטור מהצורה

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m,$$

כאשר $a_1, \dots, a_m \in F$.

2.3 דוגמה: צירופים ליניאריים ב־ R^3

- $(17, -4, 2)$ הוא צירוף ליניארי של $(2, 1, -3), (1, -2, 4)$, שהיא רשימה בת שני וקטורים ב־ R^3 , שכן
- $$(17, -4, 2) = 6(2, 1, -3) + 5(1, -2, 4).$$
- $(17, -4, 5)$ אינו צירוף ליניארי של $(2, 1, -3), (1, -2, 4)$, שהיא רשימה בת שני וקטורים ב־ R^3 , שכן לא קיימים מספרים $a_1, a_2 \in R$ כך ש־
- $$(17, -4, 5) = a_1(2, 1, -3) + a_2(1, -2, 4).$$

כלומר, למערכת המשוואות

$$\begin{aligned} 17 &= 2a_1 + a_2 \\ -4 &= a_1 - 2a_2 \\ 5 &= -3a_1 + 4a_2 \end{aligned}$$

אין פתרון (כפי שעליכם לוודא).

2.4 הגדרה: פריסה, span

קבוצת כל הצירופים הליניאריים של רשימת הווקטורים $v_1, \dots, v_m$ ב- V נקראת הפריסה של $v_1, \dots, v_m$ ומסומנת על ידי $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$. במילים אחרות,

$$\text{span}(v_1, \dots, v_m) = \{a_1 v_1 + \dots + a_m v_m : a_1, \dots, a_m \in F\}.$$

הפריסה של רשימת וקטורים ריקה () מוגדרת כ- $\{0\}$.

2.5 דוגמה: span

בדוגמה הקודמת ראינו שב- $\mathbb{R}^3$,

$$(17, -4, 2) \in \text{span}((2, 1, -3), (1, -2, 4)) \bullet$$

$$(17, -4, 5) \notin \text{span}((2, 1, -3), (1, -2, 4)) \bullet$$

2.6 span הוא תת־מרחב הקטן ביותר המכיל

ה- span של רשימת וקטורים ב- V הוא התת־מרחב הקטן ביותר של V המכיל את כל הווקטורים שברשימה.

יש מתמטיקאים המשתמשים במונח **פריסה ליניארית**, שמשמעותו זהה לפריסה.

הוכחה נניח ש- $v_1, \dots, v_m$ היא רשימת וקטורים ב- V .

ראשית נראה ש- $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ הוא

תת־מרחב של V . איבר הזהות לחיבור קיים ב- $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ שכן

$$0 = 0v_1 + \dots + 0v_m.$$

בנוסף, $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ סגור תחת פעולת החיבור, מאחר ש-

$$(a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) + (c_1 v_1 + \dots + c_m v_m) = (a_1 + c_1) v_1 + \dots + (a_m + c_m) v_m.$$

יתר על כן, $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ סגור תחת כפל בסקלר, שהרי

$$\lambda(a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) = \lambda a_1 v_1 + \dots + \lambda a_m v_m.$$

לפיכך, $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ הוא תת־מרחב של V (לפי 1.34).

כל v_k הוא צירוף ליניארי של $v_1, \dots, v_m$ (להראות זאת, נגדיר $a_k = 1$ ובשאר ה- a -ים ב-2.2 נציב 0). לפיכך, $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ מכיל כל אחד מה- v_k -ים. בכיוון ההפוך, מאחר שתת־מרחב סגורים תחת כפל בסקלר וחיבור, כל תת־מרחב של V המכיל כל אחד מהווקטורים v_k מכיל את $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$. לפיכך $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ הוא התת־מרחב הקטן ביותר של V המכיל את כל הווקטורים $v_1, \dots, v_m$. ■

2.7 הגדרה: פריסה

אם $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ שווה ל- V , נאמר כי הרשימה $v_1, \dots, v_m$ פורסת את V .

2.8 דוגמה: רשימה הפורסת את F^n

נניח ש- n מספר שלם חיובי. אנו רוצים להראות כי

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$$

פורסת את F^n . הווקטור ה- k^{th} ברשימה לעיל מכיל 1 בקואורדינטה ה- k^{th} , ו-0 בכל שאר הרכיבים.

נניח ש- $(x_1, \dots, x_n) \in F^n$. אזי

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1).$$

לכן $(x_1, \dots, x_n) \in \text{span}((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$, כפי שרצינו.

כעת אנו פונים לאחת מהגדרות היסוד באלגברה ליניארית.

2.9 הגדרה: מרחב וקטורי מממד סופי

מרחב וקטורי נקרא מממד סופי אם רשימת וקטורים כלשהי בתוכו פורסת את המרחב.

דוגמה 2.8 לעיל הראתה ש- F^n הוא מרחב מממד סופי לכל n מספר שלם חיובי.

נזכיר כי לפי ההגדרה, כל רשימה היא באורך סופי.

אין ספק שהגדרת הפולינום כבר מוכרת לכם.

2.10 הגדרה: פולינום, $\mathcal{P}(F)$

• פונקציה $p: F \rightarrow F$ נקראת פולינום עם מקדמים ב- F אם קיימים $a_0, \dots, a_m \in F$ כך ש-

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m$$

לכל $z \in F$.

• $\mathcal{P}(F)$ היא קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים ב- F .

יחד עם פעולות החיבור והכפל בסקלר הרגילות, $\mathcal{P}(F)$ הוא מרחב וקטורי מעל F , כפי שעליכם לוודא. לכן, $\mathcal{P}(F)$ הוא תת-מרחב של F^F , המרחב הווקטורי של פונקציות מ- F ל- F .

אם פולינום (כשאנו חושבים עליו כפונקציה מ- F ל- F) מיוצג על ידי שתי קבוצות מקדמים, אזי חיסור ייצוג אחד של הפולינום מהאחר יניב פולינום המתאפס זהותית כפונקציה מעל F ולכן כל המקדמים בפולינום זה הם אפסים (אם עובדה זו עדיין אינה ברורה, קבלו אותה לעת עתה; אנו נוכיח אותה בהמשך—ראו 4.8). **מסקנה:** מקדמי הפולינום נקבעים באופן יחיד על ידי הפולינום. לפיכך ההגדרה הבאה קובעת באופן יחיד את מעלת הפולינום.

2.11 הגדרה: מעלת הפולינום, $\deg p$

- על פולינום $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ נאמר שמעלתו m אם קיימים סקלרים $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$ כאשר $a_m \neq 0$ כך שלכל $z \in \mathbb{F}$ מתקיים $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m$.
- על הפולינום שהוא זהותית 0 נאמר שמעלתו $-\infty$.
- את מעלת הפולינום p נסמן ב־ $\deg p$.

בהגדרה הבאה, אנו משתמשים במוסכמה ש־ $-\infty < m$, שמשמעותה היא שפולינום האפס הוא ב־ $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$.

2.12 סימון: $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$

עבור m מספר שלם אי־שלילי, $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ מסמן את קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים ב־ $\mathbb{F}$ שמעלתם m לכל היותר.

אם m מספר שלם אי־שלילי, אזי $\mathcal{P}_m(\mathbb{F}) = \text{span}(1, z, \dots, z^m)$ [כאן אנו מרשים לעצמנו אי־דיוק קל בסימון, בכך שאנו משתמשים ב־ z^k לסימון פונקציה]. לפיכך, $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ הוא מרחב וקטורי מממד סופי לכל מספר שלם אי־שלילי m .

2.13 הגדרה: מרחב וקטורי מעמד אינסופי

מרחב וקטורי נקרא מעמד אינסופי אם אינו מממד סופי.

2.14 דוגמה: $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ הוא מעמד אינסופי

נתבונן ברשימה כלשהי של איברים של $\mathcal{P}(\mathbb{F})$. נסמן ב־ m את המעלה הגבוהה ביותר של הפולינומים ברשימה. אזי, מעלת כל פולינום בפריסת רשימה זו היא לכל היותר m . לפיכך, z^{m+1} אינו בפריסה של הרשימה, ולכן אין רשימה הפורסת את $\mathcal{P}(\mathbb{F})$. לפיכך $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ הוא מממד אינסופי.

אי־תִלּוֹת לִינִיארִית

נניח ש־ $v_1, \dots, v_m \in V$ ו־ $v \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$. לפי הגדרת הפריסה, קיימים $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$ כך ש־

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m.$$

השאלה שנעסוק בה היא האם בחירת הסקלרים במשוואה לעיל יחידה. נניח ש־ $c_1, \dots, c_m$ היא קבוצה אחרת של סקלרים כך ש־

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m.$$

בחיסור שתי המשוואות האחרונות, נקבל

$$0 = (a_1 - c_1)v_1 + \dots + (a_m - c_m)v_m.$$

לפיכך, כתבנו 0 כצירוף ליניארי של $(v_1, \dots, v_m)$. אם הדרך היחידה לעשות זאת היא על ידי כך שנבחר אפסים עבור כל הסקלרים בצירוף הליניארי, אזי כל $a_k - c_k$ שווה 0, שמשמעותו כי כל a_k שווה ל- c_k (ולפיכך בחירת הסקלרים היתה אכן יחידה). למצב זה חשיבות כה רבה, עד כדי הענקת שם ייחודי—אִי-תלות ליניארית—שכעת ניגש להגדרתה.

2.15 הגדרה: אִי-תלות ליניארית

- רשימת וקטורים $v_1, \dots, v_m$ ב- V נקראת בלתי תלויה ליניארית אם הדרך היחידה ש- $a_1, \dots, a_m \in F$ יקיימו את

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$$

היא כאשר $a_1 = \dots = a_m = 0$.

- הרשימה הריקה () מוגדרת גם היא כבלתי תלויה ליניארית.

ההנמקה לעיל מראה ש- $v_1, \dots, v_m$ בלתי תלויה ליניארית אם ורק אם לכל וקטור ב- $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ יש ייצוג אחד בלבד כצירוף ליניארי של $v_1, \dots, v_m$.

2.16 דוגמה: רשימות בלתי תלויות ליניארית

א. כדי להיווכח שהרשימה $(0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)$ בלתי תלויה ליניארית ב- F^4 , נניח ש- $a_1, a_2, a_3 \in F$ ו-

$$a_1(1, 0, 0, 0) + a_2(0, 1, 0, 0) + a_3(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0).$$

לפיכך

$$(a_1, a_2, a_3, 0) = (0, 0, 0, 0).$$

לכן $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. לפיכך הרשימה $(0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)$ בלתי תלויה ליניארית ב- F^4 .

ב. נניח ש- m מספר שלם אי-שלילי. כדי להיווכח שהרשימה $1, z, \dots, z^m$ בלתי תלויה ליניארית ב- $\mathcal{P}(F)$, נניח ש- $a_0, a_1, \dots, a_m \in F$ וגם

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m = 0,$$

כאשר אנו חושבים על שני האגפים כאיברים ב- $\mathcal{P}(F)$. אזי

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m = 0$$

לכל $z \in F$. לפי הנאמר לעיל (וכפי שנובע מ-4.8), זה גורר ש- $a_0 = a_1 = \dots = a_m = 0$. לפיכך $1, z, \dots, z^m$ רשימה בלתי תלויה ליניארית ב- $\mathcal{P}(F)$.

ג. רשימה בת איבר יחיד במרחב וקטורי היא בלתי תלויה ליניארית אם ורק אם הווקטור ברשימה אינו 0.

ד. רשימה בת שני איברים במרחב וקטורי היא בלתי תלויה ליניארית אם ורק אם אף אחד מהווקטורים אינו כפולת סקלר של האחר.

אם הוסרו מספר וקטורים מרשימה בלתי תלויה ליניארית, הרשימה עם הווקטורים הנותרים אף היא בלתי תלויה ליניארית, כפי שעליכם לוודא.

2.17 הגדרה: תלות ליניארית

- רשימת וקטורים ב־ V נקראת תלויה ליניארית אם היא אינה בלתי תלויה ליניארית.
- במילים אחרות, רשימת וקטורים $v_1, \dots, v_m$ ב־ V תלויה ליניארית אם קיימים $a_1, \dots, a_m \in F$, לא כולם אפסים, כך ש־ $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$.

2.18 דוגמה: רשימות תלויות ליניאריות

- $(2, 3, 1), (1, -1, 2), (7, 3, 8)$ תלויה ליניארית ב־ F^3 מאחר ש־
 $2(2, 3, 1) + 3(1, -1, 2) + (-1)(7, 3, 8) = (0, 0, 0)$.
- הרשימה $(2, 3, 1), (1, -1, 2), (7, 3, c)$ תלויה ליניארית ב־ F^3 אם־ורק־אם $c = 8$, כפי שעליכם לוודא.
- אם וקטור כלשהו ברשימת וקטורים ב־ V הוא צירוף ליניארי של הווקטורים האחרים, הרשימה תלויה ליניארית. (הוכחה: אחרי כתיבת וקטור אחד ברשימה כצירוף ליניארי של הווקטורים האחרים, העבירו את הווקטור אל האגף השני של המשוואה, תוך הכפלתו בסקלר -1 .)
- כל רשימת וקטורים ב־ V המכילה את וקטור האפס היא תלויה ליניארית. (זהו מקרה פרטי של הסעיף הקודם.)

הלִּפְמָה שלהלן היא כלי מצוין. היא קובעת כי בהינתן רשימת וקטורים תלויה ליניארית, אחד הווקטורים הוא בפריסה (span) של קודמיו. יתר על כן, נוכל להסיר וקטור זה מבלי לשנות את הפריסה של הרשימה המקורית.

2.19 לִפְמָה התלות הליניארית

נניח ש־ $v_1, \dots, v_m$ היא רשימה תלויה ליניארית ב־ V . אזי קיים $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ כך ש־

$$v_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_{k-1}).$$

יתר על כן, אם k מקיים את התנאי לעיל, אזי אחרי הסרת האיבר ה־ k^{th} מ־ $v_1, \dots, v_m$, פריסת הרשימה שנותרה שווה ל־ $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$.

הוכחה מאחר שהרשימה $v_1, \dots, v_m$ תלויה ליניארית, קיימים סקלרים $a_1, \dots, a_m \in F$ לא כולם אפסים, כך ש־

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0.$$

יהי k האינדקס הגדול ביותר ב־ $\{1, \dots, m\}$ כך ש־ $a_k \neq 0$. אזי

$$v_k = -\frac{a_1}{a_k} v_1 - \dots - \frac{a_{k-1}}{a_k} v_{k-1},$$

מה שמוכיח ש־ $v_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_{k-1})$, כפי שרצינו.

כעת, נניח ש- k הוא אינדקס כלשהו ב- $\{1, \dots, m\}$ כך ש- $v_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_{k-1})$. יהיו $b_1, \dots, b_{k-1} \in F$ כך ש-

$$v_k = b_1 v_1 + \dots + b_{k-1} v_{k-1}. \quad 2.20$$

נניח ש- $u \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$. כלומר, קיימים סקלרים $c_1, \dots, c_m \in F$ כך ש-

$$u = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m.$$

במשוואה לעיל נוכל להחליף את v_k בביטוי באגף הימני של 2.20, כלומר u הוא בפריסה של הרשימה, גם אחרי שהסרנו את האיבר ה- k^{th} מ- $v_1, \dots, v_m$. לפיכך הסרת האיבר ה- k^{th} מהרשימה $v_1, \dots, v_m$ אינה משפיעה על פריסתה. ■

אם $k = 1$ בלמה לעיל, אז המשמעות של $v_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_{k-1})$ היא ש- $v_1 = 0$ מאחר ש- $\text{span}(\emptyset) = \{0\}$. נציין כי חלקים בהוכחה ידרשו שינויים אם $k = 1$. באופן כללי, בהוכחות בספר לא נסב את תשומת לבכם למקרים מיוחדים שעלינו לקחת בחשבון אם הם קשורים לרשימות באורך 0, לתת-מרחב $\{0\}$, או למקרים טריוויאליים אחרים שעבורם התוצאה עדיין נכונה, אך דורשים הוכחה שונה מעט. ודאו כי אתם בודקים מקרים מיוחדים אלו בעצמכם.

2.21 דוגמה: ה- k הקטן ביותר בלגמת התלות הליניארית

נתבונן ברשימה

$$(1, 2, 3), (6, 5, 4), (15, 16, 17), (8, 9, 7)$$

ב- $\mathbb{R}^3$. רשימה זו בת ארבעה וקטורים היא תלויה ליניארית, כפי שנראה. לפיכך, לפי הלמה שזה עתה הכרנו, קיים $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ כך שהווקטור ה- k^{th} ברשימה הוא צירוף ליניארי של קודמיו. הבה נראה כיצד נמצא את הערך הקטן ביותר עבור k זה.

עבור $k = 1$ נקבל תוצאה נכונה אם-ורק-אם הווקטור הראשון ברשימה הוא 0. מאחר ש- $(1, 2, 3)$ אינו וקטור האפס, נפסלת האפשרות כי $k = 1$.

עבור $k = 2$ נקבל תוצאה נכונה אם-ורק-אם הווקטור השני ברשימה הוא כפולת סקלר של הווקטור הראשון. מאחר שאין בנמצא $c \in \mathbb{R}$ כך ש- $(6, 5, 4) = c(1, 2, 3)$, לפיכך נפסלת האפשרות כי $k = 2$.

עבור $k = 3$ נקבל תוצאה נכונה אם-ורק-אם הווקטור השלישי ברשימה הוא צירוף ליניארי של שני הווקטורים הראשונים. לפיכך עבור הרשימה בדוגמה זו, אנו רוצים לברר האם קיימים $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$(15, 16, 17) = a(1, 2, 3) + b(6, 5, 4).$$

משוואה זו שקולה למערכת של שלוש משוואות ליניאריות בשני נעלמים a, b . תוך שימוש בשיטת החילוף של גאוס או בתוכנה מתאימה, נגלה כי $a = 3$, $b = 2$ הם פתרון למשוואה לעיל, כפי שתוכלו לוודא. לפיכך עבור דוגמה זו, $k = 3$ הוא הערך הקטן ביותר שאיתו נוכל להפעיל את הלמה.

כעת אנו מגיעים למסקנה מרכזית. במסקנה נקבע כי לא קיימת רשימה בלתי תלויה ליניארית ב־ V שמספר איבריה גדול מזה של רשימה הפורסת את V .

2.22 מספר הווקטורים ברשימה בלתי תלויה ליניארית $\geq$ מזה של רשימה פורסת

במרחב וקטורי מממד סופי, מספר הווקטורים בכל רשימה בלתי תלויה ליניארית הוא קטן או שווה לזה של כל רשימה פורסת.

הוכחה נניח ש־ $u_1, \dots, u_m$ בלתי תלויה ליניארית ב־ V . בנוסף, נניח ש־ $w_1, \dots, w_n$ פורסת את V . עלינו להוכיח ש־ $m \leq n$. נעשה זאת באמצעות תהליך בן m שלבים המפורט להלן; שימו לב, כי בכל שלב אנו מוסיפים את אחד ה־ w ים וכנגדו מסירים את אחד ה־ w ים.

שלב 1

תהי B הרשימה $w_1, \dots, w_n$ הפורסת את V . צירוף u_1 כאיבר הראשון ברשימה ייצור רשימה תלויה ליניארית (מאחר ש־ u_1 יכול להיכתב כצירוף ליניארי של $w_1, \dots, w_n$). במילים אחרות, הרשימה

$$u_1, w_1, \dots, w_n$$

תלויה ליניארית.

לפיכך לפי לֵמַת התלות הליניארית (2.19), אחד הווקטורים ברשימה הוא צירוף ליניארי של קודמיו. ידוע לנו ש־ $u_1 \neq 0$ שכן הרשימה $u_1, \dots, u_m$ היא בלתי תלויה ליניארית. לפיכך, u_1 אינו בפריסה של קודמיו (מאחר ש־ u_1 אינו בפריסה של $\{0\}$, שהיא הפריסה של הרשימה הריקה). לכן מהלמה נובע, כי נוכל להסיר את אחד ה־ w ים כך שהרשימה החדשה B (בת n איברים) המורכבת מ־ u_1 ושאר ה־ w ים הנתורים פורסת את V .

שלב k , עבור $k = 2, \dots, m$

הרשימה B (עם n איברים) משלב $k - 1$ פורסת את V . בפרט הווקטור u_k הוא בפריסה של הרשימה B . לפיכך הרשימה בת $(n + 1)$ איברים שהושגה באמצעות הוספת הווקטור u_k ל־ B , שאותו הצבנו מייד אחרי $u_1, \dots, u_{k-1}$, תלויה ליניארית. לכן, לפי לֵמַת התלות הליניארית (2.19), אחד הווקטורים ברשימה הוא צירוף ליניארי של קודמיו. מאחר ש־ $u_1, \dots, u_k$ בלתי תלויה ליניארית, וקטור זה אינו יכול להיות אחד ה־ w ים.

לכן בהכרח נותר לפחות w אחד בשלב זה. מהרשימה החדשה שבידינו (אחרי שצירפנו u_k למקום הנכון) נוכל להסיר w שהוא צירוף ליניארי של הווקטורים המופיעים לפניו ברשימה, כך שהרשימה החדשה B (שאורכה n) המורכבת מ־ $u_1, \dots, u_k$ וה־ w ים הנתורים פורסת את V .

אחרי m שלבים, הוספנו את כל ה־ w ים והתהליך נעצר. בכל שלב שבו הוספנו u ל־ B , לפי הלמה הסרנו מהרשימה w כנגדו. לפיכך מספר ה־ w ים הוא לפחות כמספר ה־ w ים.

שתי הדוגמאות הבאות מראות כיצד מהמסקנה האחרונה נוכל לקבוע, ללא פעולות חישוב, כי רשימות מסוימות אינן בלתי תלויות ליניארית, וכי רשימות מסוימות אינן פורסות מרחב וקטורי נתון.

2.23 דוגמה: ב- $\mathbb{R}^3$ אין רשימה בלתי תלויה ליניארית בת 4 איברים

הרשימה $(0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 0), (1, 0, 0)$, שאורכה שלושה איברים, פורסת את $\mathbb{R}^3$. לפיכך אין רשימה בלתי תלויה ליניארית שאורכה גדול מ-3 ב- $\mathbb{R}^3$. לדוגמה, אנו יודעים כי $(-3, 2, 8), (9, 6, 7), (4, 5, 8), (1, 2, 3)$, שהיא רשימה בת ארבעה איברים, אינה בלתי תלויה ליניארית ב- $\mathbb{R}^3$.

2.24 דוגמה: אין רשימה בת 3 איברים הפורסת את $\mathbb{R}^4$

הרשימה $(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)$, באורך ארבע, היא בלתי תלויה ליניארית ב- $\mathbb{R}^4$. לפיכך אין רשימה שאורכה קטן מארבעה הפורסת את $\mathbb{R}^4$. לדוגמה, אנו יודעים כי $(-1, 9, 6, 7), (3, 4, 5, 8), (-5, 1, 2, 3)$, רשימה באורך שלוש, אינה פורסת את $\mathbb{R}^4$.

באופן אינטואיטיבי, אנו מבינים כי כל תת-מרחב של מרחב מממד סופי יהיה אף הוא מממד סופי. כעת נוכיח את נכונות הטענה.

2.25 תת-מרחב מממד סופי

כל תת-מרחב של מרחב וקטורי מממד סופי הוא מממד סופי.

הוכחה נניח ש- V מרחב וקטורי מממד סופי, ו- U תת-מרחב של V . עלינו להוכיח כי U מממד סופי. נעשה זאת בתהליך רב-שלבי.

שלב 1

אם $U = \{0\}$ אזי U מממד סופי, ובזאת הסתיימה ההוכחה. אם $U \neq \{0\}$, נבחר וקטור שונה מאפס $u_1 \in U$.

שלב k

אם $U = \text{span}(u_1, \dots, u_{k-1})$, אזי U מממד סופי, ובזאת הסתיימה ההוכחה. אם $U \neq \text{span}(u_1, \dots, u_{k-1})$, נבחר וקטור $u_k \in U$ כך ש- $u_k \notin \text{span}(u_1, \dots, u_{k-1})$.

בסיום כל שלב, כל עוד התהליך נמשך, הרכבנו רשימה של וקטורים כך שאף וקטור ברשימה אינו בפריסה של הווקטורים שקדמו לו. לפיכך, אחרי כל שלב יצרנו רשימה בלתי תלויה ליניארית, לפי לֵמַת התלות הליניארית (2.19). אורך רשימה זו אינו יכול להיות גדול מזה של רשימה הפורסת את V (לפי 2.22). לפיכך התהליך יסתיים בסופו של דבר, ומשמעות הדבר היא כי U מממד סופי.

1 מצאו רשימה של ארבעה וקטורים שונים ב- F^3 שפריסתם שווה ל-
 $\{(x, y, z) \in F^3 : x + y + z = 0\}$.

2 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם v_1, v_2, v_3, v_4 פורסת את V , אזי
 $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$
 גם היא פורסת את V .

3 נניח ש- $v_1, \dots, v_m$ רשימת וקטורים ב- V . עבור $k \in \{1, \dots, m\}$, יהי
 $w_k = v_1 + \dots + v_k$.
 הראו ש- $\text{span}(v_1, \dots, v_m) = \text{span}(w_1, \dots, w_m)$.

4 א. הראו כי במרחב וקטורי, רשימה בת וקטור יחיד היא בלתי תלויה ליניארית
 אם-ורק-אם הווקטור הזה אינו 0.

ב. הראו כי במרחב וקטורי, רשימה בת שני וקטורים היא בלתי תלויה ליניארית
 אם-ורק-אם אף אחד מהווקטורים אינו כפולת סקלר של האחר.

5 מצאו מספר t כך ש-
 $(3, 1, 4), (2, -3, 5), (5, 9, t)$
 אינה בלתי תלויה ליניארית ב- R^3 .

6 הראו כי הרשימה $(2, 3, 1), (1, -1, 2), (7, 3, c)$ תלויה ליניארית ב- F^3
 אם-ורק-אם $c = 8$.

7 א. הראו שאם אנו חושבים על C כעל מרחב וקטורי מעל R , אזי הרשימה
 $1 + i, 1 - i$ בלתי תלויה ליניארית.

ב. הראו שאם אנו חושבים על C כמרחב וקטורי מעל C , אזי הרשימה
 $1 + i, 1 - i$ תלויה ליניארית.

8 נניח ש- v_1, v_2, v_3, v_4 בלתי תלויה ליניארית ב- V . הוכיחו כי הרשימה
 $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$
 גם היא בלתי תלויה ליניארית.

9 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם $v_1, v_2, \dots, v_m$ רשימת וקטורים בלתי תלויה
 ליניארית ב- V , אזי
 $5v_1 - 4v_2, v_2, v_3, \dots, v_m$
 בלתי תלויה ליניארית.

10 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם $v_1, v_2, \dots, v_m$ רשימת וקטורים בלתי תלויה ליניארית ב- V וגם $\lambda \in F$ כאשר $\lambda \neq 0$, אזי $\lambda v_1, \lambda v_2, \dots, \lambda v_m$ בלתי תלויה ליניארית.

11 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם $v_1, \dots, v_m$ וגם $w_1, \dots, w_m$ רשימות וקטורים בלתי תלויות ליניארית ב- V , אזי הרשימה $v_1 + w_1, \dots, v_m + w_m$ בלתי תלויה ליניארית.

12 נניח ש- $v_1, \dots, v_m$ בלתי תלויה ליניארית ב- V ו- $w \in V$. הוכיחו כי אם $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ אזי $v_1 + w, \dots, v_m + w$ בלתי תלויה ליניארית.

13 נניח ש- $v_1, \dots, v_m$ בלתי תלויה ליניארית ב- V ו- $w \in V$. הראו כי $v_1, \dots, v_m, w$ בלתי תלויה ליניארית אם ורק אם $w \notin \text{span}(v_1, \dots, v_m)$.

14 נניח ש- $v_1, \dots, v_m$ רשימת וקטורים ב- V . עבור $k \in \{1, \dots, m\}$, יהי $w_k = v_1 + \dots + v_k$.

הראו שהרשימה $v_1, \dots, v_m$ בלתי תלויה ליניארית אם ורק אם $w_1, \dots, w_m$ בלתי תלויה ליניארית.

15 הסבירו מדוע לא קיימת רשימה בלתי תלויה ליניארית של שישה פולינומים ב- $\mathcal{P}_4(F)$.

16 הסבירו מדוע אין רשימה בת ארבעה פולינומים הפורסת את $\mathcal{P}_4(F)$.

17 הוכיחו כי V הוא מממד אינסופי אם ורק אם קיימת סדרת וקטורים $v_1, v_2, \dots$ ב- V כך ש- $v_1, \dots, v_m$ בלתי תלויה ליניארית לכל m שלם חיובי.

18 הוכיחו כי F^∞ הוא מממד אינסופי.

19 הוכיחו כי המרחב הווקטורי הממשי של כל הפונקציות הרציפות הממשיות מעל הקטע $[0, 1]$ הוא מממד אינסופי.

20 נניח ש- $p_0, p_1, \dots, p_m$ פולינומים ב- $\mathcal{P}_m(F)$ כך ש- $p_k(2) = 0$ עבור כל $k \in \{0, \dots, m\}$. הוכיחו כי $p_0, p_1, \dots, p_m$ אינה בלתי תלויה ליניארית ב- $\mathcal{P}_m(F)$.

2ב בסיסים

ביחידה הקודמת עסקנו ברשימות בלתי תלויות ליניאריות, וברשימות פורסות. כעת נאחד שני רעיונות אלו כשנדון ברשימות המקיימות את שתי התכונות יחד.

2.26 הגדרה: בסיס

בסיס של V הוא רשימת וקטורים בלתי תלויה ליניארית ב- V הפורסת את V .

2.27 דוגמה: בסיסים

א. הרשימה $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ היא בסיס של F^n , ונקראת הבסיס הסטנדרטי של F^n .

ב. הרשימה $(1, 2), (3, 5)$ היא בסיס של F^2 . שימו לב כי לרשימה שני איברים, וזהו גם אורכו של הבסיס הסטנדרטי של F^2 . ביחידה הבאה נראה שאין מדובר בצירוף מקרים.

ג. הרשימה $(1, 2, -4), (7, -5, 6)$ בלתי תלויה ליניארית ב- F^3 אך אינה בסיס של F^3 , מאחר שאינה פורסת את F^3 .

ד. הרשימה $(1, 2), (3, 5), (4, 13)$ פורסת את F^2 אך אינה בסיס של F^2 , מאחר שהיא תלויה ליניארית.

ה. הרשימה $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$ היא בסיס של $\{(x, x, y) \in F^3 : x, y \in F\}$.

ו. הרשימה $(1, -1, 0), (1, 0, -1)$ היא בסיס של $\{(x, y, z) \in F^3 : x + y + z = 0\}$.

ז. הרשימה $1, z, \dots, z^m$ היא בסיס של $\mathcal{P}_m(F)$, ונקראת הבסיס הסטנדרטי של $\mathcal{P}_m(F)$.

בנוסף לבסיס הסטנדרטי, יש ל- F^n בסיסים רבים אחרים. לדוגמה,

$(1, 2), (3, 5)$ וגם $(-4, 9), (7, 5)$

שניהם בסיסים של F^2 .

המסקנה הבאה תסייע להבין מדוע בסיסים כה שימושיים. נזכיר ש-"באופן יחיד" משמעותו "אפשרות אחת בלבד".

2.28 תבחין לבסיס

הרשימה $v_1, \dots, v_n$ של וקטורים ב- V היא בסיס של V אם ורק אם כל $v \in V$ יכול להיכתב באופן יחיד בצורה הבאה

2.29

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n,$$

כאשר $a_1, \dots, a_n \in F$.

הוכחה זו היא בעצם חזרה על הרעיונות שהובילו אותנו להגדרת אי-תלות ליניארית.

הוכחה ראשית נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V . יהי $v \in V$. מאחר ש- $v_1, \dots, v_n$ פורסת את V , קיימים $a_1, \dots, a_n \in F$ כך ש- 2.29 מתקיימת. כדי להראות שהייצוג ב- 2.29 יחיד, נניח ש- $c_1, \dots, c_n$ סקלרים כך ש-

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n.$$

בחיסור המשוואה האחרונה מ- 2.29 , נקבל

$$0 = (a_1 - c_1)v_1 + \dots + (a_n - c_n)v_n.$$

שוויון זה מוביל למסקנה כי כל $a_k - c_k$ שווה 0 (מאחר ש- $v_1, \dots, v_n$ בלתי תלויה ליניארית). לכן $a_1 = c_1, \dots, a_n = c_n$. בכך קיבלנו את היחידות הרצויה, והשלמנו את ההוכחה בכיוון אחד.

להוכחת הכיוון השני, נניח שכל $v \in V$ יכול להיכתב באופן יחיד בצורה המוצגת ב- 2.29 . כלומר, הרשימה $v_1, \dots, v_n$ פורסת את V . כדי להראות ש- $v_1, \dots, v_n$ בלתי תלויה ליניארית, נניח שהסקלרים $a_1, \dots, a_n \in F$ מקיימים

$$0 = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

יחידות הייצוג ב- 2.29 (בהצבת $v = 0$) מורה לנו כעת ש- $a_1 = \dots = a_n = 0$. לפיכך, $v_1, \dots, v_n$ היא בלתי תלויה ליניארית, ולכן היא בסיס של V . ■

רשימה פורסת במרחב וקטורי עשויה שלא להיות בסיס מכיוון שהיא תלויה ליניארית. במסקנה הבאה נטען כי עבור כל רשימה פורסת, נוכל להסיר חלק מאיבריה (ואולי אף לא אחד) כך שנקבל רשימה בלתי תלויה ליניארית שעדיין פורסת את המרחב הווקטורי.

לדוגמה, במרחב הווקטורי F^2 , אם התהליך בהוכחה להלן יופעל על הרשימה $(1, 2), (3, 6), (4, 7), (5, 9)$, הווקטורים השני והרביעי יוסרו. הווקטורים $(1, 2), (4, 7)$ נותרו ברשימה, וכעת היא בסיס של F^2 .

2.30 כל רשימה פורסת מכילה בסיס

כל רשימה פורסת במרחב וקטורי ניתנת לצמצום לכדי בסיס של המרחב.

הוכחה נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ פורסת את V . נרצה להסיר מספר וקטורים מ- $v_1, \dots, v_n$ כך שהווקטורים הנותרים מהווים בסיס של V . נעשה זאת באמצעות התהליך הרב-שלבי המתואר להלן.

ראשית נגדיר את B כרשימה $v_1, \dots, v_n$.

שלב 1

אם $v_1 = 0$, נסיר את v_1 מ- B . אם $v_1 \neq 0$, נשאיר את B ללא שינוי.

שלב k

אם $v_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_{k-1})$, נסיר אותו מ- B . אם v_k אינו ב- $\text{span}(v_1, \dots, v_{k-1})$, נשאיר את B ללא שינוי.

את התהליך נעצור אחרי שלב n , כשבידינו הרשימה B . רשימה זו B – פורסת את V , מאחר שהרשימה המקורית שלנו פרסה את V , ואנו הסרנו רק את הווקטורים שכבר היו בפריסה של הווקטורים שקדמו להם. התהליך הבטיח שאין ברשימה B וקטורים שהם בפריסה של קודמיהם, ולפיכך B בלתי תלויה ליניארית, לפי למת התלות הליניארית (2.19). לכן B בסיס של V .

כעת נגיע למסקנה חשובה הנגזרת מהמסקנה הקודמת.

2.31 בסיס של מרחב וקטורי מממד סופי

לכל מרחב וקטורי מממד סופי יש בסיס.

הוכחה לפי הגדרה, למרחב וקטורי מממד סופי יש רשימה פורסת. המסקנה הקודמת מלמדת אותנו שניתן לצמצם כל רשימה פורסת לכדי בסיס.

המסקנה הבאה היא במובן מסוים תמונת ראי של 2.30, שבה נקבע שניתן לצמצם כל רשימה פורסת לכדי בסיס. כעת נראה שכל רשימה בלתי תלויה ליניארית ניתנת להשלמה באמצעות הוספת וקטורים (כולל האפשרות שלא יתווספו וקטורים כלל) כך שנקבל רשימה מורחבת הפורסת את המרחב, אך עדיין בלתי תלויה ליניארית.

2.32 כל רשימה בלתי תלויה ליניארית ניתנת להשלמה לכדי בסיס

כל רשימת וקטורים בלתי תלויה ליניארית במרחב וקטורי מממד סופי ניתנת להשלמה לבסיס של המרחב הווקטורי.

הוכחה נניח ש- $u_1, \dots, u_m$ רשימה בלתי תלויה ליניארית במרחב וקטורי מממד סופי V . תהי $w_1, \dots, w_n$ רשימת וקטורים הפורסת את V . לפיכך, הרשימה

$$u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$$

פורסת את V . הפעלת התהליך שפירטנו בהוכחה 2.30 לצמצום הרשימה לבסיס של V תניב בסיס המורכב מה- u ים בתוספת חלק מה- w ים (את וקטורי u -ים לא נמחק הפעם שכן הרשימה $u_1, \dots, u_m$ בלתי תלויה ליניארית).

כדוגמה ב- F^3 , נניח שאנו מתחילים את התהליך עם הרשימה הבלתי תלויה ליניארית $(2, 3, 4), (9, 6, 8)$. אם נגדיר את w_1, w_2, w_3 כבסיס הסטנדרטי של F^3 , נוכל ליישם את התהליך שתואר בהוכחה ולקבל כתוצאה את הרשימה

$$(2, 3, 4), (9, 6, 8), (0, 1, 0),$$

שהיא בסיס של F^3 .

בעזרת אותם רעיונות וכלים מתקדמים יותר, ניתן להוכיח את המסקנה הבאה גם ללא ההנחה ש- V מממד סופי.

כיישום של המסקנה הקודמת, נראה כי כל תת-מרחב של מרחב וקטורי מממד סופי יכול להצטרף לתת-מרחב נוסף וליצור יחד איתו סכום ישר השווה למרחב כולו.

2.33 כל תת-מרחב של V הוא חלק מסכום ישר השווה ל- V

נניח ש- V הוא מרחב מממד סופי, ו- U תת-מרחב של V . אזי קיים תת-מרחב W של V כך ש- $V = U \oplus W$.

הוכחה מאחר ש- V הוא מממד סופי, כך גם U (ראו 2.25). לפיכך, קיים בסיס של $u_1, \dots, u_m$ של U (לפי 2.31). כמוכך ש- $u_1, \dots, u_m$ רשימה בלתי תלויה ליניארית של וקטורים ב- V . לכן נוכל להרחיב רשימה זו לבסיס $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$ של V (לפי 2.32). נגדיר $W = \text{span}(w_1, \dots, w_n)$.

כדי להוכיח כי $V = U \oplus W$, לפי 1.46 נצטרך רק להראות ש-

$$V = U + W \quad \text{וגם} \quad U \cap W = \{0\}.$$

להוכחת המשוואה הראשונה, נניח ש- $v \in V$. מאחר שהרשימה $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$ פורסת את V , קיימים סקלרים $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in F$ כך ש-

$$v = \underbrace{a_1 u_1 + \dots + a_m u_m}_u + \underbrace{b_1 w_1 + \dots + b_n w_n}_w.$$

קיבלנו אפוא $v = u + w$, כאשר $u \in U$ ו- $w \in W$ כפי שהוגדרו. לפיכך $v \in U + W$, ובכך השלמנו את ההוכחה ש- $V = U + W$.

להוכחת המשוואה השנייה, $U \cap W = \{0\}$, נניח ש- $v \in U \cap W$. אזי קיימים סקלרים $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in F$ כך ש-

$$v = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m = b_1 w_1 + \dots + b_n w_n.$$

לפיכך נוכל לסדר מחדש את המשוואה כך

$$a_1 u_1 + \dots + a_m u_m - b_1 w_1 - \dots - b_n w_n = 0.$$

ומאחר ש- $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$ בלתי תלויה ליניארית, נוכל לקבוע כי

$$a_1 = \dots = a_m = b_1 = \dots = b_n = 0.$$

לפיכך $v = 0$, ובכך השלמנו את ההוכחה ש- $U \cap W = \{0\}$.

תרגילים 23

1 מצאו את כל המרחבים הווקטוריים שיש להם בסיס אחד בלבד.

2 ודאו את כל הקביעות בדוגמה 2.27.

3 א. יהי U התת-מרחב של $\mathbb{R}^5$ המוגדר על ידי $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 3x_2 \text{ and } x_3 = 7x_4\}$.

מצאו בסיס של U .

ב. השלימו את הבסיס ב- (א) לבסיס של $\mathbb{R}^5$.

ג. מצאו תת-מרחב W של $\mathbb{R}^5$ כך ש- $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.

4 א. יהי U התת-מרחב של C^5 המוגדר על ידי

$$U = \{(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in C^5 : 6z_1 = z_2 \text{ and } z_3 + 2z_4 + 3z_5 = 0\}.$$

מצאו בסיס של U .

ב. השלימו את הבסיס ב- (א) לבסיס של C^5 .
ג. מצאו תת-מרחב W של C^5 כך ש- $C^5 = U \oplus W$.

5 נניח ש- V הוא מרחב מממד סופי ו- U, W תתי-מרחב של V כך ש- $V = U + W$. הוכיחו כי קיים בסיס של V המורכב מווקטורים ב- $U \cup W$.

6 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם p_0, p_1, p_2, p_3 רשימה ב- $\mathcal{P}_3(F)$ כך שאף אחד מהפולינומים p_0, p_1, p_2, p_3 אינו ממעלה 2, אזי p_0, p_1, p_2, p_3 אינה בסיס של $\mathcal{P}_3(F)$.

7 נניח ש- v_1, v_2, v_3, v_4 בסיס של V . הוכיחו כי
 $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4$
גם היא בסיס של V .

8 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם v_1, v_2, v_3, v_4 בסיס של V ו- U תת-מרחב של V כך ש- $v_1, v_2 \in U$ ו- $v_3 \notin U$ ו- $v_4 \notin U$ אזי v_1, v_2 בסיס של U .

9 נניח ש- $v_1, \dots, v_m$ רשימת וקטורים ב- V . עבור $k \in \{1, \dots, m\}$ יהי
 $w_k = v_1 + \dots + v_k$.

הראו ש- $v_1, \dots, v_m$ בסיס של V אם ורק אם $w_1, \dots, w_m$ בסיס של V .

10 נניח ש- U ו- W תתי-מרחב של V כך ש- $V = U \oplus W$. נניח בנוסף ש- $u_1, \dots, u_m$ בסיס של U ו- $w_1, \dots, w_n$ בסיס של W . הוכיחו כי
 $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n$
בסיס של V .

11 נניח ש- V מרחב וקטורי ממשי. הראו כי אם $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V (כמרחב וקטורי ממשי), אזי $v_1, \dots, v_n$ היא גם בסיס של המירכוב V_C (כמרחב וקטורי מרוכב).

ראו תרגיל 8 ביחידה 2 להגדרת הפירכוב V_C .

3.3 ממד

אף שעד כה עסקנו במרחבים וקטוריים מממד סופי, עדיין לא הגדרנו את הממד של אובייקט מסוג זה. באיזה אופן נגדיר את ממד המרחב? ההיגיון מורה שממד המרחב F^n יהיה n . נשים לב כי בבסיס הסטנדרטי

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$$

של F^n יש n איברים. לפיכך הנטייה הטבעית היא להגדיר את הממד כאורך הבסיס. אולם, למרחב וקטורי מממד סופי יש בסיסים רבים ושונים, ולכן ניסיון הגדרת הממד בהתאם למספר האיברים בבסיס יהיה תקף רק אם לכל הבסיסים אותו מספר איברים. למרבה המזל זה אכן המצב, כפי שנראה כעת.

2.34 מספר האיברים בבסיס אינו תלוי בבסיס

לכל שני בסיסים של מרחב וקטורי מממד סופי אותו אורך.

הוכחה נניח ש- V מממד סופי. יהיו B_1 ו- B_2 שני בסיסים של V . אזי, B_1 הוא בלתי תלוי ליניארית ב- V ו- B_2 פורס את V , ולכן אורכו של B_1 הוא לכל היותר כאורכו של B_2 (לפי 2.22). בחילוף תפקידים בין B_1 ל- B_2 , נקבל שגם אורכו של B_2 הוא לכל היותר כאורכו של B_1 . לפיכך אורכו של B_1 שווה לאורכו של B_2 , כפי שרצינו. ■

כעת משאנו יודעים כי לכל שני בסיסים של מרחב וקטורי מממד סופי אותו אורך, נוכל להגדיר את ממד של מרחבים אלו באופן רשמי.

2.35 הגדרה: ממד, $\dim V$

- הממד של מרחב וקטורי מממד סופי הוא מספר האיברים של כל אחד מבסיסי המרחב.
- ממד מרחב וקטורי מממד סופי V מסומן ב- $\dim V$.

2.36 דוגמה: ממדים

- $\dim F^n = n$ מאחר שלבסיס הסטנדרטי של F^n יש n איברים.
- $\dim \mathcal{P}_m(F) = m + 1$ מאחר שלבסיס הסטנדרטי $1, z, \dots, z^m$ של $\mathcal{P}_m(F)$ יש $m + 1$ איברים.
- אם $U = \{(x, x, y) \in F^3 : x, y \in F\}$, אזי $\dim U = 2$ מאחר ש- $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$ בסיס של U .
- אם $U = \{(x, y, z) \in F^3 : x + y + z = 0\}$, אזי $\dim U = 2$ מאחר שהרשימה $(1, -1, 0), (1, 0, -1)$ בסיס של U .

כל תת-מרחב של מרחב וקטורי מממד סופי הוא מממד סופי (לפי 2.25) ולפיכך יש לו ממד. המסקנה הבאה מספקת את האי-שוויון הצפוי בנוגע לממד תת-המרחב.

2.37 מעד תת-מרחב

אם V מממד סופי, ו- U תת-מרחב של V , אזי $\dim U \leq \dim V$.

הוכחה נניח ש- V מרחב מממד סופי ו- U תת-מרחב של V . נתייחס לבסיס של U כרשימת וקטורים בלתי תלויה ליניארית ב- V , ונתייחס לבסיס של V כרשימה פורסת ב- V . כעת נשתמש ב- 2.22 להסיק כי $\dim U \leq \dim V$.

המרחב הווקטורי הממשי $\mathbb{R}^2$ הוא דו-ממדי, והמרחב הווקטורי המרוכב $\mathbb{C}$ הוא חד-ממדי. כקבוצות, ניתן לזהות את $\mathbb{R}^2$ עם $\mathbb{C}$ (ופעולת החיבור זהה, כמו גם פעולת הכפל בסקלרים ממשיים). לפיכך כאשר אנו עוסקים בממד מרחב וקטורי, לבחירת ה- F תפקיד לא מבוטל.

כדי לוודא שרשימת וקטורים ב- V היא בסיס של V , עלינו, לפי ההגדרה, להראות שהרשימה מקיימת שני תנאים: היא בלתי תלויה ליניארית והיא פורסת את V . שתי המסקנות הבאות יראו לנו כי אם אורכה של רשימה תואם את ממד המרחב, מספיק שנוודא תנאי אחד מהשניים. נוכיח תחילה שכל רשימה בלתי תלויה ליניארית עם מספר האיברים הנדרש היא בסיס.

2.38 רשימה בלתי תלויה ליניארית באורך מתאים היא בסיס

נניח ש- V מרחב מממד סופי. אזי כל רשימת וקטורים בלתי תלויה ליניארית ב- V שאורכה שווה ל- $\dim V$ היא בסיס של V .

הוכחה נניח ש- $\dim V = n$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בלתי תלויה ליניארית ב- V . את הרשימה $v_1, \dots, v_n$ נוכל להרחיב לבסיס של V (לפי 2.32). אולם, לכל בסיס של V יש n איברים, ולכן במקרה זה פעולת ההרחבה טריוויאלית, כלומר, לא נוסיף כלל איברים ל- $v_1, \dots, v_n$. לפיכך $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V כפי שרצינו להוכיח.

המסקנה הבאה היא תוצאה שימושית של המסקנה הקודמת.

2.39 תת-מרחב בממד מרבי שווה למרחב כולו

נניח ש- V מרחב מממד סופי ו- U הוא תת-מרחב של V כך ש- $\dim U = \dim V$. אזי $U = V$.

הוכחה יהי $u_1, \dots, u_n$ בסיס של U . לפיכך $n = \dim U$, ולפי ההנחה נתון גם ש- $n = \dim V$. לפיכך, $u_1, \dots, u_n$ רשימה בלתי תלויה ליניארית של וקטורים ב- V (שכן היא בסיס של U) ואורכה $\dim V$. לפי 2.38 נקבל ש- $u_1, \dots, u_n$ היא בסיס של V . בפרט, כל וקטור ב- V הוא צירוף ליניארי של $u_1, \dots, u_n$. לפיכך $U = V$.

2.40 דוגמה: בסיס של F^2

ניקח כדוגמה את רשימת הווקטורים $(5, 7), (4, 3)$ ב- F^2 . רשימה זו בת שני ווקטורים היא בלתי תלויה ליניארית ב- F^2 (שכן אף אחד מהווקטורים אינו כפולת סקלר של האחר). מאחר שממד F^2 הוא 2, לפיכך מ-2.38 נסיק שהרשימה הבלתי תלויה ליניארית, בת שני האיברים $(5, 7), (4, 3)$, היא בסיס של F^2 (ואין צורך לבדוק בנוסף שהיא גם פורסת את F^2).

2.41 דוגמה: בסיס של תת-מרחב של $\mathcal{P}_3(\mathbf{R})$

יהי U תת-מרחב של $\mathcal{P}_3(\mathbf{R})$ המוגדר על ידי

$$U = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbf{R}) : p'(5) = 0\}.$$

למציאת בסיס של U , נשים לב תחילה, שכל אחד מהפולינומים $(x-5)^2, 1, (x-5)^3$ ב- U .

נניח ש- $a, b, c \in \mathbb{R}$ וגם

$$a + b(x - 5)^2 + c(x - 5)^3 = 0$$

לכל $x \in \mathbf{R}$. מבלי שנפתח סוגריים באגף השמאלי של המשוואה, אנו רואים כי באגף השמאלי יש איבר של cx^3 . מאחר שבאגף הימני אין איבר עם x^3 , מכאן נובע ש- $c = 0$. מאחר ש- $c = 0$, האיבר היחיד עם x^2 באגף השמאלי הוא bx^2 , ומכאן ש- $b = 0$. מאחר ש- $b = c = 0$, נוכל להסיק שגם $a = 0$. לפיכך מהמשוואה אנו מסיקים ש- $a = b = c = 0$. לכן הרשימה $(x-5)^2, (x-5)^3, 1$ בלתי תלויה ליניארית ב- U . לפיכך $3 \leq \dim U$. לכן

$$3 \leq \dim U \leq \dim \mathcal{P}_3(\mathbf{R}) = 4,$$

כאשר השתמשנו ב- 2.37.

הפולינום x אינו ב- U מאחר שהנגזרת שלו היא הפונקציה הקבועה 1. לפיכך $U \neq \mathcal{P}_3(\mathbf{R})$. לכן $\dim U \neq 4$ (לפי 2.39). מהאי-שוויון לעיל אנו מסיקים ש- $\dim U = 3$. לפיכך, מאחר ואורך הרשימה הבלתי תלויה ליניארית $1, (x-5)^2, (x-5)^3$ ב- U הוא $\dim U$, היא בסיס של U (לפי 2.38).

כעת נוכיח שרשימה פורסת באורך מתאים היא בסיס.

2.42 רשימה פורסת באורך מתאים היא בסיס

נניח ש- V מרחב וקטורי מממד סופי. אזי, כל רשימת וקטורים ב- V הפורסת את V ואורכה $\dim V$ היא בסיס של V .

הוכחה נניח ש- $\dim V = n$ וגם $v_1, \dots, v_n$ פורסת את V . נוכל לצמצם את הרשימה $v_1, \dots, v_n$ לכדי בסיס של V (לפי 2.30). אולם בכל בסיס של V יש n איברים, כך שבמקרה זה הצמצום הוא טריוויאלי, כלומר לא נסיר אף וקטור מ- $v_1, \dots, v_n$. לפיכך, $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V , כפי שרצינו להוכיח. ■

המסקנה הבאה מספקת נוסחה לחישוב ממד הסכום של שני תתי-מרחב של מרחב וקטורי מממד סופי. נוסחה זו אנלוגית לנוסחת ספירה מוכרת: מספר האיברים באיחוד של שני קבוצות סופיות שווה למספר האיברים בקבוצה הראשונה, בתוספת מספר האיברים בקבוצה השנייה, ובחיסור מספר האיברים שבחיתוך שתי הקבוצות.

2.43 ממד של סכום

אם V_1 ו- V_2 תתי-מרחב של מרחב וקטורי מממד סופי, אזי

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

הוכחה יהי $v_1, \dots, v_m$ בסיס של $V_1 \cap V_2$; לפיכך, $\dim(V_1 \cap V_2) = m$. מאחר ש- $v_1, \dots, v_m$ בסיס של $V_1 \cap V_2$, הרשימה בלתי תלויה ליניארית ב- V_1 . לכן נרחיב את הרשימה לבסיס של V_1 (לפי 2.32) באופן הבא: $v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_j$. לפיכך $\dim V_1 = m + j$. בנוסף, נרחיב את $v_1, \dots, v_m$ לבסיס $v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_k$ של V_2 ; לפיכך $\dim V_2 = m + k$.
אנו נראה ש-

$$2.44 \quad v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_j, w_1, \dots, w_k$$

בסיס של $V_1 + V_2$. בכך תושלם ההוכחה, שכן אז נקבל

$$\begin{aligned} \dim(V_1 + V_2) &= m + j + k \\ &= (m + j) + (m + k) - m \\ &= \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2). \end{aligned}$$

הרשימה 2.44 מוכלת ב- $V_1 \cup V_2$ ולפיכך מוכלת גם ב- $V_1 + V_2$. הפריסה של הרשימה מכילה את V_1 ומכילה את V_2 ולכן שווה ל- $V_1 + V_2$. לפיכך כדי להראות ש-2.44 בסיס של $V_1 + V_2$ כל שעלינו להראות הוא שהיא בלתי תלויה ליניארית. כדי להוכיח ש-2.44 בלתי תלויה ליניארית, נניח ש-

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m + b_1 u_1 + \dots + b_j u_j + c_1 w_1 + \dots + c_k w_k = 0,$$

כאשר כל ה- a -ים, ה- b -ים, ו- c -ים סקלרים. עלינו להראות שכל ה- a -ים, ה- b -ים, ו- c -ים שווים 0. נשכתב את המשוואה באופן הבא:

$$2.45 \quad c_1 w_1 + \dots + c_k w_k = -a_1 v_1 - \dots - a_m v_m - b_1 u_1 - \dots - b_j u_j.$$

מה שמראה כי $c_1 w_1 + \dots + c_k w_k \in V_1$. מאחר שכל ה- w -ים ב- V_2 , נסיק ש- $c_1 w_1 + \dots + c_k w_k \in V_1 \cap V_2$. מאחר ש- $v_1, \dots, v_m$ בסיס של $V_1 \cap V_2$, נקבל

$$c_1 w_1 + \dots + c_k w_k = d_1 v_1 + \dots + d_m v_m$$

עבור $d_1, \dots, d_m$ סקלרים כלשהם. אולם מאחר ש- $v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_k$ בלתי תלויה ליניארית, מהמשוואה האחרונה נסיק כי כל ה- c -ים (וה- d -ים) שווים 0. לפיכך הופכת 2.45 למשוואה

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m + b_1 u_1 + \dots + b_j u_j = 0.$$

מאחר שהרשימה $v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_j$ בלתי תלויה ליניארית, נסיק כי כל ה- a -ים וה- b -ים שווים גם הם 0 ובזאת השלמנו את ההוכחה. ■

עבור S קבוצה סופית נסמן ב- $\#S$ את מספר איבריה של S . הטבלה להלן משווה קבוצות סופיות ומרחבים מממד סופי, מציגה את האנלוגיה בין $\#S$ (עבור קבוצות) ו- $\dim V$ (עבור מרחבים וקטוריים), וכן את האנלוגיה בין איחוד תתי-קבוצה (בהקשר של קבוצות) וסכום תתי-מרחב (בהקשר של מרחבים וקטוריים).

קבוצות	מרחבים וקטוריים
S קבוצה סופית	V מרחב וקטורי מממד סופי
$\#S$	$\dim V$
עבור תתי-קבוצה S_1, S_2 של S , האיחוד $S_1 \cup S_2$ הוא התת-קבוצה הקטנה ביותר של S המכילה את S_1 ו- S_2	עבור תתי-המרחב V_1, V_2 של V , הסכום $V_1 + V_2$ הוא התת-מרחב הקטן ביותר של V המכיל את V_1 ו- V_2
$\#(S_1 \cup S_2) = \#S_1 + \#S_2 - \#(S_1 \cap S_2)$	$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$
$\#(S_1 \cup S_2) = \#S_1 + \#S_2 \iff S_1 \cap S_2 = \emptyset$	$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 \iff V_1 \cap V_2 = \{0\}$
$\iff S_1 \cup \dots \cup S_m$ הוא איחוד זר $\#(S_1 \cup \dots \cup S_m) = \#S_1 + \dots + \#S_m$	$\iff V_1 + \dots + V_m$ הוא סכום ישר $\dim(V_1 + \dots + V_m) = \dim V_1 + \dots + \dim V_m$

השורה האחרונה בטבלה מתארת את האנלוגיה בין איחוד זר עבור קבוצות וסכום ישר עבור מרחבים וקטוריים. ההוכחה למסקנה שבשורה האחרונה בטבלה תובא ב-3.94.

תוכלו למצוא מסקנות על קבוצות, המותאמות באנלוגיה למסקנות על מרחבים וקטוריים המופיעות בתרגילים 12 עד 18.

תרגילים 33

- הראו שתתי-המרחב של $\mathbb{R}^2$ הם אך ורק $\{0\}$, כל הישרים ב- $\mathbb{R}^2$ העוברים דרך הראשית, ו- $\mathbb{R}^2$.
- הראו כי תתי-המרחב של $\mathbb{R}^3$ הם אך ורק $\{0\}$, כל הישרים ב- $\mathbb{R}^3$ העוברים דרך הראשית, כל המישורים ב- $\mathbb{R}^3$ העוברים דרך הראשית, ו- $\mathbb{R}^3$.
- א. יהי $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) : p(6) = 0\}$. מצאו בסיס של U .
ב. השלימו את הבסיס ב- (א) לבסיס של $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$.
ג. מצאו תת-מרחב W של $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ כך ש- $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = U \oplus W$.
- א. יהי $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) : p''(6) = 0\}$. מצאו בסיס של U .
ב. השלימו את הבסיס ב- (א) לבסיס של $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.
ג. מצאו תת-מרחב W של $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ כך ש- $\mathcal{P}_4(\mathbb{R}) = U \oplus W$.
- א. יהי $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) : p(2) = p(5)\}$. מצאו בסיס של U .
ב. השלימו את הבסיס ב- (א) לבסיס של $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$.
ג. מצאו תת-מרחב W של $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ כך ש- $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = U \oplus W$.

6 א. יהי $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) : p(2) = p(5) = p(6)\}$. מצאו בסיס של U .
 ב. השלימו את הבסיס ב- (א) לבסיס של $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$.

ג. מצאו תת-מרחב W של $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ כך ש- $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = U \oplus W$.

7 א. יהי $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) : \int_{-1}^1 p = 0\}$. מצאו בסיס של U .

ב. השלימו את הבסיס ב- (א) לבסיס של $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

ג. מצאו תת-מרחב W של $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ כך ש- $\mathcal{P}_4(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

8 נניח ש- $v_1, \dots, v_m$ בלתי תלויה ליניארית ב- V ו- $w \in V$. הוכיחו כי

$$\dim \text{span}(v_1 + w, \dots, v_m + w) \geq m - 1.$$

9 נניח ש- m מספר שלם חיובי, ו- $p_0, p_1, \dots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ כך שכל p_k הוא ממעלה k . הוכיחו כי $p_0, p_1, \dots, p_m$ בסיס של $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$.

10 נניח ש- m מספר שלם חיובי. עבור $0 \leq k \leq m$, יהי

$$p_k(x) = x^k(1-x)^{m-k}.$$

הראו ש- $p_0, \dots, p_m$ בסיס של $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$.

הבסיס בתרגיל זה מוביל למה שקרוי **פולינומי ברנשטיין**. תוכלו לחפש מידע על האופן שבו פולינומי ברנשטיין משמשים לקירוב פונקציות רציפות מעל $[0, 1]$.

11 נניח ש- U ו- W שניהם תת-מרחב מממד 4 של $\mathbb{C}^6$. הוכיחו כי קיימים שני וקטורים ב- $U \cap W$ כך שאף אחד מהווקטורים הללו אינו כפולת סקלר של האחר.

12 נניח ש- U ו- W תת-מרחב של $\mathbb{R}^8$ כך ש- $\dim U = 3$, $\dim W = 5$, ו- $U + W = \mathbb{R}^8$. הוכיחו כי $\mathbb{R}^8 = U \oplus W$.

13 נניח ש- U ו- W שניהם תת-מרחב מממד 5 של $\mathbb{R}^9$. הוכיחו כי $U \cap W \neq \{0\}$.

14 נניח ש- V הוא מרחב וקטורי מממד 10 ו- V_1, V_2, V_3 תת-מרחב של V , כאשר $\dim V_1 = \dim V_2 = \dim V_3 = 7$. הוכיחו כי $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \neq \{0\}$.

15 נניח ש- V מרחב וקטורי מממד סופי ו- V_1, V_2, V_3 תת-מרחב של V כאשר $\dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 > 2 \dim V$. הוכיחו כי $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \neq \{0\}$.

16 נניח ש- V מרחב וקטורי מממד סופי ו- U תת-מרחב של V כאשר $U \neq V$. נסמן $n = \dim V$ ו- $m = \dim U$. הוכיחו כי קיימים $n - m$ תת-מרחב של V , כל אחד מממד $n - 1$, והחיתוך שלהם שווה ל- U .

17 נניח ש- $V_1, \dots, V_m$ תת-מרחב מממד סופי של V . הוכיחו כי $V_1 + \dots + V_m$ הוא מממד סופי, וגם

$$\dim(V_1 + \dots + V_m) \leq \dim V_1 + \dots + \dim V_m.$$

אירשוויון זה הוא שוויון אס-ורק-אס $V_1 + \dots + V_m$ הוא סכום ישר, כפי שנראה

ב- 3.94.

18 נניח ש- V מרחב וקטורי מממד סופי, עם $\dim V = n \geq 1$. הוכיחו כי קיימים תתי-מרחב חד-ממדיים $V_1, \dots, V_n$ של V כך ש-

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n.$$

19 הסבירו מדוע ניתן לשער, בהשראת האנלוגיה לנוסחה למספר האיברים באיחוד של שלוש קבוצות סופיות, שאם V_1, V_2, V_3 הם תתי-מרחב של מרחב וקטורי מממד סופי, אזי

$$\begin{aligned} \dim(V_1 + V_2 + V_3) &= \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 \\ &\quad - \dim(V_1 \cap V_2) - \dim(V_1 \cap V_3) - \dim(V_2 \cap V_3) \\ &\quad + \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3). \end{aligned}$$

ואז הוכיחו את הנוסחה או הביאו דוגמה נגדית.

20 הוכיחו כי אם V_1, V_2 , ו- V_3 תתי-מרחב של מרחב וקטורי מממד סופי, אזי מתקיים

$$\begin{aligned} \dim(V_1 + V_2 + V_3) &= \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 \\ &\quad - \frac{\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \cap V_3) + \dim(V_2 \cap V_3)}{3} \\ &\quad - \frac{\dim((V_1 + V_2) \cap V_3) + \dim((V_1 + V_3) \cap V_2) + \dim((V_2 + V_3) \cap V_1)}{3}. \end{aligned}$$

ייתכן שהנוסחה לעיל נראית מוזרה מאחר שהאגף הימני אינו נראה כמספר שלם.

בִּאֲבָחָה אַחַת נִטְשָׁתִי אֶת עֶסוּקִי הַקּוֹדֵמִים,
 אֶל תְּהוֹם הַשְּׁלֶכֶתִי תוֹלְדֵת הַטֶּבַע וְצִאֲצִאִיו כְּבֹאוּשֵׁי נִפְלֹת עוֹיִיִּם,
 וּבְקֶרְבִּי, בּוֹז עֲמוֹק אֶל הַמִּתְחַזָּה לְמַדְע,
 אֲשֶׁר רָגְלוֹ לֹא דָרְכָה מַעוֹלָם עַל מִפְתָּן שַׁעְרֵי הַחֲכָמָה.
 חֲדוּר בְּתוֹדְעָה זֹאת,
 הַעֲתִקְתִּי עֲצָמִי אֶל מַעֲמָקֵי הַמִּתְמַטִּיקָה וְשִׁרְיָנָהּ,
 כִּי בְּסֻלַּע אֵיתָנִים חֲצוּבִים שָׂרָשִׁיהָ,
 וְעַד אֲבָק כּוֹכָבִים יִגְיעוּ חֲשׁוּבִיָּהּ.

—פֶּרֶנְסֶזֶן־שֵׁטֶיו, מְרִי ווֹלְסְטוֹנְקֶרֶאפֶט שֶׁלִּי

פרק ג

העתקות ליניאריות

עד כה תשומת הלב שלנו התמקדה במרחבים וקטוריים. איש אינו מתרגש ממרחבים וקטוריים. החלק המרתק באלגברה ליניארית הוא הנושא שאליו נפנה כעת—העתקות ליניאריות.

לעיתים קרובות נשתמש במשפט היסודי רב־העוצמה של ההעתקות הליניאריות, הקובע כי ממד התחום של העתקה ליניארית שווה לממד תת־המרחב הנשלח ל־0 בתוספת ממד הטווח. קביעה זו גוררת את המסקנה המפתיעה שהעתקה ליניארית ממרחב וקטורי מממד סופי לעצמו היא חד־חד־ערכית אם־רק־אם טווח ההעתקה הוא המרחב כולו.

אחד הרעיונות המרכזיים שנכיר בפרק זה הוא המטריצה המשויכת להעתקה ליניארית, לבסיס מרחב התחום ולבסיס מרחב היעד. התאמה זו בין העתקות ליניאריות ומטריצות מספקת תובנות רבות על היבטים מרכזיים באלגברה ליניארית. את פרק זה נחתום בהיכרות עם מכפלות ומנות של מרחבים וקטוריים, ומרחבים דואליים.

בפרק זה נזדקק למרחבים וקטוריים נוספים, שלהם נקרא U ו־ W בנוסף ל־ V . לפיכך הנחות המוצא שלנו הן כדלהלן.

הנחות המוצא לפרק זה

- F מסמן R או C .
- U, V ו־ W מסמנים מרחבים וקטוריים מעל F .



Stefan Schätler CC BY-SA

טירת דנקוורדרודה (Dankwarderode) מהמאה השתי־עשרה בבראונשווייג (Braunschweig), היכן שנולד וגדל קרל פרידריך גאוס (1777–1855). בשנת 1809 פרסם גאוס שיטה לפתרון מערכות משוואות. שיטה זו, הנקראת כיום שיטת החילוף של גאוס, הייתה בשימוש בספרים סיניים יותר מ־1600 שנה קודם לכן.

גו מרחב וקטורי של העתקות ליניאריות

הגדרה ודוגמאות של העתקות ליניאריות

ניגש כעת אל אחת מהגדרות המפתח באלגברה ליניארית.

3.1 הגדרה: העתקה ליניארית

העתקה ליניארית מ- V ל- W היא פונקציה $T: V \rightarrow W$ המקיימת את התכונות הבאות.

אדיטיביות

$$T(u + v) = Tu + Tv \quad \text{לכל } u, v \in V.$$

הומוגניות

$$T(\lambda v) = \lambda(Tv) \quad \text{לכל } \lambda \in F \text{ ולכל } v \in V.$$

יש מתמטיקאים המשתמשים במונח **טרנספורמציה ליניארית**, שמשמעותו זהה להעתקה ליניארית.

נשים לב כי עבור העתקות ליניאריות, לעיתים קרובות נשתמש בסימון Tv במקביל לשימוש ב- $T(v)$ המקובל לסימון פונקציות.

3.2 סימון: $\mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{L}(V)$

- קבוצת ההעתקות הליניאריות מ- V ל- W מסומנת על ידי $\mathcal{L}(V, W)$.
- קבוצת ההעתקות הליניאריות מ- V ל- V מסומנת על ידי $\mathcal{L}(V)$. כלומר, $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$.

כעת נראה מספר דוגמאות של העתקות ליניאריות. עליכם לוודא כי כל אחת מהפונקציות המוגדרות בדוגמה הבאה היא אכן העתקה ליניארית.

3.3 דוגמה: העתקות ליניאריות

העתקת האפס

בנוסף לשימושים האחרים, אנו מגדירים את 0 כסימון להעתקה הליניארית המעתיקה כל איבר במרחב וקטורי כלשהו אל איבר הזהות לחיבור של מרחב וקטורי אחר (או לאותו מרחב). ליתר דיוק, $0 \in \mathcal{L}(V, W)$ מוגדר על ידי $0v = 0$.

ה- 0 באגף השמאלי של המשוואה הוא פונקציה מ- V ל- W , בעוד ה- 0 באגף הימני הוא איבר הזהות לחיבור ב- W . כהרגלנו, הקֶשֶׁר אמור לאפשר לכם להבחין בין השימושים הרבים של הסימן 0 .

אופרטור הזהות

אופרטור הזהות, המסומן ב- I , הוא ההעתקה הליניארית על מרחב וקטורי כלשהו המעתיקה כל איבר לעצמו. ליתר דיוק $I \in \mathcal{L}(V)$ מוגדר על ידי $Iv = v$.

גזירה

נגדיר העתקה ליניארית $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbf{R}))$ על ידי

$$Dp = p'.$$

הקביעה כי פונקציה זו היא ליניארית היא דרך נוספת לנסח את אחת המסקנות הבסיסיות בנושא נגזרות: $(f+g)' = f' + g'$ ו- $(\lambda f)' = \lambda f'$ כאשר f, g גזירות ו- λ מספר קבוע.

אינטגרציה

נגדיר העתקה ליניארית $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbf{R}), \mathbf{R})$ על ידי

$$Tp = \int_0^1 p.$$

הקביעה כי פונקציה זו היא ליניארית היא דרך נוספת לנסח את אחת המסקנות הבסיסיות בנושא אינטגרלים: האינטגרל של סכום שתי פונקציות שווה לסכום האינטגרלים, והאינטגרל של מכפלת קבוע בפונקציה שווה למכפלת הקבוע באינטגרל של הפונקציה.

הכפלה ב- x^2

נגדיר העתקה ליניארית $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbf{R}))$ על ידי

$$(Tp)(x) = x^2 p(x)$$

לכל $x \in \mathbf{R}$.

הסטה לאחור

נזכיר ש- $\mathbf{F}^\infty$ מסמן את המרחב הווקטורי של כל הסדרות של איברי $\mathbf{F}$. נגדיר העתקה ליניארית $T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^\infty)$ על ידי

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

מ- $\mathbf{R}^3$ ל- $\mathbf{R}^2$

נגדיר העתקה ליניארית $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ על ידי

$$T(x, y, z) = (2x - y + 3z, 7x + 5y - 6z).$$

מ- $\mathbf{F}^n$ ל- $\mathbf{F}^m$

כהכללה של המקרה הקודם, יהיו m ו- n מספרים שלמים חיוביים, נגדיר את $A_{j,k} \in \mathbf{F}$ עבור כל $j = 1, \dots, m$ וכל $k = 1, \dots, n$, ואת ההעתקה הליניארית $T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^n, \mathbf{F}^m)$ על ידי

$$T(x_1, \dots, x_n) = (A_{1,1}x_1 + \dots + A_{1,n}x_n, \dots, A_{m,1}x_1 + \dots + A_{m,n}x_n).$$

למעשה כל העתקה ליניארית מ- $\mathbf{F}^n$ ל- $\mathbf{F}^m$ היא בתבנית זו.

הרכבה

נקבע פולינום $q \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$. נגדיר העתקה ליניארית $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbf{R}))$ על ידי

$$(Tp)(x) = p(q(x)).$$

במסקנה להלן, החלק העוסק בקיומה של ההעתקה מורה לנו כי לכל קבוצת ערכים שנבחר להתאים לווקטורי הבסיס, נמצא העתקה ליניארית מתאימה. החלק העוסק ביחידותה של ההעתקה מורה לנו כי העתקה ליניארית נקבעת לחלוטין על ידי הערכים שלה מעל הבסיס.

3.4 לִפְתֵּה הֶהֱתָקָה הַלִּינִיָּאֲרִית

נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V ו- $w_1, \dots, w_n \in W$. אזי קיימת העתקה ליניארית יחידה $T: V \rightarrow W$ כך ש-

$$Tv_k = w_k$$

לכל $k = 1, \dots, n$.

הוכחה ראשית נוכיח את קיומה של ההעתקה T עם התכונה הרצויה. נגדיר $T: V \rightarrow W$ על ידי

$$T(c_1v_1 + \dots + c_nv_n) = c_1w_1 + \dots + c_nw_n,$$

כאשר $c_1, \dots, c_n$ איברים כלשהם ב- F . הרשימה $v_1, \dots, v_n$ היא בסיס של V , ולפיכך המשוואה לעיל אכן מגדירה פונקציה T מ- V ל- W (מאחר שכל איבר של V יכול להיכתב באופן יחיד בצורה $c_1v_1 + \dots + c_nv_n$).

עבור כל k , נבחר $c_k = 1$ ו- $c_i = 0$ עבור שאר ה- c_i ים במשוואה לעיל ונקבל ש- $Tv_k = w_k$.

אם $u, v \in V$ כאשר $u = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ ו- $v = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$, אזי

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T((a_1+c_1)v_1 + \dots + (a_n+c_n)v_n) \\ &= (a_1+c_1)w_1 + \dots + (a_n+c_n)w_n \\ &= (a_1w_1 + \dots + a_nw_n) + (c_1w_1 + \dots + c_nw_n) \\ &= Tu + Tv. \end{aligned}$$

ובאותו האופן, עבור $\lambda \in F$ ו- $v = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$, נקבל

$$\begin{aligned} T(\lambda v) &= T(\lambda c_1v_1 + \dots + \lambda c_nv_n) \\ &= \lambda c_1w_1 + \dots + \lambda c_nw_n \\ &= \lambda(c_1w_1 + \dots + c_nw_n) \\ &= \lambda Tv. \end{aligned}$$

לפיכך T העתקה ליניארית מ- V ל- W .

להוכחת היחידות, נניח כעת ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $Tv_k = w_k$ לכל $k = 1, \dots, n$. יהיו $c_1, \dots, c_n \in F$. אזי ההומוגניות של T גוררת ש- $T(c_kv_k) = c_kw_k$ לכל $k = 1, \dots, n$. האדיטיביות של T גוררת ש-

$$T(c_1v_1 + \dots + c_nv_n) = c_1w_1 + \dots + c_nw_n.$$

לפיכך T נקבעת באופן יחיד מעל $\text{span}(v_1, \dots, v_n)$ על ידי המשוואה לעיל. ומאחר ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V , נסיק כי T נקבעת באופן יחיד מעל V , כפי שרצינו. ■

פעולות אלגבריות מעל $\mathcal{L}(V, W)$

אנו מתחילים בהגדרת חיבור וכפל בסקלר מעל $\mathcal{L}(V, W)$.

3.5 הגדרה: חיבור וכפל בסקלר מעל $\mathcal{L}(V, W)$

נניח ש- $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $\lambda \in F$. הסכום $S + T$ והמכפלה λT הם ההעתקות הליניאריות מ- V ל- W המוגדרות על ידי

$$(S + T)(v) = Sv + Tv \quad \text{וגם} \quad (\lambda T)(v) = \lambda(Tv)$$

לכל $v \in V$.

העתקות ליניאריות נפוצות בענפי מתמטיקה רבים. עם זאת, הן פחות נפוצות משנוטים לחשוב: יש הסבורים ש- $\cos$ היא העתקה ליניארית מ- $\mathbf{R}$ ל- $\mathbf{R}$ לאחר שכתבו בטעות ש- $\cos(x + y) = \cos x + \cos y$ וגם ש- $\cos 2x = 2 \cos x$.

עליכם לוודא כי $S + T$ ו- λT כפי שהוגדרו לעיל הן אכן העתקות ליניאריות. כלומר, אם $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $\lambda \in F$, אזי $S + T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $\lambda T \in \mathcal{L}(V, W)$.

לאור העובדה כי טרחנו להגדיר חיבור וכפל בסקלר מעל $\mathcal{L}(V, W)$, המסקנה הבאה אינה אמורה להפתיע.

3.6 $\mathcal{L}(V, W)$ הוא מרחב וקטורי

עם פעולות החיבור והכפל בסקלר כפי שהוגדרו לעיל, $\mathcal{L}(V, W)$ מרחב וקטורי.

את ההוכחה השגרתית למסקנה זו נשאיר עבורכם, הקוראים. שימו לב כי איבר זההות לחיבור של $\mathcal{L}(V, W)$ הוא העתקת האפס המוגדרת בדוגמה 3.3. בדרך כלל פעולת ההכפלה של שני איברים זה בזה במרחב וקטורי חסרת משמעות. אך ישנם זוגות של העתקות ליניאריות שלמכפלת אחת באחרת יש שימוש רב, כפי שנראה בהגדרה הבאה.

3.7 הגדרה: מכפלת העתקות ליניאריות

אם $T \in \mathcal{L}(U, V)$ ו- $S \in \mathcal{L}(V, W)$, אזי המכפלה $ST \in \mathcal{L}(U, W)$ מוגדרת על ידי

$$(ST)(u) = S(Tu)$$

לכל $u \in U$.

לפיכך ST היא פעולת ההרכבה הרגילה $S \circ T$ של שתי פונקציות, אך כאשר שתי הפונקציות ליניאריות, נכתוב ST בדרך כלל במקום $S \circ T$. סימון המכפלה ST מסייע לכך שתכונות הדיסטריבוטיביות (ראו במסקנה הבאה) תיראינה טבעיות.

שימו לב כי ST מוגדרת רק כאשר T מעתיקה אל התחום של S . עליכם לוודא ש- ST אכן העתקה ליניארית מ- U ל- W כאשר $T \in \mathcal{L}(U, V)$ ו- $S \in \mathcal{L}(V, W)$.

3.8 תכונות אלגבריות של מכפלות העתקות ליניאריות

אסוציאטיביות

כאשר T_1, T_2 ו- T_3 העתקות ליניאריות במקרים שבהם למכפלות יש משמעות (כלומר T_3 מעתיקה אל התחום של T_2 ו- T_2 מעתיקה אל התחום של T_1).

זהות

$TI = IT = T$ כאשר $T \in \mathcal{L}(V, W)$; במקרה זה ה- I הראשון הוא אופרטור הזהות ב- V , ואילו ה- I השני הוא אופרטור הזהות ב- W .

תכונות הדיסטריבטיביות

וגם $S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2$ כאשר $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(U, V)$ ו- $S, S_1, S_2 \in \mathcal{L}(V, W)$.

נשאיר לקוראים את ההוכחה השגרתית של המסקנה שלעיל.

פעולת הכפל של העתקות ליניאריות אינה קומוטטיבית. כלומר, $ST = TS$ אינו מתקיים בהכרח, גם אם לכל מכפלה יש משמעות בפני עצמה.

3.9 דוגמה: שתי העתקות ליניאריות מ- $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ ל- $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ שאינן קומוטטיביות

נניח ש- $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbf{R}))$ היא העתקת הגזירה שהוגדרה בדוגמה 3.3 ו- $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbf{R}))$ היא העתקת הכפלה ב- x^2 שהוגדרה גם היא לעיל ביחידה זו. אזי $((TD)p)(x) = x^2 p'(x)$ אולם $((DT)p)(x) = x^2 p'(x) + 2xp(x)$. לפיכך $TD \neq DT$ —גזירה ואז הכפלה ב- x^2 אינה זהה להכפלה ב- x^2 ואז גזירה.

3.10 העתקות ליניאריות מעתיקות 0 ל- 0

נניח ש- T העתקה ליניארית מ- V ל- W . אזי $T(0) = 0$.

הוכחה לפי האדיטיביות מתקיים

$$T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0).$$

נוסיף את האיבר הנגדי לחיבור של $T(0)$ לכל אגף במשוואה לעיל ונסיק ש- $T(0) = 0$.

נניח ש- $m, b \in \mathbf{R}$. הפונקציה $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ המוגדרת על ידי

$$f(x) = mx + b$$

היא העתקה ליניארית אם ורק אם $b = 0$ (השתמשו ב- 3.10). לפיכך, הפונקציות הליניאריות משיעורי האלגברה בתיכון שונות מהעתקות ליניאריות בהקשר של אלגברה ליניארית.

- 1 נניח ש- $b, c \in \mathbb{R}$. הגדירו $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ על ידי

$$T(x, y, z) = (2x - 4y + 3z + b, 6x + cxyz).$$

הראו כי T העתקה ליניארית אם ורק אם $b = c = 0$.
- 2 נניח ש- $b, c \in \mathbb{R}$. הגדירו $T: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ על ידי

$$Tp = (3p(4) + 5p'(6) + bp(1)p(2), \int_{-1}^2 x^3 p(x) dx + c \sin p(0)).$$

הראו כי T העתקה ליניארית אם ורק אם $b = c = 0$.
- 3 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$. הראו כי קיימים סקלרים $A_{j,k} \in \mathbb{F}$ עבור $j = 1, \dots, m$ ו- $k = 1, \dots, n$ כך ש-

$$T(x_1, \dots, x_n) = (A_{1,1}x_1 + \dots + A_{1,n}x_n, \dots, A_{m,1}x_1 + \dots + A_{m,n}x_n)$$

לכל $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$.
תרגיל זה מראה שיש להעתקה הליניארית T את הצורה שהובטחה בסעיף שלפני האחרון בדוגמה 3.3.
- 4 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $v_1, \dots, v_m$ רשימת וקטורים ב- V כך ש- $Tv_1, \dots, Tv_m$ רשימה בלתי תלויה ליניארית ב- W . הוכיחו כי $v_1, \dots, v_m$ בלתי תלויה ליניארית.
- 5 הוכיחו כי $\mathcal{L}(V, W)$ מרחב וקטורי, כפי שנטען ב-3.6.
- 6 הוכיחו כי מכפלת העתקות ליניאריות מקיימת את תכונות האסוציאטיביות, הזהות, והדיסטריבוטיביות שנטענו ב-3.8.
- 7 הראו כי כל העתקה ליניארית ממרחב וקטורי חד-ממדי לעצמו היא כפל בסקלר. ביתר דיוק, הוכיחו כי אם $\dim V = 1$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$, אזי קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש- $Tv = \lambda v$ לכל $v \in V$.
- 8 הביאו דוגמה של פונקציה $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש-

$$\varphi(av) = a\varphi(v)$$

לכל $a \in \mathbb{R}$ ולכל $v \in \mathbb{R}^2$ אבל φ אינה ליניארית.
תרגיל זה והבא אחריו פזגים שההומוגניות או האדיטיביות לבדן אינן מספיקות כדי לקבוע כי פונקציה היא העתקה ליניארית.
- 9 הביאו דוגמה לפונקציה $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ כך ש-

$$\varphi(w + z) = \varphi(w) + \varphi(z)$$

לכל $w, z \in \mathbb{C}$ אך φ אינה ליניארית. (בשאלה זו $\mathbb{C}$ הוא מרחב וקטורי מרוכב).
קיימת גם פונקציה $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הפקיימת את האדיטיביות אך אינה ליניארית. אולם, הוכחת קיומה של פונקציה כזו מצריכה כלים מתקדמים בהרבה.

10 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם $q \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ ו- $T: \mathcal{P}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{R})$ מוגדרת על ידי $q \circ p = Tp$, אזי T העתקה ליניארית.

הפונקציה T המוגדרת כאן שונה מהפונקציה T בסעיף האחרון של 3.3 בסדר ההרכבה של הפונקציות.

11 נניח ש- V מרחב מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי T היא כפולת סקלר של אופרטור הזזות אם-יורק-אם $ST = TS$ לכל $S \in \mathcal{L}(V)$.

12 נניח ש- U תת-מרחב של V כאשר $U \neq V$. נניח ש- $S \in \mathcal{L}(U, W)$ וגם $S \neq 0$ (כלומר $Su \neq 0$ עבור $u \in U$ כלשהו). הגדירו $T: V \rightarrow W$ על ידי

$$Tv = \begin{cases} Sv & \text{if } v \in U, \\ 0 & \text{if } v \in V, v \notin U. \end{cases}$$

והוכיחו כי T אינה העתקה ליניארית מעל V .

13 נניח ש- V מרחב מממד סופי. הוכיחו כי ניתן להרחיב כל העתקה ליניארית מעל תת-מרחב של V כך שתפעל מעל V . כלומר, הראו כי אם U תת-מרחב של V ו- $S \in \mathcal{L}(U, W)$, אזי קיימת $T \in \mathcal{L}(V, W)$ כזו המקיימת $Tu = Su$ לכל $u \in U$.
התוצאה בתרגיל זה משמשת בהוכחת 3.125.

14 נניח כי V מרחב מממד סופי המקיים $\dim V > 0$, ונניח בנוסף כי W הוא מרחב מממד אינסופי. הוכיחו כי $\mathcal{L}(V, W)$ מרחב מממד אינסופי.

15 נניח כי $v_1, \dots, v_m$ רשימת וקטורים תלויה ליניארית ב- V . נניח בנוסף כי $W \neq \{0\}$. הוכיחו שקיימים $w_1, \dots, w_m \in W$ כך שאין $T \in \mathcal{L}(V, W)$ המקיימת $Tv_k = w_k$ לכל $k = 1, \dots, m$.

16 נניח ש- V מרחב מממד סופי עם $\dim V > 1$. הוכיחו כי קיימות $S, T \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $ST \neq TS$.

17 נניח ש- V מרחב מממד סופי. הראו כי עבור $\mathcal{L}(V)$, רק $\{0\}$ ו- $\mathcal{L}(V)$ הם אידיאלים דו-צדדיים.

תת-מרחב $\mathcal{E}$ של $\mathcal{L}(V)$ נקרא **אידיאל דו-צדדי** של $\mathcal{L}(V)$ אם $TE \in \mathcal{E}$ וגם $ET \in \mathcal{E}$ לכל $E \in \mathcal{E}$ וכל $T \in \mathcal{L}(V)$.

2ג מרחבי אפס וטווחים

מרחב אפס וחד־חד־ערכיות

ביחידה זו נלמד על שני תתי־מרחב הקשורים בקשר הדוק עם כל העתקה ליניארית. נתחיל עם קבוצת הווקטורים המועתקת אל 0.

3.11 הגדרה: מרחב האפס, $\text{null } T$

עבור $T \in \mathcal{L}(V, W)$, מרחב האפס של T , המסומן ב־ $\text{null } T$, הוא תת־הקבוצה של V המורכבת מכל אותם וקטורים ש־ T מעתיקה אל איבר האפס:

$$\text{null } T = \{v \in V : Tv = 0\}.$$

3.12 דוגמה: מרחב האפס

- אם T היא העתקת האפס מ־ V ל־ W , כלומר $Tv = 0$ לכל $v \in V$, אזי $\text{null } T = V$.
- נניח ש־ $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C})$ מוגדרת באופן הבא $\varphi(z_1, z_2, z_3) = z_1 + 2z_2 + 3z_3$. אזי $\text{null } \varphi$ שווה ל־ $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 0\}$, שהוא תת־מרחב של התחום של φ . בהמשך נראה כי מרחב האפס של כל העתקה ליניארית הוא תת־מרחב של התחום שלה.

המילה null משמעותה אפס. לפיכך המונח "מרחב האפס" מייצג באופן ישיר את הקשר ל־0. ישנם מתמטיקאים המשתמשים במונח **גרעין** במקום מרחב האפס.

- נניח ש־ $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ העתקת הגזירה המוגדרת על ידי $Dp = p'$. הפונקציות היחידות שהנגזרת שלהן שווה לפונקציית האפס הן הפונקציות הקבועות. לפיכך, מרחב האפס של D שווה לקבוצת הפונקציות הקבועות.

- נניח ש־ $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ היא העתקה המכפילה ב־ x^2 ומוגדרת באופן הבא: $(Tp)(x) = x^2 p(x)$. הפולינום היחיד p כך ש־ $x^2 p(x) = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$ הוא פולינום האפס. לפיכך $\text{null } T = \{0\}$.

- נניח ש־ $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^\infty)$ היא העתקת הסטה לאחור המוגדרת על ידי

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

אזי $T(x_1, x_2, x_3, \dots)$ שווה 0 אם־ורק־אם המספרים $x_2, x_3, \dots$ כולם 0. לפיכך $\text{null } T = \{(a, 0, 0, \dots) : a \in \mathbb{F}\}$.

המסקנה הבאה מראה שמרחב האפס של כל העתקה ליניארית הוא תת־מרחב של התחום. בפרט, 0 הוא במרחב האפס של כל העתקה ליניארית.

3.13 מרחב האפס הוא תת־מרחב

נניח ש־ $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי $\text{null } T$ הוא תת־מרחב של V .

הוכחה מאחר ש- T העתקה ליניארית, $T(0) = 0$ (לפי 3.10). לפיכך $0 \in \text{null } T$.

נניח ש- $u, v \in \text{null } T$. אזי

$$T(u + v) = Tu + Tv = 0 + 0 = 0.$$

לכן $u + v \in \text{null } T$. לפיכך $\text{null } T$ סגור תחת פעולת החיבור.

נניח ש- $u \in \text{null } T$ ו- $\lambda \in F$. אזי

$$T(\lambda u) = \lambda Tu = \lambda 0 = 0.$$

לכן $\lambda u \in \text{null } T$. לפיכך $\text{null } T$ סגור תחת כפל בסקלר.

הראינו אפוא ש- $\text{null } T$ מכיל 0 וסגור תחת פעולות חיבור וכפל בסקלר. לפיכך $\text{null } T$ תת-מרחב של V (לפי 1.34). ■

כפי שנראה מייד, להגדרה הבאה קשר הדוק למרחב האפס של העתקה ליניארית.

3.14 הגדרה: חד-חד-ערכית

פונקציה $T: V \rightarrow W$ נקראת חד-חד-ערכית אם $Tu = Tv$ גורר ש- $u = v$.

משמעות המונח **one-to-one** זהה לחד-חד-ערכי.

נוכל לנסח מחדש את ההגדרה לעיל ולומר ש- T חד-חד-ערכית אם $u \neq v$ גורר ש- $Tu \neq Tv$. לפיכך T חד-חד-ערכית אם-יורק-אם היא מעתיקה קלטים שונים אל פלטים שונים.

המסקנה הבאה קובעת כי נוכל לבדוק אם העתקה ליניארית היא חד-חד-ערכית באמצעות הבדיקה האם 0 הוא האיבר היחיד המועתק ל-0. ביישום פשוט של מסקנה זו, אנו רואים כי מִבִּין ההעתקות הליניאריות שחישבנו את מרחב האפס שלהן ב-3.12, רק ההכפלה ב- x^2 היא חד-חד-ערכית (למעט העובדה שהעתקת האפס היא חד-חד-ערכית במקרה המיוחד שבו $V = \{0\}$).

3.15 חד-חד-ערכיות $\Leftrightarrow$ מרחב האפס שווה ל- $\{0\}$

תהי $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי T חד-חד-ערכית אם-יורק-אם $\text{null } T = \{0\}$.

הוכחה תחילה נניח ש- T חד-חד-ערכית. נרצה להוכיח ש- $\text{null } T = \{0\}$. כבר ביססנו את העובדה ש- $\{0\} \subseteq \text{null } T$ (לפי 3.10). להוכחת ההכלה בכיוון ההפוך, נניח ש- $v \in \text{null } T$. נקבל

$$T(v) = 0 = T(0).$$

מאחר ש- T חד-חד-ערכית, המשוואה לעיל גוררת ש- $v = 0$. לפיכך אנו יכולים להסיק כי $\text{null } T = \{0\}$, כפי שרצינו.

להוכחת הגרירה בכיוון השני, נניח כעת ש- $\text{null } T = \{0\}$. ברצוננו להוכיח כי T חד-חד-ערכית. לצורך כך נניח ש- $u, v \in V$ וש- $Tu = Tv$. אזי

$$0 = Tu - Tv = T(u - v).$$

לפיכך $u - v \in \text{null } T$, השווה ל- $\{0\}$. לכן $u - v = 0$, ומכאן ש- $u = v$. לפיכך T חד-חד-ערכית כפי שרצינו. ■

טווח ותכונת העל

כעת נעניק שם לקבוצת התוצאות של העתקה ליניארית.

3.16 הגדרה: טווח, range

עבור $T \in \mathcal{L}(V, W)$, הטווח של T הוא תת־הקבוצה של W המורכבת מכל אותם וקטורים השווים ל- Tv עבור $v \in V$ כלשהו:

$$\text{range } T = \{Tv : v \in V\}.$$

3.17 דוגמה: טווח, range

- אם T היא העתקת האפס מ- V ל- W , כלומר $Tv = 0$ לכל $v \in V$, אזי $\text{range } T = \{0\}$.
- נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ מוגדרת על ידי $T(x, y) = (2x, 5y, x + y)$. אזי $\text{range } T = \{(2x, 5y, x + y) : x, y \in \mathbf{R}\}$.
- שימו לב ש- $\text{range } T$ הוא תת־מרחב של $\mathbf{R}^3$. בהמשך נראה שהטווח של כל איבר ב- $\mathcal{L}(V, W)$ הוא תת־מרחב של W .
- נניח ש- $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbf{R}))$ היא העתקת הגזירה המוגדרת על ידי $Dp = p'$. מאחר שלכל פולינום $q \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ קיים פולינום $p \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ כך ש- $p' = q$, הטווח של D הוא $\mathcal{P}(\mathbf{R})$.

המסקנה הבאה קובעת שהטווח של כל העתקה ליניארית הוא תת־מרחב של המרחב הווקטורי שאליו היא מעתיקה.

3.18 הטווח הוא תת־מרחב

אם $T \in \mathcal{L}(V, W)$, אזי $\text{range } T$ תת־מרחב של W .

הוכחה נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי $T(0) = 0$ (לפי 3.10), מה שמוביל למסקנה ש- $0 \in \text{range } T$.
אם $w_1, w_2 \in \text{range } T$, אזי קיימים $v_1, v_2 \in V$ כך ש- $Tv_1 = w_1$ ו- $Tv_2 = w_2$. לפיכך

$$T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2 = w_1 + w_2.$$

לכן $w_1 + w_2 \in \text{range } T$. לפיכך $\text{range } T$ סגור תחת פעולת החיבור.
אם $w \in \text{range } T$ ו- $\lambda \in \mathbf{F}$, אזי קיים $v \in V$ כך ש- $Tv = w$. לפיכך

$$T(\lambda v) = \lambda Tv = \lambda w.$$

לכן $\lambda w \in \text{range } T$. לפיכך $\text{range } T$ סגור תחת כפל בסקלר.
הראינו ש- $\text{range } T$ מכיל את איבר האפס והוא סגור תחת פעולות החיבור והכפל בסקלר. לפיכך $\text{range } T$ הוא תת־מרחב של W (לפי 1.34). ■

3.19 הגדרה: על

פונקציה $T: V \rightarrow W$ נקראת על אם הטווח שלה שווה ל- W .

להמחשת ההגדרה לעיל, שימו לב כי מכל הטווחים שחישבנו ב-3.17, רק העתקת הגזירה היא על (למעט העובדה שהעתקת האפס היא על במקרה המיוחד שבו $W = \{0\}$).

יש המשתמשים במונח **סורג'קטיבית**, שמשמעותו זהה לזו של על.

ההכרעה האם העתקה ליניארית היא על תלויה במה שאנו רואים כמרחב היעד של ההעתקה.

3.20 דוגמה: תכונת העל תלויה במרחב היעד

העתקת הגזירה $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_5(\mathbf{R}))$ כשהיא מוגדרת על ידי $Dp = p'$ אינה על מהסיבה שהפולינום x^5 אינו בטווח של D . לעומת זאת, העתקת הגזירה $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_5(\mathbf{R}), \mathcal{P}_4(\mathbf{R}))$ המוגדרת על ידי $Sp = p'$ היא על, מאחר שהטווח שלה שווה ל- $\mathcal{P}_4(\mathbf{R})$, שהוא המרחב הווקטורי אליו S מעתיקה.

המשפט היסודי של ההעתקות הליניאריות

המסקנה הבאה היא כה חשובה שהוענק לה שם דרמטי.

3.21 המשפט היסודי של ההעתקות הליניאריות

נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי $\text{range } T$ מממד סופי, וגם $\dim V = \dim \text{null } T + \dim \text{range } T$.

הוכחה יהי $u_1, \dots, u_m$ בסיס של $\text{null } T$; לפיכך $\dim \text{null } T = m$. את הרשימה הבלתי תלויה ליניארית $u_1, \dots, u_m$ נשלים לבסיס

$$u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$$

של V (לפי 2.32). לפיכך $\dim V = m + n$. להשלמת ההוכחה, עלינו להראות ש- $\text{range } T$ מממד סופי ו- $\dim \text{range } T = n$. נעשה זאת בכך שנוכיח ש- $Tv_1, \dots, Tv_n$ בסיס של $\text{range } T$.

יהי $v \in V$. מאחר ש- $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ פורסת את V , נוכל לכתוב

$$v = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m + b_1 v_1 + \dots + b_n v_n,$$

כאשר ה- a ים וה- b ים ב- F . בהפעלת T על שני אגפי המשוואה, נקבל

$$Tv = b_1 Tv_1 + \dots + b_n Tv_n,$$

כאשר הביטויים מהצורה Tu_k נעלמים שכן כל u_k ב- $\text{null } T$. מהמשוואה האחרונה נסיק שהרשימה $Tv_1, \dots, Tv_n$ פורסת את $\text{range } T$. בפרט, $\text{range } T$ מממד סופי.

כדי להראות ש- $Tv_1, \dots, Tv_n$ בלתי תלויה ליניארית, נניח ש- $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ ומתקיים

$$c_1Tv_1 + \dots + c_nTv_n = 0.$$

כלומר

$$T(c_1v_1 + \dots + c_nv_n) = 0.$$

לכן

$$c_1v_1 + \dots + c_nv_n \in \text{null } T.$$

מאחר שהרשימה $u_1, \dots, u_m$ פורסת את $\text{null } T$, נוכל להציב

$$c_1v_1 + \dots + c_nv_n = d_1u_1 + \dots + d_mu_m,$$

כאשר ה- d ים ב- $\mathbb{F}$. ממשוואה זו עולה כי כל ה- c ים (וה- d ים) שווים ל-0 (שכן $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ בלתי תלויה ליניארית). לפיכך $Tv_1, \dots, Tv_n$ בלתי תלויה ליניארית, לכן היא בסיס של $\text{range } T$, כפי שרצינו להוכיח. ■

כעת אנו יכולים להראות שהעתקה ליניארית ממרחב וקטורי מממד סופי אל מרחב וקטורי "קטן יותר" אינה יכולה להיות חד-חד-ערכית, כאשר ממדי המרחבים הם הממד ליחס הגודל.

3.22 העתקה ליניארית לפרחב מעמד נמוך יותר אינה חד-חד-ערכית

נניח ש- V ו- W מרחבים וקטוריים מממד סופי כך שמתקיים $\dim V > \dim W$. אזי לא קיימת העתקה ליניארית חד-חד-ערכית מ- V אל W .

הוכחה תהי $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי

$$\dim \text{null } T = \dim V - \dim \text{range } T$$

$$\geq \dim V - \dim W$$

$$> 0,$$

כאשר השורה הראשונה נובעת מהמשפט היסודי של ההעתקות הליניאריות (3.21) והשורה השנייה מ-2.37. האי-שוויון לעיל קובע כי $\dim \text{null } T > 0$. כלומר, המרחב $\text{null } T$ מכיל וקטורים שאינם 0. לפיכך, T אינה חד-חד-ערכית (לפי 3.15). ■

3.23 דוגמה: העתקה ליניארית מ- $\mathbb{F}^4$ ל- $\mathbb{F}^3$ אינה חד-חד-ערכית

נגדיר $T: \mathbb{F}^4 \rightarrow \mathbb{F}^3$ על ידי

$$T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\sqrt{7}z_1 + \pi z_2 + z_4, 97z_1 + 3z_2 + 2z_3, z_2 + 6z_3 + 7z_4).$$

מאחר ש- $\dim \mathbb{F}^4 > \dim \mathbb{F}^3$, נוכל להשתמש ב-3.22 ולקבוע ש- T אינה חד-חד-ערכית, מבלי שנבצע חישובים כלשהם.

המסקנה הבאה קובעת שהעתקה ליניארית ממרחב וקטורי מממד סופי אל מרחב וקטורי "גדול יותר" אינה יכולה להיות על, כשממדי המרחבים הם הממד ליחסי הגודל.

3.24 העתקה ליניארית למרחב ספמד גבוה יותר אינה על

נניח ש- V ו- W מרחבים וקטוריים מממד סופי כך שמתקיים $\dim V < \dim W$. אזי לא קיימת העתקה ליניארית על מ- V ל- W .

הוכחה תהי $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי

$$\dim \text{range } T = \dim V - \dim \text{null } T$$

$$\leq \dim V$$

$$< \dim W,$$

כאשר השוויון לעיל מתקבל מהמשפט היסודי של ההעתקות הליניאריות (3.21). האי-שוויון לעיל קובע כי $\dim \text{range } T < \dim W$. משמעות הדבר היא ש- $\text{range } T$ אינה יכולה להיות שווה ל- W . לפיכך T אינה על.

כפי שנראה בקרוב, ל- 3.22 ו- 3.24 השלכות חשובות בתורת המשוואות הליניאריות. הרעיון הוא לנסח שאלות על מערכות של משוואות ליניאריות במונחים של העתקות ליניאריות. כצעד ראשון, ננסח מחדש, במונחים של העתקות ליניאריות, את השאלה האם למערכת הומוגנית של משוואות ליניאריות יש פתרון השונה מאפס.

הומוגניות, בהקשר זה, משמעותה שערך האיבר הקבוע באגף הימני של כל משוואה להלן הוא 0.

נקבע מספרים שלמים חיוביים m ו- n , ויהי $A_{j,k} \in F$ עבור $j = 1, \dots, m$ ו- $k = 1, \dots, n$. נתבונן במערכת ההומוגנית של המשוואות הליניאריות

$$\sum_{k=1}^n A_{1,k} x_k = 0$$

⋮

$$\sum_{k=1}^n A_{m,k} x_k = 0.$$

ברור ש- $x_1 = \dots = x_n = 0$ הוא פתרון למערכת המשוואות לעיל; השאלה היא האם קיימים פתרונות נוספים.

נגדיר $T: F^n \rightarrow F^m$ על ידי

$$T(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^n A_{1,k} x_k, \dots, \sum_{k=1}^n A_{m,k} x_k \right). \quad 3.25$$

המשוואה $T(x_1, \dots, x_n) = 0$ (ה- 0 כאן הוא איבר הזהות לחיבור ב- F^m , כלומר, רשימה בת m איברים שכולם אפסים) היא זהה למערכת ההומוגנית של המשוואות הליניאריות לעיל.

לפיכך, אנו רוצים לדעת האם $\text{null } T$ גדול ממש מ- $\{0\}$, תנאי השקול לכך ש- T אינה חד-חד-ערכית (לפי 3.15). המסקנה הבאה מספקת תנאי חשוב המבטיח ש- T אינה חד-חד-ערכית.

3.26 מערכת הומוגנית של משוואות ליניאריות

למערכת הומוגנית של משוואות ליניאריות עם מספר משתנים גדול ממספר המשוואות יש פתרונות השונים מאפס.

הוכחה נשתמש בסימון ובמסקנה מהדיון לעיל. לפיכך T העתקה ליניארית מ- $\mathbb{F}^n$ אל $\mathbb{F}^m$, וכעת לפנינו מערכת הומוגנית של m משוואות ליניאריות עם n משתנים $x_1, \dots, x_n$. מ-3.22 נסיק כי T אינה חד-חד-ערכית אם $n > m$.

דוגמה למסקנה לעיל: למערכת הומוגנית של ארבע משוואות ליניאריות עם חמישה משתנים יש פתרונות השונים מאפס.

כעת נתבונן בשאלה האם למערכת משוואות ליניאריות אין פתרונות עבור בחירה מסוימת של האיברים הקבועים. לניסוח מחדש של שאלה זו במונחי העתקה ליניארית, נקבע מספרים שלמים חיוביים m ו- n , ויהי $A_{j,k} \in \mathbb{F}$ לכל $j = 1, \dots, m$ ולכל $k = 1, \dots, n$. עבור $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{F}$, נתבונן במערכת המשוואות הליניאריות

$$\sum_{k=1}^n A_{1,k} x_k = c_1$$

⋮

$$\sum_{k=1}^n A_{m,k} x_k = c_m.$$

עם סימון זה, השאלה העולה היא האם קיימת בחירה כלשהי של האיברים הקבועים $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{F}$ כך שלמערכת לעיל לא יהיה פתרון.

נגדיר $T: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ כמו ב-3.25.

המשוואה $T(x_1, \dots, x_n) = (c_1, \dots, c_m)$ זהה למערכת המשוואות 3.27. לפיכך אנו מבקשים לדעת האם $\text{range } T \neq \mathbb{F}^m$. לכן נוכל לנסח מחדש את השאלה לגבי היעדר פתרון לקבועים כלשהם $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{F}$.

באופן הבא: איזה תנאי יבטיח ש- T אינה פֶּל? המסקנה הבאה מספקת לנו תנאי שכזה.

3.28 מערכת משוואות ליניאריות עם יותר משוואות ממשתנים

למערכת משוואות ליניאריות עם יותר משוואות ממשתנים אין פתרון עבור בחירה מסוימת של איברים קבועים.

הוכחה נשתמש בסימון מהסעיף לעיל. לפיכך T העתקה ליניארית מ- $\mathbb{F}^n$ אל $\mathbb{F}^m$, וכעת לפנינו מערכת של m משוואות עם n משתנים $x_1, \dots, x_n$; ראו 3.27. אם $n < m$, אזי 3.24 קובע ש- T אינה פֶּל. כפי שנאמר לעיל, משמעות קביעה זו היא שאם יש לנו יותר משוואות ממשתנים במערכת של משוואות ליניאריות, אזי למערכת אין פתרון עבור בחירה מסוימת של איברים קבועים.

דוגמה למסקנה לעיל: למערכת של חמש משוואות ליניאריות עם ארבעה משתנים אין פתרון עבור בחירה מסוימת של האיברים הקבועים.

תרגילים ג

- 1 הביאו דוגמה להעתקה ליניארית T עם $\dim \text{null } T = 3$ ו- $\dim \text{range } T = 2$.
- 2 נניח ש- $S, T \in \mathcal{L}(V)$ כך שמתקיים $\text{range } S \subseteq \text{null } T$. הוכיחו ש- $(ST)^2 = 0$.
- 3 נניח ש- $v_1, \dots, v_m$ היא רשימת וקטורים ב- V . הגדירו $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^m, V)$ על ידי

$$T(z_1, \dots, z_m) = z_1 v_1 + \dots + z_m v_m.$$
 א. איזו תכונה של T מתאימה לכך ש- $v_1, \dots, v_m$ פורסת את V ?
 ב. איזו תכונה של T מתאימה לכך שהרשימה $v_1, \dots, v_m$ בלתי תלויה ליניארית?
- 4 הראו ש- $\{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4) : \dim \text{null } T > 2\}$ אינו תת-מרחב של $\mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$.
- 5 הביאו דוגמה ל- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ כך ש- $\text{range } T = \text{null } T$.
- 6 הוכיחו שלא קיימת $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$ כך ש- $\text{range } T = \text{null } T$.
- 7 נניח ש- V ו- W מרחבים מממד סופי המקיימים $2 \leq \dim V \leq \dim W$. הראו ש- $\{T \in \mathcal{L}(V, W) : T \text{ חד-חד-ערכית}\}$ אינו תת-מרחב של $\mathcal{L}(V, W)$.
- 8 נניח ש- V ו- W מרחבים מממד סופי ומתקיים $\dim V \geq \dim W \geq 2$. הראו כי $\{T \in \mathcal{L}(V, W) : T \text{ אינה על}\}$ אינו תת-מרחב של $\mathcal{L}(V, W)$.
- 9 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ חד-חד-ערכית ו- $v_1, \dots, v_n$ בלתי תלויה ליניארית ב- V . הוכיחו כי $Tv_1, \dots, Tv_n$ בלתי תלויה ליניארית ב- W .
- 10 נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ פורסת את V ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הראו ש- $Tv_1, \dots, Tv_n$ פורסת את $\text{range } T$.
- 11 נניח ש- V מרחב מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הוכיחו כי קיים תת-מרחב U של V כך שמתקיים

$$U \cap \text{null } T = \{0\} \quad \text{וגם} \quad \text{range } T = \{Tu : u \in U\}.$$
- 12 נניח ש- T העתקה ליניארית מ- $\mathbb{F}^4$ אל $\mathbb{F}^2$ כך ש-

$$\text{null } T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}^4 : x_1 = 5x_2 \text{ and } x_3 = 7x_4\}.$$
 הוכיחו כי T על.
- 13 נניח ש- U תת-מרחב תלת-ממדי של $\mathbb{R}^8$ ו- T העתקה ליניארית מ- $\mathbb{R}^8$ אל $\mathbb{R}^5$ כך ש- $\text{null } T = U$. הוכיחו כי T על.
- 14 הוכיחו כי לא קיימת העתקה ליניארית מ- $\mathbb{F}^5$ אל $\mathbb{F}^2$ כזו שמרחב האפס שלה שווה ל- $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{F}^5 : x_1 = 3x_2 \text{ וגם } x_3 = x_4 = x_5\}$.
- 15 נניח שקיימת העתקה ליניארית מעל V שמרחב האפס שלה והטווח שניהם מרחבים מממד סופי. הוכיחו כי V מממד סופי.

- 16** נניח ש- V ו- W שניהם מממד סופי. הוכיחו כי קיימת העתקה ליניארית חד-חד-ערכית מ- V אל W אם ורק אם $\dim V \leq \dim W$.
- 17** נניח ש- V ו- W שניהם מממד סופי. הוכיחו כי קיימת העתקה ליניארית על מ- V ל- W אם ורק אם $\dim V \geq \dim W$.
- 18** נניח ש- V ו- W מרחבים מממד סופי, ו- U הוא תת-מרחב של V . הוכיחו כי קיימת העתקה $T \in \mathcal{L}(V, W)$ כך ש- $\text{null } T = U$ אם ורק אם $\dim U \geq \dim V - \dim W$.
- 19** נניח ש- W מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הוכיחו כי T היא חד-חד-ערכית אם ורק אם קיימת $S \in \mathcal{L}(W, V)$ כך ש- ST הוא אופרטור הזהות מעל V .
- 20** נניח ש- W מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הוכיחו כי T על אם ורק אם קיימת $S \in \mathcal{L}(W, V)$ כך ש- TS הוא אופרטור הזהות מעל W .
- 21** נניח ש- V מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V, W)$, ו- U תת-מרחב של W . הוכיחו כי $\{v \in V : Tv \in U\}$ תת-מרחב של V וגם $\dim\{v \in V : Tv \in U\} = \dim \text{null } T + \dim(U \cap \text{range } T)$.
- 22** נניח ש- U ו- V מרחבים וקטוריים מממד סופי ו- $S \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $T \in \mathcal{L}(U, V)$. הוכיחו כי $\dim \text{null } ST \leq \dim \text{null } S + \dim \text{null } T$.
- 23** נניח ש- U ו- V מרחבים וקטוריים מממד סופי ו- $S \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $T \in \mathcal{L}(U, V)$. הוכיחו כי $\dim \text{range } ST \leq \min\{\dim \text{range } S, \dim \text{range } T\}$.
- 24** א. נניח ש- $\dim V = 5$ ו- $S, T \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $ST = 0$. הוכיחו כי $\dim \text{range } TS \leq 2$.
 ב. הביאו דוגמה של $S, T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^5)$ כאשר $ST = 0$ ו- $\dim \text{range } TS = 2$.
- 25** נניח ש- W מממד סופי ו- $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$. הוכיחו כי $\text{null } S \subseteq \text{null } T$ אם ורק אם קיימת $E \in \mathcal{L}(W)$ כך ש- $T = ES$.
- 26** נניח ש- V מממד סופי ו- $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$. הוכיחו כי $\text{range } S \subseteq \text{range } T$ אם ורק אם קיימת העתקה $E \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $S = TE$.
- 27** נניח ש- $P \in \mathcal{L}(V)$ ו- $P^2 = P$. הוכיחו כי $V = \text{null } P \oplus \text{range } P$.
- 28** נניח ש- $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbf{R}))$ העתקה כך ש- $\deg Dp = (\deg p) - 1$ לכל פולינום שאינו קבוע $p \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$. הוכיחו ש- D על. השימוש בסיפון D נועד להזכיר לכם את העתקת הגזירה השולחת את הפולינום p אל p' .

29 נניח ש- $p \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$. הוכיחו כי קיים פולינום $q \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ כך ש- $5q'' + 3q' = p$.
אף שניתן לפתור תרגיל זה ללא אלגברה ליניארית, שימוש באלגברה ליניארית יוביל לפתרון פהנה יותר.

30 נניח ש- $\varphi \in \mathcal{L}(V, \mathbf{F})$ וגם $\varphi \neq 0$. בנוסף, נניח ש- $u \in V$ וגם $u \notin \text{null } \varphi$.
הוכיחו כי

$$V = \text{null } \varphi \oplus \{au : a \in \mathbf{F}\}.$$

31 נניח ש- V מממד סופי, X תת-מרחב של V , ו- Y תת-מרחב מממד סופי של W . הוכיחו כי קיימת $T \in \mathcal{L}(V, W)$ כך ש- $\text{null } T = X$ ו- $\text{range } T = Y$.
אס-ורק-אם $\dim X + \dim Y = \dim V$.

32 נניח ש- V מממד סופי שעבורו מתקיים $\dim V > 1$. הראו שאם $\varphi: \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathbf{F}$ היא העתקה ליניארית כך ש- $\varphi(ST) = \varphi(S)\varphi(T)$ לכל $S, T \in \mathcal{L}(V)$, אזי $\varphi = 0$.

רמז: התיאור של אידיאלים דו-צדדיים של $\mathcal{L}(V)$ שניתן בתרגיל 17 ביחידה ג יכול לסייע בפתרון.

33 נניח ש- V ו- W מרחבים וקטוריים ממשיים וגם $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הגדירו $T_C: V_C \rightarrow W_C$ על ידי

$$T_C(u + iv) = Tu + iTv$$

לכל $u, v \in V$.

- הראו כי T_C העתקה ליניארית מרוכבת מ- V_C אל W_C .
- הראו כי T_C חד-חד-ערכית אס-ורק-אם T חד-חד-ערכית.
- הראו כי $\text{range } T_C = W_C$ אס-ורק-אם $\text{range } T = W$.

ראו תרגיל 8 ביחידה א2 להגדרת הפירכוב V_C . ההעתקה הליניארית T_C נקראת **הפירכוב** של ההעתקה הליניארית T .

ייצוג העתקה ליניארית באמצעות מטריצה

אנו כבר יודעים שאם $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V ו- $T: V \rightarrow W$ ליניארית, אזי הערכים של $Tv_1, \dots, Tv_n$ קובעים את ערכי T מעל וקטורים שרירותיים ב- V —ראו לְמַת ההעתקה הליניארית (3.4). כפי שנראה מייד, מטריצות מספקות שיטה יעילה לרישום ערכי Tv_k במונחי בסיס של W .

3.29 הגדרה: מטריצה, $A_{j,k}$

נניח ש- m ו- n מספרים שלמים אי-שליליים. מטריצה בגודל $m \times n$ שנסמן ב- A היא מערך מלבני של איברים ב- F עם m שורות ו- n עמודות:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}.$$

הסימון $A_{j,k}$ מסמן את האיבר בשורה j , בעמודה k של A .

3.30 דוגמה: $A_{j,k}$ הוא האיבר בשורה j , עמודה k של A

נניח ש- $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 5-3i \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$. לפיכך $A_{2,3}$ מתייחס לאיבר בשורה השנייה, בעמודה השלישית של A , ומשמעות הדבר היא ש- $A_{2,3} = 7$.

כשאנו זנים במטריצות, האינדקס הראשון מתייחס למספר השורה; האינדקס השני מתייחס למספר העמודה.

כעת אנו מגיעים להגדרת יסוד ביחידה זו.

3.31 הגדרה: מטריצה של העתקה ליניארית, $\mathcal{M}(T)$

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V ו- $w_1, \dots, w_m$ בסיס של W . המטריצה של T ביחס לבסיסים אלו היא $\mathcal{M}(T)$ מטריצה $m \times n$ שאיבריה $A_{j,k}$ מוגדרים על ידי

$$Tv_k = A_{1,k}w_1 + \cdots + A_{m,k}w_m.$$

אם הבסיסים $v_1, \dots, v_n$ ו- $w_1, \dots, w_m$ אינם ברורים מההקשר, אזי נעשה שימוש בסימון $\mathcal{M}(T, (v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_m))$.

המטריצה $\mathcal{M}(T)$ של ההעתקה הליניארית $T \in \mathcal{L}(V, W)$ תלויה בבסיס $v_1, \dots, v_n$ של V ובבסיס $w_1, \dots, w_m$ של W , ובנוסף ב- T . אולם, מההקשר אנו אמורים להבין את הגדרת הבסיסים, ולפיכך לרוב לא נכלול את הבסיסים בסימון.

כדי לזכור איך $\mathcal{M}(T)$ נבנית מתוך T , ייתכן שתמצאו לכתוב בראש המטריצה לאורכה את וקטורי הבסיס $v_1, \dots, v_n$ עבור התחום ולאורך צידה השמאלי את וקטורי הבסיס $w_1, \dots, w_m$ עבור המרחב הווקטורי שאליו T מעתיקה, באופן הבא:

$$\mathcal{M}(T) = \begin{matrix} & v_1 & \cdots & v_k & \cdots & v_n \\ \begin{matrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccc} & & & \\ & A_{1,k} & & \\ & \vdots & & \\ & A_{m,k} & & \end{array} \right) \end{matrix}.$$

העמודה ה- k^{th} של $\mathcal{M}(T)$ מורכבת מהסקלרים הנדרשים לבטא את Tv_k כצירוף ליניארי של $w_1, \dots, w_m$:

$$Tv_k = \sum_{j=1}^m A_{j,k} w_j.$$

במטריצה לעיל הצגנו רק את העמודה ה- k^{th} . לפיכך האינדקס השני של כל איבר שמוצג הוא k . השרטוט לעיל אמור להזכיר לנו שניתן לחשב את Tv_k מתוך $\mathcal{M}(T)$ בהכפלת כל איבר בעמודה ה- k^{th} ב- w_j התואם מהעמודה השמאלית, ואז חיבור של וקטורי התוצאה.

אם T העתקה ליניארית מרחב וקטורי n -ממדי אל מרחב וקטורי m -ממדי, אזי $\mathcal{M}(T)$ היא מטריצה $m \times n$.

אם T העתקה ליניארית מ- $\mathbb{F}^n$ אל $\mathbb{F}^m$, אזי אם לא צוין אחרת, עלינו להניח כי הבסיסים הנדונים הם הבסיסים הסטנדרטיים (כאשר בווקטור הבסיס ה- k^{th} הערך ברכיב ה- k^{th} הוא 1 ובכל שאר הרכיבים 0). אם תחשבו על איברים ב- $\mathbb{F}^m$ כעמודות עם m מספרים, אזי העמודה ה- k^{th} של $\mathcal{M}(T)$ היא התוצאה כאשר T מופעלת על הווקטור ה- k^{th} בבסיס הסטנדרטי.

3.32 דוגמה: מטריצת ההעתקה הליניארית מ- $\mathbb{F}^2$ אל $\mathbb{F}^3$

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2, \mathbb{F}^3)$ מוגדרת על ידי

$$T(x, y) = (x + 3y, 2x + 5y, 7x + 9y).$$

מאחר ש- $T(1, 0) = (1, 2, 7)$ ו- $T(0, 1) = (3, 5, 9)$, המטריצה של T ביחס לבסיסים הסטנדרטיים היא המטריצה 3×2 להלן:

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

בעבודה עם $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ השימוש יהיה בבסיס הסטנדרטי $1, x, x^2, \dots, x^m$ אלא אם כן עולה אחרת מההקשר.

3.33 דוגמה: המטריצה של העתקת הגזירה מ- $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ אל $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

נניח ש- $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ העתקת הגזירה המוגדרת על ידי $Dp = p'$. מאחר ש- $(x^n)' = nx^{n-1}$, המטריצה של D ביחס לבסיסים הסטנדרטיים היא מטריצה 3×4 כדלהלן:

$$\mathcal{M}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

חיבור וכפל בסקלר של מטריצות

מכאן ואילך עד לסוף יחידה זו, הניחו ש- U, V ו- W מרחבים מממד סופי ובנוסף שנבחרו כבר בסיסים עבור מרחבים אלו. לפיכך, עבור כל העתקה ליניארית מ- V ל- W , נוכל לדון במטריצה שלה (ביחס לבסיסים שנבחרו).

האם מטריצת הסכום של שתי העתקות ליניאריות שווה לסכום המטריצות של שתי ההעתקות? בשלב זה לשאלה זו אין עדיין משמעות, משום שאף שכבר הגדרנו סכום של שתי העתקות ליניאריות, עדיין לא הגדרנו סכום של מטריצות. למזלנו, להגדרה הטבעית של סכום שתי מטריצות יש את התכונות המתאימות. בפרט, נגדיר כדלהלן:

3.34 הגדרה: חיבור מטריצות

הסכום של שתי מטריצות מאותו הגודל הוא המטריצה המתקבלת באמצעות חיבור איברים תואמים בין המטריצות:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m,1} & \cdots & C_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} + C_{1,1} & \cdots & A_{1,n} + C_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} + C_{m,1} & \cdots & A_{m,n} + C_{m,n} \end{pmatrix}.$$

במסקנה הבאה, ההנחה היא שנעשה שימוש באותם בסיסים עבור כל שלוש ההעתקות S, T ו- $S + T$.

3.35 המטריצה של סכום העתקות ליניאריות

נניח ש- $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי $\mathcal{M}(S + T) = \mathcal{M}(S) + \mathcal{M}(T)$.

הווידוא שהמסקנה לעיל נובעת מההגדרות מושאר בידי הקוראים.

עדיין תחת הנחת העבודה שהוגדרו בסיסים, נשאל את השאלה הבאה: האם המטריצה של העתקה המוכפלת בסקלר שווה למכפלת הסקלר במטריצה של ההעתקה? ושוב, בשלב זה לשאלה זו אין עדיין משמעות, משום שעדיין לא הגדרנו כפל מטריצה בסקלר. למזלנו, להגדרה הטבעית יש את התכונות המתאימות.

3.36 הגדרה: כפל סקלר במטריצה

מכפלת סקלר במטריצה היא המטריצה שמתקבלת בהכפלת כל איבר במטריצה בסקלר:

$$\lambda \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} & \cdots & \lambda A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{m,1} & \cdots & \lambda A_{m,n} \end{pmatrix}.$$

3.37 דוגמה: חיבור וכפל בסקלר של מטריצות

$$2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -1 & 16 \end{pmatrix}$$

במסקנה הבאה, ההנחה היא כי נעשה שימוש באותם בסיסים עבור שתי ההעתקות הליניאריות λT ו- T .

3.38 המטריצה של מכפלת סקלר בהעתקה ליניארית

נניח ש- $\lambda \in \mathbf{F}$ ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי $\mathcal{M}(\lambda T) = \lambda \mathcal{M}(T)$.

גם וידוא המסקנה לעיל מושאר בידי הקוראים.
 כעת, כשחיבור וכפל בסקלר מוגדרים עבור מטריצות, אל תופתעו שמופיע מרחב וקטורי. תחילה נכיר מספר סימונים כך שלמרחב הווקטורי הזה יהיה שם, ואז נמצא את ממדו.

3.39 סימון: $\mathbf{F}^{m,n}$

עבור m ו- n מספרים שלמים חיוביים, קבוצת כל המטריצות $m \times n$ עם איברים ב- $\mathbf{F}$ מסומנת ב- $\mathbf{F}^{m,n}$.

3.40 $\dim \mathbf{F}^{m,n} = mn$

נניח ש- m ו- n מספרים שלמים חיוביים. עם פעולות החיבור והכפל בסקלר כפי שהוגדרו לעיל, $\mathbf{F}^{m,n}$ מרחב וקטורי מממד mn .

הוכחה ההוכחה לכך ש- $\mathbf{F}^{m,n}$ הוא מרחב וקטורי מושארת בידי הקוראים. נשים לב כי איבר הזהות לחיבור של $\mathbf{F}^{m,n}$ הוא מטריצה $m \times n$ שכל איבריה 0. עליכם לוודא בנוסף שהרשימה של המטריצות $m \times n$ השונות זו מזו, שכל איבריהן 0 למעט 1 באיבר אחד, היא בסיס של $\mathbf{F}^{m,n}$. יש mn מטריצות שכאלה ולכן הממד של $\mathbf{F}^{m,n}$ הוא mn .

כפל מטריצות

נניח, כמו קודם לכן, ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V ו- $w_1, \dots, w_m$ בסיס של W . נניח בנוסף ש- $u_1, \dots, u_p$ בסיס של U .

נתבונן בהעתקות ליניאריות $T: U \rightarrow V$ ו- $S: V \rightarrow W$. ההרכבה ST היא העתקה ליניארית מ- U ל- W . האם $\mathcal{M}(ST)$ שווה ל- $\mathcal{M}(S)\mathcal{M}(T)$? לשאלה זו אין עדיין משמעות, משום שעדיין לא הגדרנו מכפלת שתי מטריצות. אנו נבחר הגדרת כפל מטריצות כזו שהתשובה לשאלה זו תהיה חיובית. הבה ניגש למלאכה.

נניח ש- $\mathcal{M}(S) = A$ ו- $\mathcal{M}(T) = B$. עבור $1 \leq k \leq p$, נקבל

$$\begin{aligned}(ST)u_k &= S\left(\sum_{r=1}^n B_{r,k}v_r\right) \\ &= \sum_{r=1}^n B_{r,k}Sv_r \\ &= \sum_{r=1}^n B_{r,k} \sum_{j=1}^m A_{j,r}w_j \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{r=1}^n A_{j,r}B_{r,k}\right)w_j.\end{aligned}$$

לפיכך $\mathcal{M}(ST)$ היא מטריצה $m \times p$ שהאיבר שלה בשורה j , עמודה k , שווה ל-

$$\sum_{r=1}^n A_{j,r}B_{r,k}.$$

כעת נראה איך להגדיר כפל מטריצות כך שהמשוואה $\mathcal{M}(ST) = \mathcal{M}(S)\mathcal{M}(T)$ תתקיים.

3.41 הגדרה: כפל מטריצות

נניח ש- A מטריצה $m \times n$ ו- B מטריצה $n \times p$. אזי AB מוגדרת כמטריצה $m \times p$ שאיבריה בשורה j , עמודה k , נתונים על ידי המשוואה

$$(AB)_{j,k} = \sum_{r=1}^n A_{j,r}B_{r,k}.$$

לפיכך, האיבר בשורה j , עמודה k , של AB מחושב באופן שבו לוקחים את שורה j של A ואת עמודה k של B , כופלים איברים תואמים, ואז סוכמים.

ייתכן מאוד שכבר למדתם על כפל מטריצות בקורס קודם, אך ייתכן גם שלא נחשפתם לפוטנציאל הגדרת הכפל באופן זה.

שימו לב כי אנו מגדירים מכפלת שתי מטריצות רק כאשר מספר העמודות במטריצה הראשונה שווה למספר השורות במטריצה השנייה.

3.42 דוגמה: כפל מטריצות

כאן אנו כופלים מטריצה 3×2 במטריצה 2×4 , ומקבלים מטריצה 3×4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 4 & 1 \\ 26 & 19 & 12 & 5 \\ 42 & 31 & 20 & 9 \end{pmatrix}.$$

כפל מטריצות אינו פעולה קומוטטיבית— AB אינה בהכרח שווה ל- BA גם אם שתי המכפלות מוגדרות (ראו תרגיל 10). כפל מטריצות הוא דיסטריבוטיבי ואסוציאטיבי (ראו תרגילים 11 ו-12).

במסקנה הבאה, אנו מניחים כי נעשה שימוש באותו בסיס של V כשאנו מתבוננים ב- $T \in \mathcal{L}(U, V)$ ו- $S \in \mathcal{L}(V, W)$, ושימוש באותו בסיס של W כשאנו מתבוננים ב- $S \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $ST \in \mathcal{L}(U, W)$, ושימוש באותו בסיס של U כשאנו מתבוננים ב- $T \in \mathcal{L}(U, V)$ ו- $ST \in \mathcal{L}(U, W)$.

3.43 מטריצת מכפלת העתקות ליניאריות

אם $T \in \mathcal{L}(U, V)$ ו- $S \in \mathcal{L}(V, W)$, אזי $\mathcal{M}(ST) = \mathcal{M}(S)\mathcal{M}(T)$.

הוכחת המסקנה לעיל היא החישוב שביצענו כמוטיבציה טרם ההגדרה של כפל מטריצות.

בקטע הסימון הבא, שימו לב כי, כהרגלנו, האינדקס הראשון מתייחס לשורה והשני לעמודה, עם נקודה ממורכזת אנכית המשמשת כממלאת-מקום.

3.44 סימון: $A_{j,\cdot}$, $A_{\cdot,k}$

נניח ש- A מטריצה $m \times n$.

- אם $1 \leq j \leq m$, אזי $A_{j,\cdot}$ הוא הסימון למטריצה $1 \times n$ המורכבת משורה j של A .
- אם $1 \leq k \leq n$, אזי $A_{\cdot,k}$ הוא הסימון למטריצה $m \times 1$ המורכבת מעמודה k של A .

3.45 דוגמה: $A_{j,\cdot}$ שווה לשורה ה- j^{th} של A ו- $A_{\cdot,k}$ שווה לעמודה ה- k^{th} של A

הסימון $A_{2,\cdot}$ מייצג את השורה השנייה של A ו- $A_{\cdot,2}$ מייצג את העמודה השנייה

של A . לפיכך, אם $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$, אזי

$$A_{2,\cdot} = (1 \ 9 \ 7) \quad \text{וגם} \quad A_{\cdot,2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

מכפלת מטריצה $1 \times n$ במטריצה $n \times 1$ היא מטריצה 1×1 . אולם, לעיתים קרובות נתייחס אל מטריצה 1×1 כאל האיבר שלה. לדוגמה,

$$(3 \ 4) \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = (26)$$

מאחר ש- $26 = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 2$. עם זאת, אנו יכולים להתייחס ל- (26) כ- 26 , כך

$$(3 \ 4) \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 26$$

המסקנה הבאה משתמשת במוסכמה שתוארה בפסקה לעיל כדי לחשוב על כפל מטריצות באופן אחר. לדוגמה, המסקנה הבאה בשילוב עם החישוב בפסקה לעיל מסבירה מדוע האיבר בשורה 2, עמודה 1, של המכפלה בדוגמה 3.42 שווה 26.

3.46 איבר במכפלת מטריצות שווה לכל שורה בעמודה

נניח ש- A היא מטריצה $m \times n$ ו- B מטריצה $n \times p$. אזי
 $(AB)_{j,k} = A_{j,\cdot} \cdot B_{\cdot,k}$
 עבור $1 \leq j \leq m$ ו- $1 \leq k \leq p$. במילים אחרות, האיבר בשורה j , עמודה k , של AB שווה ל- (שורה j של A) כפול (עמודה k של B).

הוכחה נניח ש- $1 \leq j \leq m$ ו- $1 \leq k \leq p$. הגדרת כפל מטריצות קובעת ש-

$$(AB)_{j,k} = A_{j,1}B_{1,k} + \dots + A_{j,n}B_{n,k}. \quad 3.47$$

הגדרת כפל מטריצות קובעת בנוסף שמכפלת המטריצה $A_{j,\cdot}$ $1 \times n$ והמטריצה $B_{\cdot,k}$ $n \times 1$ היא מטריצה 1×1 שאיברה הוא המספר באגף הימני של המשוואה לעיל. לפיכך, האיבר בשורה j , עמודה k , של AB שווה ל- (שורה j של A) כפול (עמודה k של B).

המסקנה הבאה מעניקה לנו נקודת מבט נוספת על כפל מטריצות. במסקנה להלן, $(AB)_{\cdot,k}$ היא עמודה k של AB מטריצה $m \times p$. לפיכך $(AB)_{\cdot,k}$ היא מטריצה $m \times 1$. בנוסף, $AB_{\cdot,k}$ היא מטריצה $m \times 1$. מאחר שהיא מכפלה של מטריצה $m \times n$ במטריצה $n \times 1$. לפיכך גודל המטריצות בשני אגפי המשוואה שווה, וסביר לשער שהן אף שוות.

3.48 עמודת מכפלת מטריצות שווה למטריצה כפול עמודה

נניח ש- A מטריצה $m \times n$ ו- B מטריצה $n \times p$. אזי
 $(AB)_{\cdot,k} = AB_{\cdot,k}$
 עבור $1 \leq k \leq p$. כלומר, עמודה k של AB שווה ל- A כפול עמודה k של B .

הוכחה כפי שאמרנו לעיל, $(AB)_{\cdot,k}$ ו- $AB_{\cdot,k}$ שתיהן מטריצות $m \times 1$. אם $1 \leq j \leq m$ אזי האיבר בשורה j של $(AB)_{\cdot,k}$ הוא האגף השמאלי של 3.47 והאיבר בשורה j של $AB_{\cdot,k}$ הוא האגף הימני של 3.47. לפיכך $(AB)_{\cdot,k} = AB_{\cdot,k}$.

המסקנה הבאה מעניקה נקודת מבט נוספת על מכפלת מטריצה $m \times n$ במטריצה $n \times 1$, כשאת המוטיבציה לכך נראה בדוגמה הבאה.

3.49 דוגמה: מכפלת מטריצה 3×2 במטריצה 2×1

השתמשו בהגדרות שלנו ובכללי החשבון הבסיסיים כדי לוודא שאכן

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \\ 31 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

לפיכך בדוגמה זו, מכפלת מטריצה 3×2 במטריצה 2×1 היא צירוף ליניארי של עמודות המטריצה 3×2 , כאשר הסקלרים (5 ו-1) המכפילים את העמודות מגיעים מהמטריצה 2×1 .

המסקנה הבאה מכלילה את הדוגמה לעיל.

3.50 צירוף ליניארי של עמודות

נניח ש- A מטריצה $m \times n$ ו- $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ מטריצה $n \times 1$. אזי

$$Ab = b_1 A_{\cdot,1} + \dots + b_n A_{\cdot,n}.$$

במילים אחרות, Ab היא צירוף ליניארי של עמודות A , כאשר הסקלרים המכפילים את העמודות מגיעים מ- b .

הוכחה אם $k \in \{1, \dots, m\}$, אזי הגדרת כפל מטריצות גוררת שהאיבר בשורה k של המטריצה Ab $m \times 1$ הוא

$$A_{k,1}b_1 + \dots + A_{k,n}b_n.$$

האיבר בשורה k של $b_1 A_{\cdot,1} + \dots + b_n A_{\cdot,n}$ גם הוא שווה למספר המוצג לעיל.

מאחר של- Ab ול- $b_1 A_{\cdot,1} + \dots + b_n A_{\cdot,n}$ יש אותו איבר בשורה k לכל $k \in \{1, \dots, m\}$,
אנו מסיקים ש- $Ab = b_1 A_{\cdot,1} + \dots + b_n A_{\cdot,n}$.

שתי המסקנות האחרונות שלנו התמקדו בעמודות המטריצה. מסקנות דומות מתקיימות גם עבור שורות המטריצה. בפרט, ראו תרגילים 8 ו-9, שניתנים להוכחה באמצעות שינויים מתאימים שנבצע בהוכחות של 3.48 ו-3.50.

המסקנה הבאה היא הכלי העיקרי שישמש אותנו בתת־היחידה הבאה להוכחת פירוק עמודה־שורה (3.56) ולהוכחה כי דרגת העמודות של המטריצה שווה לדרגת השורות (3.57). כדי לשמור על עקביות הסימונים שבהם נשתמש לרוב בפירוק עמודה־שורה, כולל בתת־היחידה הבאה, המטריצות במסקנה הבאה תיקראנה C ו- R במקום A ו- B .

3.51 כפל מטריצות כצירוף ליניארי של עמודות או שורות

נניח ש- C מטריצה $m \times c$ ו- R מטריצה $c \times n$.

א. אם $k \in \{1, \dots, n\}$, אזי עמודה k של CR היא צירוף ליניארי של עמודות C , כאשר מקדמי הצירוף מגיעים מעמודה k של R .

ב. אם $j \in \{1, \dots, m\}$, אזי שורה j של CR היא צירוף ליניארי של שורות R , כאשר מקדמי הצירוף מגיעים משורה j של C .

הוכחה נניח ש- $k \in \{1, \dots, n\}$. אזי עמודה k של CR שווה ל- $CR_{\cdot,k}$ (לפי 3.48), השווה לצירוף הליניארי של עמודות C עם מקדמים המגיעים מ- $R_{\cdot,k}$ (לפי 3.50). לפיכך (א) מתקיים.

להוכחת (ב), השתמשו בתבנית ההוכחה של (א), החליפו עמודות בשורות והשתמשו בתרגילים 8 ו-9 במקום 3.48 ו-3.50.

פירוק עמודה-שורה ודרגת מטריצה

נפתח בהגדרת שני מספרים שלמים אי-שליליים המשיכים לכל מטריצה.

3.52 הגדרה: דרגת עמודות, דרגת שורות

נניח ש- A מטריצה $m \times n$ עם איברים ב- F .

- דרגת העמודות של A היא ממד הפריסה של עמודות A ב- $F^{m,1}$.
- דרגת השורות של A היא ממד הפריסה של שורות A ב- $F^{1,n}$.

אם A מטריצה $m \times n$, אזי דרגת העמודות של A היא לכל היותר n (שכן יש n עמודות ב- A) ודרגת העמודות של A היא גם לכל היותר m (שכן $\dim F^{m,1} = m$).
באותו האופן, דרגת השורות של A היא לכל היותר $\min\{m, n\}$.

3.53 דוגמה: דרגת עמודות ודרגת שורות של מטריצה 2×4

נניח ש-

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

דרגת העמודות של A היא הממד של

$$\text{span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$$

ב- $F^{2,1}$. אף אחד משני הווקטורים הראשונים ברשימה לעיל ב- $F^{2,1}$ אינו כפולת סקלר של האחר. לפיכך ממד הפריסה של רשימה זו באורך ארבע הוא לפחות שניים. ממד הפריסה של רשימת וקטורים זו ב- $F^{2,1}$ אינו יכול להיות גדול משניים מאחר ש- $\dim F^{2,1} = 2$. לפיכך, ממד הפריסה של רשימה זו הוא שניים, ומשמעות הדבר היא כי דרגת העמודות של A היא שתיים.

דרגת השורות של A היא הממד של

$$\text{span} \left((4 \ 7 \ 1 \ 8), (3 \ 5 \ 2 \ 9) \right)$$

ב- $F^{1,4}$. אף אחד משני הווקטורים ברשימה לעיל ב- $F^{1,4}$ אינו כפולת סקלר של האחר. לפיכך, ממד הפריסה של רשימה זו בת שני וקטורים הוא שניים, ולכן דרגת השורות של A היא שתיים.

כעת נגדיר מטריצה משוחלפת.

3.54 הגדרה: מטריצה משוחלפת, A^t

המטריצה המשוחלפת של A , המסומנת ב- A^t , היא המטריצה המתקבלת מ- A על ידי הפיכת כל שורה לעמודה (שחלוף). ליתר דיוק, אם A מטריצה $m \times n$, אזי A^t היא מטריצה $n \times m$ שאיבריה נתונים על ידי המשוואה

$$(A^t)_{k,j} = A_{j,k}.$$

3.55 דוגמה: מטריצה משוחלפת

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 8 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \text{ אזי } A^t = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ -7 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

שימו לב שכאן A מטריצה 3×2 ו- A^t מטריצה 2×3 .

למטריצה המשוחלפת תכונות אלגבריות נחמדות: $(A+B)^t = A^t + B^t$, $(\lambda A)^t = \lambda A^t$ ו- $(AC)^t = C^t A^t$ לכל A, B מטריצות $m \times n$, לכל $\lambda \in F$, ולכל C מטריצה $n \times p$ (ראו תרגילים 14 ו-15). המסקנה הבאה תשמש ככלי העיקרי להוכחת הטענה שדרגת העמודות שווה לדרגת השורות (ראו 3.57).

3.56 פירוק עמודה-שורה

נניח ש- A מטריצה $m \times n$ עם איברים ב- F ודרגת העמודות $c \geq 1$. אזי, קיימות C מטריצה $m \times c$ ו- R מטריצה $c \times n$, שתיהן עם איברים ב- F , כך ש- $A = CR$.

הוכחה כל עמודה של A היא מטריצה $m \times 1$. רשימת העמודות $A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot n}$ של A יכולה להצטמצם לבסיס של פריסת העמודות של A (לפי 2.30). אורכו של בסיס זה הוא c , לפי הגדרת דרגת העמודות. נוכל לצרף את c העמודות בבסיס זה לכדי מטריצה $m \times c$ שנסמן ב- C .

אם $k \in \{1, \dots, n\}$, אזי עמודה k של A היא צירוף ליניארי של עמודות C . את מקדמי הצירוף הליניארי נציב כעמודה k של מטריצה $c \times n$ שאותה נסמן ב- R . ונקבל $A = CR$ כפי שנובע מ- 3.51(א).

בדוגמה 3.53, קיבלנו שדרגת העמודות ודרגת השורות שוות זו לזו. המסקנה הבאה קובעת ששוויון זה מתקיים בכל המטריצות.

3.57 דרגת העמודות שווה לדרגת השורות

נניח ש- $A \in F^{m,n}$. אזי דרגת העמודות של A שווה לדרגת השורות של A .

הוכחה נסמן ב- c את דרגת העמודות של A . אם $c = 0$, אזי $A = 0$ ולכן גם דרגת השורות של A שווה ל-0. לפיכך אנו יכולים להניח ש- $c \geq 1$.

נסמן ב- $A = CR$ את פירוק עמודה-שורה של A שניתן על ידי 3.56, כאשר C היא מטריצה $m \times c$ ו- R היא מטריצה $c \times n$. אזי מ- 3.51(ב) נקבל שכל שורה של A היא צירוף ליניארי של שורות R . מאחר שמספר השורות של R הוא c , נסיק שדרגת השורות של A היא קטנה או שווה לדרגת העמודות c של A .

להוכחת אי השוויון בכיוון השני, נפעיל את הפסקה הקודמת על A^t ונקבל

$$\text{דרגת העמודות של } A = \text{דרגת השורות של } A^t$$

$$\geq \text{דרגת העמודות של } A^t$$

$$= \text{דרגת השורות של } A.$$

לפיכך דרגת העמודות של A שווה לדרגת השורות של A .

מאחר שדרגת העמודות שווה לדרגת השורות, המסקנה האחרונה מאפשרת לנו לחדול מהשימוש במונחים "דרגת העמודות" ו"דרגת השורות" ולהשתמש במונח הפשוט יותר "דרגה".

3.58 הגדרה: דרגה

דרגת המטריצה $A \in \mathbb{F}^{m,n}$ היא דרגת העמודות של A .

ראו 3.133 ותרגיל 8 ביחידה 1ז להוכחות חלופיות לכך שדרגת העמודות שווה לדרגת השורות.

תרגילים 3ג

1 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הראו כי ביחס לכל בחירה של בסיסים עבור V ו- W , למטריצה של T יש לכל הפחות $\dim \text{range } T$ איברים שאינם אפס.

2 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$, כאשר V ו- W מממד סופי ושונים מאפס. הוכיחו כי $\dim \text{range } T = 1$ אם ורק אם קיימים בסיס של V ובסיס של W כך שביחס לבסיסים אלו, כל האיברים של $\mathcal{M}(T)$ שווים 1.

3 נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V ו- $w_1, \dots, w_m$ בסיס של W .

א. הראו שאם $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$, אזי $\mathcal{M}(S + T) = \mathcal{M}(S) + \mathcal{M}(T)$.

ב. הראו שאם $\lambda \in \mathbb{F}$ ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$, אזי $\mathcal{M}(\lambda T) = \lambda \mathcal{M}(T)$.

תרגיל זה מבקש מכס לזווד את 3.35 ואת 3.38.

4 נניח ש- $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ היא העתקת הגזירה המוגדרת על ידי $Dp = p'$. מצאו בסיס של $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ ובסיס של $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ כך שהמטריצה של D ביחס לבסיסים אלו היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

השוו עם דוגמה 3.33. התרגיל הבא מכליל תרגיל זה.

5 נניח ש- V ו- W מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הוכיחו שקיימים בסיס של V ובסיס של W כך שביחס לבסיסים אלו, כל איברי $\mathcal{M}(T)$ הם 0 מלבד אלו שבשורה k , עמודה k , השווים 1 אם $1 \leq k \leq \dim \text{range } T$.

6 נניח ש- $v_1, \dots, v_m$ בסיס של V ו- $w_1, \dots, w_n$ בסיס של W . הוכיחו שקיים בסיס $w_1, \dots, w_n$ של W כך שכל איברי העמודה הראשונה של $\mathcal{M}(T)$ [ביחס לבסיסים $v_1, \dots, v_m$ ו- $w_1, \dots, w_n$] הם 0, למעט אולי איבר שערכו 1 בשורה הראשונה, בעמודה הראשונה.

בתרגיל זה, בשונה מתרגיל 5, אתם מקבלים בסיס נתון של V במקום האפשרות לבחור בסיס עבור V .

7 נניח ש- $w_1, \dots, w_n$ בסיס של W ו- V מממד סופי. נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ הוכיחו שקיים בסיס $v_1, \dots, v_m$ של V כך שכל האיברים בשורה הראשונה של $\mathcal{M}(T)$ [ביחס לבסיסים $v_1, \dots, v_m$ ו- $w_1, \dots, w_n$] הם 0, למעט אולי איבר שערכו 1 בשורה הראשונה, בעמודה הראשונה.

בתרגיל זה, בשונה מתרגיל 5, אתם מקבלים בסיס נתון של W במקום האפשרות לבחור בסיס עבור W .

8 נניח ש- A מטריצה $m \times n$ ו- B מטריצה $n \times p$. הוכיחו ש-

$$(AB)_{j\cdot} = A_{j\cdot} B$$

כל $1 \leq j \leq m$. כלומר, הראו ששורה j של AB שווה ל- (שורה j של A) כפול B . תרגיל זה הוא גרסת השורה של 3.48.

9 נניח ש- $a = (a_1 \dots a_n)$ מטריצה $1 \times n$ ו- B מטריצה $n \times p$. הוכיחו ש-

$$aB = a_1 B_{1\cdot} + \dots + a_n B_{n\cdot}.$$

כלומר, הראו ש- aB היא צירוף ליניארי של שורות B , כאשר הסקלרים המכפילים את השורות מגיעים מ- a .

תרגיל זה הוא גרסת השורה של 3.50.

10 הביאו דוגמה ל- A ו- B , מטריצות 2×2 , כך ש- $AB \neq BA$.

11 הוכיחו שתכונת הדיסטריבוטיביות מתקיימת עבור חיבור וכפל מטריצות. במילים אחרות, נניח ש- A, B, C, D, E מטריצות שגודלן כזה ש- $A(B+C)$ ו- $(D+E)F$ מוגדרות. הסבירו מדוע $AB+AC$ ו- $DF+EF$ שניהן מוגדרות ובנוסף הוכיחו כי

$$A(B+C) = AB+AC \quad \text{וגם} \quad (D+E)F = DF+EF.$$

12 הוכיחו שכפל מטריצות הוא אסוציאטיבי. במילים אחרות, נניח ש- A, B ו- C מטריצות שגודלן כזה ש- $(AB)C$ מוגדרת. הסבירו מדוע $A(BC)$ מוגדרת והוכיחו כי

$$(AB)C = A(BC).$$

נסו למצוא הוכחה אלגנטית הממחישה את הציטוט הבא של אמיל ארטיין: "מיניסיוני, ניתן לקצר הוכחות העוסקות במטריצות ב- 50% אם משליכים את המטריצות החוצה."

13 נניח ש- A מטריצה $n \times n$ ו- $1 \leq j, k \leq n$. הראו שהאיבר בשורה j , עמודה k , של A^3 (המוגדרת כ- AAA) הוא

$$\sum_{p=1}^n \sum_{r=1}^n A_{j,p} A_{p,r} A_{r,k}.$$

14 נניח ש- m ו- n מספרים שלמים חיוביים. הוכיחו שהפונקציה $A \mapsto A^t$ היא העתקה ליניארית מ- $F^{n,m}$ אל $F^{m,n}$.

15 הוכיחו שאם A מטריצה $m \times n$ ו- C מטריצה $n \times p$, אזי

$$(AC)^t = C^t A^t.$$

תרגיל זה מראה שהמשוחלפת של מכפלת שתי מטריצות היא מכפלת המשוחלפות בסדר הפוך.

16 נניח ש- A מטריצה $m \times n$ ו- $A \neq 0$. הוכיחו שדרגת A היא 1 אם ורק אם קיימים $(c_1, \dots, c_m) \in \mathbf{F}^m$ ו- $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbf{F}^n$ כך ש- $A_{j,k} = c_j d_k$ לכל $j = 1, \dots, m$ ו- $k = 1, \dots, n$.

17 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $u_1, \dots, u_n$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיסים של V . הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים.

א. T חד-חד-ערכית.

ב. עמודות $\mathcal{M}(T)$ בלתי תלויות ליניארית ב- $\mathbf{F}^{n,1}$.

ג. עמודות $\mathcal{M}(T)$ פורסות את $\mathbf{F}^{n,1}$.

ד. שורות $\mathcal{M}(T)$ פורסות את $\mathbf{F}^{1,n}$.

ה. שורות $\mathcal{M}(T)$ בלתי תלויות ליניארית ב- $\mathbf{F}^{1,n}$.

הסימון $\mathcal{M}(T)$ כאן משמעותו $(\mathcal{M}(T, (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)))$.

4g הפיכות ואיזומורפיזמים

העתקות ליניאריות הפיכות

אנו פותחים יחידה זו בהגדרת הרעיונות של הפיכות והופכיות בהקשר של העתקות ליניאריות.

3.59 הגדרה: הפיכה, הופכית

- העתקה ליניארית $T \in \mathcal{L}(V, W)$ נקראת הפיכה אם קיימת העתקה ליניארית $S \in \mathcal{L}(W, V)$ כך ש- ST שווה לאופרטור הזהות מעל V ו- TS שווה לאופרטור הזהות מעל W .
- העתקה ליניארית $S \in \mathcal{L}(W, V)$ המקיימת $ST = I$ ו- $TS = I$ נקראת הופכית של T (שימו לב כי ה- I הראשון הוא אופרטור הזהות מעל V ואילו ה- I השני הוא אופרטור הזהות מעל W).

ההגדרה לעיל מציינת "הופכית". אך לפי מה שנראה במסקנה הבאה, נוכל לשנות את המינוח ל"ההופכית".

3.60 הופכית היא יחידה

להעתקה ליניארית הפיכה יש הופכית יחידה.

הוכחה נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ הפיכה ו- S_1 ו- S_2 הופכיות של T . אזי

$$S_1 = S_1 I = S_1 (TS_2) = (S_1 T) S_2 = I S_2 = S_2.$$

לפיכך $S_1 = S_2$.

כעת כשאנו יודעים שההופכית יחידה נוכל להעניק לה סימון.

3.61 סימון: T^{-1}

אם T הפיכה, אזי ההופכית שלה מסומנת ב- T^{-1} . במילים אחרות, אם $T \in \mathcal{L}(V, W)$ הפיכה, אזי T^{-1} היא האיבר היחיד של $\mathcal{L}(W, V)$ כך ש- $T^{-1}T = I$ ו- $TT^{-1} = I$.

3.62 דוגמה: הופכית של העתקה ליניארית מ- $\mathbb{R}^3$ ל- $\mathbb{R}^3$

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ מוגדרת על ידי $T(x, y, z) = (-y, x, 4z)$. לפיכך, T היא סיבוב של 90° נגד כיוון השעון במישור xy ומתיחה פי 4 בכיוון ציר ה- z . לכן, ההעתקה ההופכית $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ היא סיבוב של 90° בכיוון השעון במישור xy ומתיחה פי $\frac{1}{4}$ בכיוון ציר ה- z :

$$T^{-1}(x, y, z) = (y, -x, \frac{1}{4}z).$$

המסקנה הבאה מראה כי העתקה ליניארית היא הפיכה אם-ורק-אם היא העתקה חד-חד-ערכית ועל.

3.63 הפיכות $\Leftrightarrow$ חד-חד-ערכיות ותכונת העל

העתקה ליניארית היא הפיכה אם-ורק-אם היא חד-חד-ערכית ועל.

הוכחה נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. עלינו להראות ש- T הפיכה אם-ורק-אם היא חד-חד-ערכית ועל.

ראשית נניח כי T הפיכה. כדי להראות ש- T חד-חד-ערכית, נניח ש- $u, v \in V$ ו- $Tu = Tv$ אזי

$$u = T^{-1}(Tu) = T^{-1}(Tv) = v,$$

ומכאן ש- $u = v$. לכן T חד-חד-ערכית.

אנו עדיין מניחים ש- T הפיכה. נרצה כעת להוכיח ש- T על. לצורך כך, יהי $w \in W$. אזי $w = T(T^{-1}w)$, מה שמראה ש- w בטווח של T . לפיכך $\text{range } T = W$. לכן T על ובכך השלמנו כיוון זה של ההוכחה.

כעת נניח ש- T חד-חד-ערכית ועל. ברצוננו להוכיח כי T הפיכה. לכל $w \in W$, נגדיר את $S(w)$ כאיבר היחיד של V כך ש- $T(S(w)) = w$ (קיומו ויחידותו של איבר זה הם תוצאה ישירה של היות T על וחד-חד-ערכית). מהגדרת S נסיק ש- $T \circ S$ שווה לאופרטור הזהות מעל W .

כדי להוכיח ש- $S \circ T$ שווה לאופרטור הזהות מעל V , יהי $v \in V$. אזי

$$T((S \circ T)v) = (T \circ S)(Tv) = I(Tv) = Tv.$$

משוואה זו גוררת כי $(S \circ T)v = v$ (מאחר ש- T חד-חד-ערכית). לפיכך $S \circ T$ שווה לאופרטור הזהות מעל V .

להשלמת ההוכחה, עלינו להראות ש- S ליניארית. לשם כך, נניח כי $w_1, w_2 \in W$ אזי

$$T(S(w_1) + S(w_2)) = T(S(w_1)) + T(S(w_2)) = w_1 + w_2.$$

לפיכך $S(w_1) + S(w_2)$ הוא האיבר היחיד של V שאותו T מעתיקה ל- $w_1 + w_2$. מהגדרת S נסיק ש- $S(w_1 + w_2) = S(w_1) + S(w_2)$. לכן S מקיימת את האדיטיביות הנדרשת לליניאריות.

ההוכחה להומוגניות היא דומה. ליתר דיוק, אם $w \in W$ ו- $\lambda \in \mathbb{F}$, אזי

$$T(\lambda S(w)) = \lambda T(S(w)) = \lambda w.$$

לפיכך $\lambda S(w)$ הוא האיבר היחיד של V שאותו T מעתיקה ל- λw . לפי הגדרת S , מכאן נסיק ש- $S(\lambda w) = \lambda S(w)$. לכן S ליניארית כפי שרצינו להוכיח. ■

עבור העתקה ליניארית ממרחב וקטורי לעצמו, ייתכן שתתהו האם חד-חד-ערכיות בלבד, או על בלבד, מספיקה כדי לקבוע שההעתקה הפיכה. מעל מרחב וקטורי מממד אינסופי, מקיום אחד מהתנאים לא נוכל להסיק הפיכות, כפי שנראה בדוגמה הבאה, המשתמשת בשתי העתקות מפורטות מדוגמה 3.3.

3.64 דוגמה: חד־חד־ערכיות או על אינה גוררת הפיכות

- ההעתקה הליניארית של ההכפלה ב- x^2 מ- $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ אל $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ (ראו 3.3) היא חד־חד־ערכית אך אינה הפיכה, מאחר שאינה על (הפולינום 1 אינו בטווח).
- ההעתקה הליניארית של ההסטה לאחר מ- $\mathbf{F}^\infty$ ל- $\mathbf{F}^\infty$ (ראו 3.3) היא על אך אינה הפיכה, מאחר שאינה חד־חד־ערכית [הווקטור $(1, 0, 0, 0, \dots)$ נמצא במרחב האפס].

לאור הדוגמה לעיל, המסקנה הבאה ראויה לציון—היא קובעת כי להעתקה ליניארית ממרחב וקטורי מממד סופי למרחב וקטורי מאותו הממד, די בקיום אחת התכונות — חד־חד־ערכיות או על — כדי להסיק את קיום האחרת. נשים לב כי ההנחה להלן ש- $\dim V = \dim W$ מתקיימת באופן אוטומטי במקרה המיוחד והחשוב שבו $V = W$ סופי ו- $W = V$.

3.65 חד־חד־ערכיות שקולה לעל (אם $\dim V = \dim W < \infty$)

נניח ש- V ו- W מרחבים וקטוריים מממד סופי, $\dim V = \dim W$, ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי T הפיכה אם ורק אם T חד־חד־ערכית אם ורק אם T על.

הוכחה המשפט היסודי של ההעתקות הליניאריות (3.21) קובע כי

$$3.66 \quad \dim V = \dim \text{null } T + \dim \text{range } T.$$

אם T חד־חד־ערכית (מה שלפי 3.15 שקול לכך ש- $\dim \text{null } T = 0$), אזי מהמשוואה לעיל נסיק ש-

$$\dim \text{range } T = \dim V - \dim \text{null } T = \dim V = \dim W,$$

מה שגורר כי T על (לפי 2.39).

בכיוון ההפוך, אם T על, אזי לפי 3.66 נסיק ש-

$$\dim \text{null } T = \dim V - \dim \text{range } T = \dim V - \dim W = 0,$$

מה שגורר כי T חד־חד־ערכית.

לפיכך הראינו ש- T חד־חד־ערכית אם ורק אם T על. לפיכך אם T חד־חד־ערכית או על, אזי T מקיימת את שתי התכונות, חד־חד־ערכית ועל, מה שמוביל למסקנה ש- T הפיכה. לכן T הפיכה אם ורק אם T חד־חד־ערכית אם ורק אם T על. ■

הדוגמה הבאה ממחישה את עוצמת המסקנה הקודמת. אמנם ניתן להוכיח את התוצאה שבדוגמה להלן ללא שימוש באלגברה ליניארית, אך ההוכחה המשתמשת באלגברה ליניארית היא אלגנטית ופשוטה יותר.

$$3.67 \quad \text{דוגמה: קיים פולינום } p \text{ כך ש-} ((x^2 + 5x + 7)p)'' = q$$

ההעתקה הליניארית

$$p \mapsto ((x^2 + 5x + 7)p)''$$

מ- $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ לעצמו היא חד-חד-ערכית, כפי שאתם יכולים להראות. לפיכך, נתפתה להשתמש ב- 3.65 כדי להראות שהעתקה זו היא על. אולם דוגמה 3.64 מראה שהקסם של 3.65 אינו חל על המרחב הווקטורי מממד אינסופי $\mathcal{P}(\mathbf{R})$. את מגבלה זו נעקוף בכך שנתמקד במרחב הווקטורי מממד סופי $\mathcal{P}_m(\mathbf{R})$.

נניח ש- $q \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$. קיים מספר שלם אי-שלילי m כך ש- $q \in \mathcal{P}_m(\mathbf{R})$. נגדיר $T: \mathcal{P}_m(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{P}_m(\mathbf{R})$ על ידי

$$Tp = ((x^2 + 5x + 7)p)'.$$

הכפלת פולינום השונה מפולינום האפס ב- $(x^2 + 5x + 7)$ מגדילה את המעלה ב- 2, ואז גזירה כפולה מצמצמת את המעלה ב- 2. לפיכך T היא בהחלט העתקה ליניארית מ- $\mathcal{P}_m(\mathbf{R})$ לעצמו.

כל פולינום שנגזרתו השנייה היא 0 הוא מהצורה $ax + b$, כאשר $a, b \in \mathbf{R}$. לפיכך $\text{null } T = \{0\}$. לכן T חד-חד-ערכית.

לפיכך T היא העתקה על (לפי 3.65), כלומר, קיים פולינום $p \in \mathcal{P}_m(\mathbf{R})$ כך ש- $q = ((x^2 + 5x + 7)p)''$, כפי שנטען בכותרת הדוגמה.

תרגיל 35 ביחידה 11 נותן דוגמה דומה אך מרהיבה יותר של שימוש ב- 3.65.

ההנחה במסקנה להלן ש- $\dim V = \dim W$ מתקיימת במקרה המיוחד והחשוב שבו V מממד סופי ו- $W = V$. לפיכך במקרה זה, המשוואה $ST = I$ מובילה למסקנה כי $ST = TS$, אף שתכונת הקומוטטיביות של הכפל אינה מתקיימת בהעתקות ליניאריות שרירותיות מ- V אל V .

$$3.68 \quad ST = I \text{ אס-יורק-אס } TS = I \text{ (מעל מרחבים וקטוריים מאותו הממד)}$$

נניח ש- V ו- W מרחבים וקטוריים מממד סופי ומאותו הממד, $S \in \mathcal{L}(W, V)$ ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי $ST = I$ אס-יורק-אס $TS = I$.

הוכחה תחילה נניח ש- $ST = I$. אם $v \in V$ ו- $Tv = 0$, אזי

$$v = Iv = (ST)v = S(Tv) = S(0) = 0.$$

לפיכך T חד-חד-ערכית (לפי 3.15). מאחר שממדי V ו- W זהים, נסיק ש- T הפיכה (לפי 3.65).

כעת נכפיל את שני אגפי המשוואה $ST = I$ ב- T^{-1} מימין ונקבל

$$S = T^{-1}.$$

לפיכך $TS = TT^{-1} = I$, כנדרש.

להוכחת התוצאה בכיוון ההפוך, פשוט נהפוך את תפקידי S ו- T (ו- V ו- W) בכיוון שכבר הוכחנו, ובכך נראה שאם $TS = I$ אזי $ST = I$.

מרחבים וקטוריים איזומורפיים

ההגדרה הבאה לוכדת את הרעיון של שני מרחבים וקטוריים שהם זהים במהותם, מלבד השוני בשמות איבריהם.

3.69 הגדרה: איזומורפיזם, איזומורפי

- איזומורפיזם הוא העתקה ליניארית הפיכה.
- שני מרחבים וקטוריים נקראים איזומורפיים אם קיים איזומורפיזם ממרחב וקטורי אחד על האחר.

נחשוב על איזומורפיזם $T: V \rightarrow W$ כעל תיוג מחדש של $v \in V$ כ- $Tv \in W$. נקודת מבט זו מסבירה מדוע לשני מרחבים וקטוריים איזומורפיים יש אותן תכונות מרחב וקטורי. המונח "איזומורפיזם" והמונח "העתקה ליניארית הפיכה" משמעותם זהה. נשתמש ב"איזומורפיזם" כשנרצה להדגיש את העובדה ששני המרחבים הם במהותם אותו מרחב.

עשוי להיות קשה לקבוע האם שני מבנים מתמטיים (כגון חבורות או מרחבים טופולוגיים) הם שווים במהותם, ושונים רק בשמות איברי קבוצות הנושא. ובכל זאת, במסקנה הבאה נראה שעלינו לבחון רק מספר אחד (הממד) כדי לקבוע האם שני מרחבים וקטוריים הם איזומורפיים.

3.70 המעד מורה האם שני מרחבים וקטוריים הם איזומורפיים

שני מרחבים וקטוריים מממד סופי מעל F הם איזומורפיים אם ורק אם לשניהם אותו ממד.

הוכחה ראשית נניח ש- V ו- W מרחבים וקטוריים איזומורפיים מממד סופי. לפיכך קיים איזומורפיזם T מ- V על W . מאחר ש- T הפיכה, מתקיים $\text{null } T = \{0\}$ וגם $\text{range } T = W$. לפיכך

$$\dim \text{null } T = 0 \quad \text{וגם} \quad \dim \text{range } T = \dim W.$$

הנוסחה

$$\dim V = \dim \text{null } T + \dim \text{range } T$$

(המשפט היסודי של ההעתקות הליניאריות המופיע ב- 3.21) הופכת אפוא למשוואה $\dim V = \dim W$, ובכך השלמנו את ההוכחה בכיוון אחד.

להוכחת הכיוון השני, נניח ש- V ו- W מרחבים וקטוריים מממד סופי זהה. יהי $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V ו- $w_1, \dots, w_n$ בסיס של W . תהא $T \in \mathcal{L}(V, W)$ המוגדרת על ידי

$$T(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = c_1 w_1 + \dots + c_n w_n.$$

אזי T היא העתקה ליניארית מוגדרת היטב שכן $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V . בנוסף, T על, מאחר ש- $w_1, \dots, w_n$ פורסת את W . יתר על כן, $\text{null } T = \{0\}$ שכן $w_1, \dots, w_n$ בלתי תלויה ליניארית. לפיכך T חד-חד-ערכית. מכיוון ש- T חד-חד-ערכית ועל, היא איזומורפיזם (ראו 3.63). לכן V ו- W איזומורפיים. ■

כל מרחב וקטורי מממד סופי הוא איזומורפי ל- F^n כלשהו. לפיכך, מדוע שלא נתמקד ב- F^n במקום במרחבים וקטוריים כלליים יותר? כתשובה לשאלה זו, נזכיר שהעיסוק ב- F^n יוביל אותנו למרחבים וקטוריים אחרים. לדוגמה, נגיע מהר מאוד לעסוק במרחב האפס ובטווח של העתקות ליניאריות. אפנים מרחבים אלו הם איזומורפיים ל- F^m כלשהם, אך לעסוק בהם ככאלה, לרוב, יוסיף מורכבות מבלי לספק תובנות חדשות.

מהמסקנה הקודמת נסיק שכל מרחב וקטורי מממד סופי V הוא איזומורפי ל- F^n , כאשר $n = \dim V$. לדוגמה, אם m מספר שלם אי-שלילי, אזי $\mathcal{P}_m(F)$ איזומורפי ל- F^{m+1} .

נזכיר כי הסימון $F^{m,n}$ מסמן את המרחב הווקטורי של מטריצות $m \times n$ עם איברים ב- F . אם $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V ו- $w_1, \dots, w_m$ בסיס של W , אזי לכל $T \in \mathcal{L}(V, W)$, יש לנו מטריצה $\mathcal{M}(T) \in F^{m,n}$. לפיכך משנקבעו בסיסים עבור V ו- W , המטריצה M הופכת לפונקציה מ- $\mathcal{L}(V, W)$ אל $F^{m,n}$. שימו לב כי 3.35 ו- 3.38 מראים ש- $\mathcal{M}$ העתקה ליניארית. העתקה ליניארית זו היא למעשה איזומורפיזם, כפי שנראה כעת.

3.71 $\mathcal{L}(V, W)$ ו- $F^{m,n}$ איזומורפיים

נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V ו- $w_1, \dots, w_m$ בסיס של W . אזי $\mathcal{M}$ היא איזומורפיזם בין $\mathcal{L}(V, W)$ ל- $F^{m,n}$.

הוכחה כבר ציינו את העובדה ש- $\mathcal{M}$ ליניארית. עלינו להוכיח ש- $\mathcal{M}$ חד-חד-ערכית ועל.

נתחיל בחד-חד-ערכיות. אם $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $\mathcal{M}(T) = 0$, אזי $Tv_k = 0$ לכל $k = 1, \dots, n$. מאחר ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V , מכאן נסיק ש- $T = 0$. לפיכך $\mathcal{M}$ חד-חד-ערכית (לפי 3.15).

להוכחה ש- $\mathcal{M}$ על, נניח ש- $A \in F^{m,n}$. לפי למת ההעתקה הליניארית (3.4), קיימת $T \in \mathcal{L}(V, W)$ כך ש-

$$Tv_k = \sum_{j=1}^m A_{j,k} w_j$$

לכל $k = 1, \dots, n$. מאחר ש- $\mathcal{M}(T)$ שווה ל- A , הטווח של $\mathcal{M}$ שווה ל- $F^{m,n}$, כפי שרצינו להוכיח.

כעת ביכולתנו לקבוע את ממד המרחב הווקטורי של העתקות ליניאריות ממרחב וקטורי מממד סופי אחד לאחר.

3.72 $\dim \mathcal{L}(V, W) = (\dim V)(\dim W)$

נניח ש- V ו- W מממד סופי. אזי $\mathcal{L}(V, W)$ הוא מממד סופי, ומתקיים $\dim \mathcal{L}(V, W) = (\dim V)(\dim W)$.

הוכחה המסקנה הרצויה נובעת מ- 3.71, 3.70, ו- 3.40.

העתקות ליניאריות ככפל מטריצות

הגדרנו לעיל את המטריצה של העתקה ליניארית. כעת נגדיר מטריצה של וקטור.

3.73 הגדרה: מטריצה של וקטור, $\mathcal{M}(v)$

נניח ש- $v \in V$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V . המטריצה של v ביחס לבסיס זה היא המטריצה $n \times 1$

$$\mathcal{M}(v) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

כאשר $b_1, \dots, b_n$ הם הסקלרים כך ש-

$$v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n.$$

המטריצה $\mathcal{M}(v)$ של וקטור $v \in V$ תלויה בבסיס $v_1, \dots, v_n$ של V וגם ב- v . עם זאת, הבסיס אמור להיות ידוע מההקשר, ולפיכך אינו נכלל בסימון.

3.74 דוגמה: מטריצה של וקטור

• המטריצה של הפולינום $2 - 7x + 5x^3 + x^4$ ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathcal{P}_4(\mathbf{R})$ היא

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• המטריצה של וקטור $x \in \mathbf{F}^n$ ביחס לבסיס הסטנדרטי מושגת באמצעות כתיבת הקואורדינטות של x כאיברים במטריצה $n \times 1$. כלומר, אם $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{F}^n$ אזי

$$\mathcal{M}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

לעיתים נרצה לחשוב על איברים של V כמתויגים מחדש כמטריצות $n \times 1$. משנבחר בסיס $v_1, \dots, v_n$, הפונקציה $\mathcal{M}$ המעתיקה $v \in V$ אל $\mathcal{M}(v)$ היא איזומורפיזם של V על $\mathbf{F}^{n,1}$ המממשת תיוג זה.

נזכיר שאם A היא מטריצה $m \times n$, אזי $A_{\cdot,k}$ מסמנת את העמודה ה- k^{th} של A , כשאנו חושבים עליה כמטריצה $m \times 1$. במסקנה הבאה, $\mathcal{M}(Tv_k)$ מחושבת ביחס לבסיס $w_1, \dots, w_m$ של W .

$$\mathcal{M}(T)_{\cdot,k} = \mathcal{M}(Tv_k) \quad 3.75$$

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V ו- $w_1, \dots, w_m$ בסיס של W . יהי $1 \leq k \leq n$. אזי העמודה ה- k^{th} של המטריצה $\mathcal{M}(T)$, המסומנת על ידי $\mathcal{M}(T)_{\cdot,k}$, שווה ל- $\mathcal{M}(Tv_k)$.

הוכחה המסקנה הרצויה נובעת באופן מיידי מההגדרות של $\mathcal{M}(T)$ ו- $\mathcal{M}(Tv_k)$.

המסקנה הבאה מראה כיצד המושגים של המטריצה של העתקה ליניארית, המטריצה של וקטור וכפל מטריצות משתלבים יחד.

$$3.76 \quad \text{העתקות ליניאריות פועלות כמו כפל מטריצות}$$

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $v \in V$. נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V ו- $w_1, \dots, w_m$ בסיס של W . אזי

$$\mathcal{M}(Tv) = \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(v).$$

הוכחה נניח ש- $v = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$, כאשר $b_1, \dots, b_n \in \mathbf{F}$. לפיכך

$$3.77 \quad Tv = b_1Tv_1 + \dots + b_nTv_n.$$

ולכן

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(Tv) &= b_1\mathcal{M}(Tv_1) + \dots + b_n\mathcal{M}(Tv_n) \\ &= b_1\mathcal{M}(T)_{\cdot,1} + \dots + b_n\mathcal{M}(T)_{\cdot,n} \\ &= \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(v), \end{aligned}$$

כאשר את השוויון הראשון אנו מסיקים מ- 3.77 ומהליניאריות של $\mathcal{M}$, השוויון השני נובע מ- 3.75, והשוויון האחרון נובע מ- 3.50.

כל A , מטריצה $m \times n$, משרה העתקה ליניארית מ- $\mathbf{F}^{n,1}$ אל $\mathbf{F}^{m,1}$, כלומר, פונקציית כפל המטריצות המעתיקה $x \in \mathbf{F}^{n,1}$ אל $Ax \in \mathbf{F}^{m,1}$. נוכל להשתמש במסקנה לעיל כדי לחשוב מחדש על כל העתקה ליניארית (ממרחב וקטורי מממד סופי אל מרחב וקטורי מממד סופי) כהעתקת כפל מטריצות אחרי תיוג מחדש מתאים באמצעות האיזומורפיזמים הנתונים על ידי $\mathcal{M}$. בפרט, אם $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ואנו נוזה את $v \in V$ עם $\mathcal{M}(v) \in \mathbf{F}^{n,1}$, אזי לפי המסקנה לעיל, נוכל לזהות את Tv עם $\mathcal{M}(T)\mathcal{M}(v)$.

מאחר שהמסקנה לעיל מאפשרת לנו (באמצעות איזומורפיזמים) לחשוב על כל העתקה ליניארית ככפל על $\mathbf{F}^{n,1}$ במטריצה A כלשהי, עלינו לזכור כי המטריצה המסוימת A תלויה לא רק בהגדרת ההעתקה כי אם גם בבחירת הבסיסים. נושא החוזר ברבות מהמסקנות החשובות ביותר בפרקים הבאים יהיה בחירת בסיס שיהפוך את המטריצה A לפשוטה ככל האפשר.

בספר זה אנו מתמקדים בעיקר בהעתקות ליניאריות, יותר מאשר במטריצות. אולם, לעיתים, תפיסת העתקות ליניאריות כמטריצות (ומטריצות כהעתקות ליניאריות) תעניק לנו תובנות חשובות ושימושיות.

שימו לב כי בניסוח המסקנה להלן בסיסים אינם מוזכרים כלל. אף ש- $\mathcal{M}(T)$ במסקנה הבאה תלויה בבחירת הבסיסים של V ו- W , מסקנה זו מראה כי דרגת העמודות של $\mathcal{M}(T)$ היא זהה בכל בחירה של בסיסים (שכן $\text{range } T$ אינו תלוי בבחירת בסיסים).

3.78 ממד $\text{range } T$ שווה לדרגת העמודות של $\mathcal{M}(T)$

נניח ש- V ו- W מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי $\dim \text{range } T$ שווה לדרגת העמודות של $\mathcal{M}(T)$.

הוכחה נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V ו- $w_1, \dots, w_m$ בסיס של W . ההעתקה הליניארית המעתיקה את $w \in W$ אל $\mathcal{M}(w)$ היא איזומורפיזם מ- W על המרחב $\mathbb{F}^{m,1}$ של וקטורי עמודה $m \times 1$. צמצום איזומורפיזם זה ל- $\text{range } T$ [השווה ל- $\text{span}(Tv_1, \dots, Tv_n)$ לפי תרגיל 10 ביחידה 2] הוא איזומורפיזם מ- $\text{range } T$ על $\text{span}(\mathcal{M}(Tv_1), \dots, \mathcal{M}(Tv_n))$. לכל $k \in \{1, \dots, n\}$, המטריצה $m \times 1$ $\mathcal{M}(Tv_k)$ שווה לעמודה k של $\mathcal{M}(T)$ לפיכך

$$\dim \text{range } T = \text{דרגת העמודות של } \mathcal{M}(T),$$

כנדרש.

שינוי בסיס

ביחידה 3 הגדרנו את המטריצה

$$\mathcal{M}(T, (v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_m))$$

של ההעתקה הליניארית T מ- V אל מרחב וקטורי זהה או אחר W , כאשר $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V ו- $w_1, \dots, w_m$ בסיס של W . במקרה של העתקה ליניארית ממרחב וקטורי לעצמו, בדרך כלל נשתמש באותו הבסיס עבור המרחב הווקטורי של התחום ועבור המרחב הווקטורי של היעד. כשאנו משתמשים בבסיס יחיד בשני התפקידים, לרוב נציין את הבסיס פעם אחת בלבד. כלומר, אם $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V , אזי הסימון $\mathcal{M}(T, (v_1, \dots, v_n))$ מוגדר על ידי המשוואה

$$\mathcal{M}(T, (v_1, \dots, v_n)) = \mathcal{M}(T, (v_1, \dots, v_n), (v_1, \dots, v_n)).$$

אם הבסיס $v_1, \dots, v_n$ ברור מההקשר, נוכל לרשום רק $\mathcal{M}(T)$.

3.79 הגדרה: מטריצת הזהות (היחידה), I

נניח ש- n מספר שלם חיובי. המטריצה $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

עם 1-ים באלכסון (האיברים שעבורם מספר השורה ומספר העמודה שווים) ואפסים בכל האיברים האחרים נקראת מטריצת הזהות ומסומנת ב- I .

בהגדרה לעיל, ה־ 0 בפינה השמאלית התחתונה מצביע על כך שכל האיברים תחת האלכסון הם 0 , וה־ 0 בפינה הימנית העליונה מצביע על כך שכל האיברים מעל האלכסון הם 0 .

ביחס לכל בסיס של V , המטריצה של אופרטור הזהות $I \in \mathcal{L}(V)$ היא מטריצת הזהות I . שימו לב שהסימון I משמש לסימון הן של אופרטור הזהות והן של מטריצת הזהות. מן ההקשר ברור לאיזה I אנו מתכוונים. לדוגמה, ניקח את המשוואה הבאה $\mathcal{M}(I) = I$; באגף השמאלי I מסמן את אופרטור הזהות, ובאגף הימני I מסמן את מטריצת הזהות.

אם A מטריצה ריבועית (כלומר מספר שורותיה ועמודותיה שווים) ובאותו הגודל כשל I , אזי $AI = IA = A$, כפי שעליכם לוודא.

3.80 הגדרה: הפיכה, הופכית, A^{-1}

מטריצה ריבועית A נקראת הפיכה אם קיימת מטריצה ריבועית B באותו הגודל כך שמתקיים $AB = BA = I$; אנו קוראים ל־ B ההופכית של A ומסמנים אותה ב־ A^{-1} .

ישנם מתמטיקאים המשתמשים במונחים **אי־סינגולרית** ו־**סינגולרית**, שמשמעותם זהה להפיכה ולבלתי הפיכה.

אותה הוכחה שבה השתמשנו ב־3.60 מראה שאם A מטריצה ריבועית הפיכה, אזי קיימת מטריצה יחידה B כך שמתקיים $AB = BA = I$ (ולפיכך הסימון $B = A^{-1}$ מוצדק).

אם A מטריצה הפיכה, אזי $(A^{-1})^{-1} = A$ מאחר ש־ $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

בנוסף, אם A ו־ C מטריצות ריבועיות הפיכות באותו הגודל, אזי AC הפיכה וגם $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$ מאחר ש־

$$\begin{aligned}(AC)(C^{-1}A^{-1}) &= A(CC^{-1})A^{-1} \\ &= AIA^{-1} \\ &= AA^{-1} \\ &= I,\end{aligned}$$

כמו כן $(C^{-1}A^{-1})(AC) = I$.

המסקנה הבאה מתקיימת מאחר שכפל מטריצות תוכנן והוגדר כך שנגיע לתוצאה זו—ראו 3.43 והחומר שקדם לו. כעת אנו פשוט מתייחסים במפורש לבסיסים הקשורים להעתקות.

3.81 מטריצת מכפלת העתקות ליניאריות

נניח ש־ $T \in \mathcal{L}(U, V)$ ו־ $S \in \mathcal{L}(V, W)$. אם $u_1, \dots, u_m$ בסיס של U , ו־ $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V , ו־ $w_1, \dots, w_p$ בסיס של W , אזי

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(ST, (u_1, \dots, u_m), (w_1, \dots, w_p)) &= \\ \mathcal{M}(S, (v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_p))\mathcal{M}(T, (u_1, \dots, u_m), (v_1, \dots, v_n)).\end{aligned}$$

המסקנה הבאה עוסקת במטריצה של אופרטור הזהות I ביחס לשני בסיסים שונים. שימו לב כי העמודה ה- k^{th} של $\mathcal{M}(I, (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n))$ מורכבת מהסקלרים הנדרשים לכתיבת u_k כצירוף ליניארי של הבסיס $v_1, \dots, v_n$.

בניסוח המסקנה הבאה, I מסמן את אופרטור הזהות מ- V אל V . בהוכחה, I מסמן גם את מטריצת הזהות $n \times n$.

3.82 המטריצה של אופרטור הזהות ביחס לשני בסיסים

נניח ש- $u_1, \dots, u_n$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיסים של V . אזי המטריצות $\mathcal{M}(I, (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n))$ וגם $\mathcal{M}(I, (v_1, \dots, v_n), (u_1, \dots, u_n))$ הפיכות, וכל אחת היא ההופכית של האחרת.

הוכחה ב-3.81, נחליף w_k ב- u_k , ונחליף S ו- T ב- I , ונקבל $I = \mathcal{M}(I, (v_1, \dots, v_n), (u_1, \dots, u_n)) \mathcal{M}(I, (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n))$. כעת נחליף בין התפקידים של ה- u ים ושל ה- v ים, ונקבל $I = \mathcal{M}(I, (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)) \mathcal{M}(I, (v_1, \dots, v_n), (u_1, \dots, u_n))$. שתי משוואות אלו מספקות את התוצאה הנדרשת.

3.83 דוגמה: מטריצה של אופרטור הזהות מעל F^2 ביחס לשני בסיסים

ניקח את הבסיסים $(4, 2)$, $(5, 3)$ ו- $(1, 0)$, $(0, 1)$ של F^2 . מאחר ש- $I(4, 2) = 4(1, 0) + 2(0, 1)$ ו- $I(5, 3) = 5(1, 0) + 3(0, 1)$, נקבל

$$\mathcal{M}(I, ((4, 2), (5, 3)), ((1, 0), (0, 1))) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

ההופכית של המטריצה לעיל היא

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

כפי שעליכם לוודא. לפיכך, מ-3.82 נסיק ש-

$$\mathcal{M}(I, ((1, 0), (0, 1)), ((4, 2), (5, 3))) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

המסקנה הבאה מראה כיצד המטריצה של T משתנה כאשר אנו משנים בסיסים. במסקנה הבאה, יש לנו שני בסיסים של V , כל אחד מהם משמש כבסיס עבור מרחב התחום וכבסיס עבור מרחב היעד. זכרו את הסימון המקוצר שמאפשר לנו להציג את הבסיס פעם אחת בלבד כאשר הבסיס משמש לשני המרחבים:

$$\mathcal{M}(T, (u_1, \dots, u_n)) = \mathcal{M}(T, (u_1, \dots, u_n), (u_1, \dots, u_n)).$$

3.84 נוסחת שינוי בסיס

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. נניח ש- $u_1, \dots, u_n$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיסים של V . תהינה
 $A = \mathcal{M}(T, (u_1, \dots, u_n))$ וגם $B = \mathcal{M}(T, (v_1, \dots, v_n))$
 ו- $C = \mathcal{M}(I, (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n))$. אזי
 $A = C^{-1}BC$.

הוכחה ב- 3.81, נחליף w_k ב- u_k ונחליף S ב- I , ונקבל
 3.85 $A = C^{-1}\mathcal{M}(T, (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n))$,
 כאשר השתמשנו ב- 3.82.
 שוב נשתמש ב- 3.81, הפעם נחליף w_k ב- v_k . בנוסף נחליף T ב- I ונחליף S ב- T ,
 ונקבל
 $\mathcal{M}(T, (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)) = BC$.
 נציב את המשוואה לעיל ב- 3.85 ונקבל את המשוואה $A = C^{-1}BC$. ■

ההוכחה למסקנה הבאה מושארת לקוראים כתרגיל.

3.86 המטריצה של ההופכית שווה להופכית של המטריצה

נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ הפיכה. אזי $\mathcal{M}(T^{-1}) = (\mathcal{M}(T))^{-1}$,
 כאשר שתי המטריצות מוגדרות ביחס לבסיס $v_1, \dots, v_n$.

תרגילים ג.

- 1 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ הפיכה. הראו ש- T^{-1} הפיכה וגם
 $(T^{-1})^{-1} = T$.
- 2 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(U, V)$ ו- $S \in \mathcal{L}(V, W)$ שתיהן העתקות ליניאריות הפיכות.
 הוכיחו ש- $ST \in \mathcal{L}(U, W)$ הפיכה וש- $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.
- 3 נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים.
 א. T הפיכה.
 ב. $Tv_1, \dots, Tv_n$ בסיס של V לכל בסיס $v_1, \dots, v_n$ של V .
 ג. $Tv_1, \dots, Tv_n$ בסיס של V עבור בסיס $v_1, \dots, v_n$ כלשהו של V .
- 4 נניח ש- V מממד סופי ו- $\dim V > 1$. הוכיחו שקבוצת ההעתקות הליניאריות
 הבלתי-הפיכות מ- V לעצמו אינה תת-מרחב של $\mathcal{L}(V)$.

- 5** נניח ש- V מממד סופי, U תת-מרחב של V , ו- $S \in \mathcal{L}(U, V)$. הוכיחו שקיימת העתקה ליניארית הפיכה T מ- V לעצמו כך ש- $Tu = Su$ לכל $u \in U$ אם-אז-רק אם S חד-חד-ערכית.
- 6** נניח ש- W מממד סופי ו- $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$. הוכיחו ש- $\text{null } S = \text{null } T$ אם-אז-רק אם קיימת $E \in \mathcal{L}(W)$ הפיכה, כך ש- $S = ET$.
- 7** נניח ש- V מממד סופי ו- $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$. הוכיחו ש- $\text{range } S = \text{range } T$ אם-אז-רק אם קיימת $E \in \mathcal{L}(V)$ הפיכה כך ש- $S = TE$.
- 8** נניח ש- V ו- W מממד סופי ו- $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$. הוכיחו שקיימות העתקות הפיכות $E_1 \in \mathcal{L}(V)$ ו- $E_2 \in \mathcal{L}(W)$ כך ש- $S = E_2TE_1$. $\dim \text{null } S = \dim \text{null } T$.
- 9** נניח ש- V מממד סופי ו- $T: V \rightarrow W$ העתקה ליניארית מ- V על W . הוכיחו שקיים תת-מרחב U של V כך ש- $T|_U$ היא איזומורפיזם של U על W .
כאן $T|_U$ היא הפונקציה T מצומצמת ל- U . לפיכך $T|_U$ היא הפונקציה שתחומה U , כאשר $T|_U$ מוגדרת על ידי $Tu = Tu$ לכל $u \in U$.
- 10** נניח ש- V ו- W מממד סופי ו- U תת-מרחב של V . יהי $\mathcal{E} = \{T \in \mathcal{L}(V, W) : U \subseteq \text{null } T\}$.
א. הראו ש- $\mathcal{E}$ תת-מרחב של $\mathcal{L}(V, W)$.
ב. מצאו נוסחה עבור $\dim \mathcal{E}$ במונחים של $\dim V$, $\dim W$ ו- $\dim U$.
רמז: הגדירו $\Phi: \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(U, W)$ על ידי $\Phi(T) = T|_U$. מהו $\text{null } \Phi$? מהו $\text{range } \Phi$?
- 11** נניח ש- V מממד סופי ו- $S, T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו ש- ST הפיכה $\iff S$ ו- T הפיכות.
- 12** נניח ש- V מממד סופי ו- $S, T, U \in \mathcal{L}(V)$ ו- $STU = I$. הראו ש- T הפיכה וגם ש- $T^{-1} = US$.
- 13** הראו שהמסקנה בתרגיל 12 אינה מתקיימת בהכרח ללא ההנחה ש- V מממד סופי.
- 14** הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם V מרחב וקטורי מממד סופי ו- $R, S, T \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- RST על, אזי S חד-חד-ערכית.
- 15** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $v_1, \dots, v_m$ רשימה ב- V כך ש- $Tv_1, \dots, Tv_m$ פורסת את V . הוכיחו ש- $v_1, \dots, v_m$ פורסת את V .
- 16** הוכיחו שכל העתקה ליניארית מ- $\mathbb{F}^{n,1}$ אל $\mathbb{F}^{m,1}$ נתונה על ידי כפל מטריצות. כלומר, הוכיחו שאם $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^{n,1}, \mathbb{F}^{m,1})$, אזי קיימת מטריצה A מ- $m \times n$ כך ש- $Tx = Ax$ לכל $x \in \mathbb{F}^{n,1}$.

17 נניח ש- V מממד סופי ו- $S \in \mathcal{L}(V)$. הגדירו $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ על ידי

$$\mathcal{A}(T) = ST$$
לכל $T \in \mathcal{L}(V)$.

א. הראו ש- $\dim \text{null } \mathcal{A} = (\dim V)(\dim \text{null } S)$.
 ב. הראו ש- $\dim \text{range } \mathcal{A} = (\dim V)(\dim \text{range } S)$.

18 הראו ש- V ו- $\mathcal{L}(F, V)$ מרחבים וקטוריים איזומורפיים.

19 נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו שיש ל- T אותה מטריצה ביחס לכל בסיס של V אם-ורק-אם T כפולת סקלר של אופרטור זהות.

20 נניח ש- $q \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$. הוכיחו שקיים פולינום $p \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ כך ש-

$$q(x) = (x^2 + x)p''(x) + 2xp'(x) + p(3)$$
לכל $x \in \mathbf{R}$.

21 נניח ש- n מספר שלם חיובי ו- $A_{j,k} \in F$ לכל $j, k = 1, \dots, n$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים (שימו לב כי בשני החלקים להלן, מספר המשוואות שווה למספר המשתנים).

א. הפתרון הטריטויאלי $x_1 = \dots = x_n = 0$ הוא הפתרון היחיד למערכת ההומוגנית של המשוואות הליניאריות

$$\sum_{k=1}^n A_{1,k} x_k = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=1}^n A_{n,k} x_k = 0.$$

ב. לכל $c_1, \dots, c_n \in F$, קיים פתרון למערכת המשוואות

$$\sum_{k=1}^n A_{1,k} x_k = c_1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=1}^n A_{n,k} x_k = c_n.$$

22 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V . הוכיחו ש-

$$T \iff \text{הפיכה } \mathcal{M}(T, (v_1, \dots, v_n))$$

23 נניח ש- $u_1, \dots, u_n$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיסים של V . תהי $T \in \mathcal{L}(V)$ העתקה כך ש-
 $Tv_k = u_k$ לכל $k = 1, \dots, n$. הוכיחו ש-

$$\mathcal{M}(T, (v_1, \dots, v_n)) = \mathcal{M}(I, (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)).$$

24 נניח ש- A ו- B מטריצות ריבועיות בגודל זהה ו- $AB = I$. הוכיחו ש- $BA = I$.

5 מכפלות ומנות של מרחבים וקטוריים

מכפלות של מרחבים וקטוריים

כהרגלנו, כאשר עוסקים ביותר ממרחב וקטורי אחד, כל המרחבים הווקטוריים שבהם נעסוק צריכים להיות מעל אותו שדה.

3.87 הגדרה: מכפלת מרחבים וקטוריים

נניח ש- $V_1, \dots, V_m$ מרחבים וקטוריים מעל F .

- המכפלה $V_1 \times \dots \times V_m$ מוגדרת על ידי $V_1 \times \dots \times V_m = \{(v_1, \dots, v_m) : v_1 \in V_1, \dots, v_m \in V_m\}$.
- פעולת החיבור מעל $V_1 \times \dots \times V_m$ מוגדרת על ידי $(u_1, \dots, u_m) + (v_1, \dots, v_m) = (u_1 + v_1, \dots, u_m + v_m)$.
- כפל בסקלר מעל $V_1 \times \dots \times V_m$ מוגדר על ידי $\lambda(v_1, \dots, v_m) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_m)$.

3.88 דוגמה: מכפלת המרחבים הווקטוריים $\mathcal{P}_5(\mathbf{R})$ ו- $\mathbf{R}^3$

איברי $\mathcal{P}_5(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^3$ הם רשימות בנות שני איברים, כאשר האיבר הראשון ברשימה הוא איבר ב- $\mathcal{P}_5(\mathbf{R})$ והאיבר השני ברשימה הוא איבר ב- $\mathbf{R}^3$.

לדוגמה, $((5-6x+4x^2, (3, 8, 7))$ ו- $((x+9x^5, (2, 2, 2))$ הם איברים של $\mathcal{P}_5(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^3$. סכומם מוגדר על ידי

$$\begin{aligned} & ((5-6x+4x^2, (3, 8, 7)) + (x+9x^5, (2, 2, 2))) \\ &= ((5-5x+4x^2+9x^5, (5, 10, 9))). \end{aligned}$$

בנוסף, $((10-12x+8x^2, (6, 16, 14)) = 2((5-6x+4x^2, (3, 8, 7)))$.

את המסקנה הבאה יש לפרש כך: מכפלת מרחבים וקטוריים בצירוף פעולות החיבור והכפל בסקלר כפי שהוגדרו ב- 3.87, היא מרחב וקטורי.

3.89 מכפלת מרחבים וקטוריים היא מרחב וקטורי

נניח ש- $V_1, \dots, V_m$ מרחבים וקטוריים מעל F . אזי $V_1 \times \dots \times V_m$ מרחב וקטורי מעל F .

ההוכחה למסקנה לעיל מושארת לקוראים. שימו לב כי איבר הזהות לחיבור של $V_1 \times \dots \times V_m$ הוא $(0, \dots, 0)$, כאשר ה- 0 ברכיב ה- k^{th} הוא איבר הזהות לחיבור של V_k . האיבר הנגדי לחיבור של $V_1 \times \dots \times V_m$ הוא $(-v_1, \dots, -v_m)$.

3.90 דוגמה: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \neq \mathbb{R}^5$ אולם $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ איזומורפי ל- $\mathbb{R}^5$

איברי המרחב הווקטורי $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ הם רשימות
 $((x_1, x_2), (x_3, x_4, x_5))$,
 כאשר $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$. האיברים של $\mathbb{R}^5$ הם רשימות
 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$,
 כאשר $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.

למרות הדמיון בין איברי $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ לאיברי $\mathbb{R}^5$, האיברים הם אובייקטים מטיפוסים שונים. איברי $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ הם רשימות בנות שני איברים (כאשר האיבר הראשון הוא עצמו רשימה בת שני איברים והאיבר השני הוא רשימה בת שלושה איברים), ואילו האיברים ב- $\mathbb{R}^5$ הם רשימות בנות חמישה איברים. לפיכך $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ אינו שווה ל- $\mathbb{R}^5$.

ההעתקה הליניארית

$((x_1, x_2), (x_3, x_4, x_5)) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$
 היא איזומורפיזם של המרחב הווקטורי
 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ על המרחב הווקטורי $\mathbb{R}^5$. לפיכך
 שני מרחבים וקטוריים אלו הם איזומורפיים,
 אף שאינם שווים.

איזומורפיזם זה הוא כה טבעי שנוכל
 לחשוב עליו כתיוג מחדש. יש האופרים
 באופן בלתי רשמי כי $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ שווה ל-
 $\mathbb{R}^5$, אמירה שאינה נכונה טכנית, אבל
 יש בה כדי להפחיש את רוח הדברים של
 הזיהוי באמצעות תיוג מחדש.

הדוגמה הבאה ממחישה את הרעיון שבו נשתמש בהוכחת 3.92.

3.91 דוגמה: בסיס של $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$

נתבונן ברשימה זו בת חמישה איברים של $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$:

$$(1, (0, 0)), (x, (0, 0)), (x^2, (0, 0)), (0, (1, 0)), (0, (0, 1)).$$

רשימה זו בלתי תלויה ליניארית ופורסת את $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$. לפיכך היא בסיס של $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$.

3.92 מעד המכפלה הוא סכום הממדים

נניח ש- $V_1, \dots, V_m$ מרחבים וקטוריים מממד סופי. אזי $V_1 \times \dots \times V_m$ מממד סופי
 ו-

$$\dim(V_1 \times \dots \times V_m) = \dim V_1 + \dots + \dim V_m.$$

הוכחה נבחר בסיס לכל V_k . עבור כל וקטור בסיס של כל V_k , נתבונן באיבר של $V_1 \times \dots \times V_m$ השווה לווקטור הבסיס ברכיב ה- k^{th} ו-0 בשאר הרכיבים. רשימת כל הווקטורים הללו בלתי תלויה ליניארית ופורסת את $V_1 \times \dots \times V_m$. לפיכך היא בסיס של $V_1 \times \dots \times V_m$. אורכו של בסיס זה הוא $\dim V_1 + \dots + \dim V_m$, כפי שרצינו להוכיח. ■

במסקנה הבאה, ההעתקה Γ היא על, לפי הגדרת $V_1 + \dots + V_m$. לפיכך, בסוף המסקנה להלן נוכל להחליף את הביטוי "חד-חד-ערכית" ב"הפיכה".

3.93 מכפלות וסכומים ישירים

נניח ש- $V_1, \dots, V_m$ תתי-מרחב של V . נגדיר העתקה ליניארית $\Gamma : V_1 \times \dots \times V_m \rightarrow V_1 + \dots + V_m$ על ידי

$$\Gamma(v_1, \dots, v_m) = v_1 + \dots + v_m.$$

אזי $V_1 + \dots + V_m$ סכום ישר אס-ורק-אם Γ חד-חד-ערכית.

הוכחה לפי 3.15, Γ חד-חד-ערכית אס-ורק-אם האופן היחיד שבו ניתן לבטא 0 כסכום $v_1 + \dots + v_m$, כאשר כל v_k ב- V_k , הוא שכל v_k שווה 0. לפיכך, לפי 1.45 נקבל ש- Γ חד-חד-ערכית אס-ורק-אם $V_1 + \dots + V_m$ הוא סכום ישר, כפי שרצינו. ■

3.94 סכום הוא סכום ישר אס-ורק-אם הממדים מסתכמים

נניח ש- V מממד סופי ו- $V_1, \dots, V_m$ תתי-מרחב של V . אזי $V_1 + \dots + V_m$ הוא סכום ישר אס-ורק-אם

$$\dim(V_1 + \dots + V_m) = \dim V_1 + \dots + \dim V_m.$$

הוכחה ההעתקה Γ ב- 3.93 היא על. לפיכך, לפי המשפט היסודי של ההעתקות הליניאריות (3.21), Γ חד-חד-ערכית אס-ורק-אם

$$\dim(V_1 + \dots + V_m) = \dim(V_1 \times \dots \times V_m).$$

בשילוב 3.93 עם 3.92 אנו מקבלים ש- $V_1 + \dots + V_m$ סכום ישר אס-ורק-אם

$$\dim(V_1 + \dots + V_m) = \dim V_1 + \dots + \dim V_m,$$

כפי שרצינו. ■

עבור המקרה הפרטי $m = 2$, ניתן להפיק הוכחה חלופית לכך ש- $V_1 + V_2$ סכום ישר אס-ורק-אם $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ על ידי שילוב 1.46 ו- 2.43.

מרחבי מנה

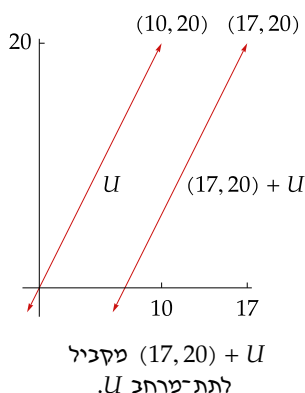
בבואנו לעסוק במרחבי מנה, נפתח בהגדרת סכום של וקטור ותת-קבוצה.

3.95 סימון: $v + U$

נניח ש- $v \in V$ ו- $U \subseteq V$. אזי $v + U$ היא התת-קבוצה של V המוגדרת על ידי

$$v + U = \{v + u : u \in U\}.$$

3.96 דוגמה: סכום של וקטור ותת־מרחב חד־ממדי של $\mathbb{R}^2$



נניח ש־

$$U = \{(x, 2x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}.$$

לכן U הוא הישר ב־ $\mathbb{R}^2$ העובר דרך הראשית ששיפועו 2. לפיכך

$$(17, 20) + U$$

הוא הישר ב־ $\mathbb{R}^2$ המכיל את הנקודה $(17, 20)$ ושיפועו 2.

מאחר ש־

$$(10, 20) \in U \quad \text{וגם} \quad (17, 20) \in (17, 20) + U,$$

אנו רואים ש־ $(17, 20) + U$ מושג באמצעות הזזת U ב־ 7 יחידות לימין.

3.97 הגדרה: הזזה

עבור $v \in V$ ו־ U תת־קבוצה של V , הקבוצה $v + U$ נקראת הזזה של U .

3.98 דוגמה: ההזזות

- אם U הוא הישר ב־ $\mathbb{R}^2$ המוגדר על ידי $U = \{(x, 2x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$, אזי כל הישרים ב־ $\mathbb{R}^2$ ששיפועם 2 הם ההזזות של U . ראו דוגמה 3.96 לעיל לשרטוט של U ואחת מההזזות שלו.
- ובאופן כללי, אם U הוא ישר ב־ $\mathbb{R}^2$, אזי, קבוצת כל ההזזות של U היא קבוצת כל הישרים ב־ $\mathbb{R}^2$ המקבילים ל־ U .
- אם $U = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$, אזי, ההזזות של U הן המישורים ב־ $\mathbb{R}^3$ המקבילים ל־ U , מישור ה־ xy .
- ובאופן כללי, אם U הוא מישור ב־ $\mathbb{R}^3$, אזי, קבוצת כל ההזזות של U היא קבוצת כל המישורים ב־ $\mathbb{R}^3$ המקבילים ל־ U (ראו, לדוגמה, תרגיל 7).

3.99 הגדרה: מרחב מנה, V/U

נניח ש־ U תת־מרחב של V . אזי מרחב המנה V/U הוא קבוצת כל ההזזות של U . לפיכך

$$V/U = \{v + U : v \in V\}.$$

3.100 דוגמה: מרחבי מנה

- אם $U = \{(x, 2x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$, אזי $\mathbb{R}^2/U$ הוא קבוצת כל הישרים ב- $\mathbb{R}^2$ ששיפועם 2.
- אם U הוא ישר ב- $\mathbb{R}^3$ העובר דרך הראשית, אזי $\mathbb{R}^3/U$ הוא קבוצת כל הישרים ב- $\mathbb{R}^3$ המקבילים ל- U .
- אם U הוא מישור ב- $\mathbb{R}^3$ העובר דרך הראשית, אזי $\mathbb{R}^3/U$ הוא קבוצת כל המישורים ב- $\mathbb{R}^3$ המקבילים ל- U .

יעדנו הבא הוא להפוך את V/U למרחב וקטורי. לשם כך, נזדקק למסקנה הבאה.

3.101 שתי הזאות של תת-מרחב הן שוות או זרות

נניח ש- U תת-מרחב של V ו- $v, w \in V$. אזי

$$v - w \in U \iff v + U = w + U \iff (v + U) \cap (w + U) \neq \emptyset.$$

הוכחה תחילה נניח ש- $v - w \in U$. אם $u \in U$, אזי

$$v + u = w + ((v - w) + u) \in w + U.$$

לפיכך, $v + U \subseteq w + U$. באופן דומה, $w + U \subseteq v + U$. לפיכך $v + U = w + U$, ובכך השלמנו את ההוכחה ש- $v - w \in U$ גורר ש- $v + U = w + U$.

מהמשוואה $v + U = w + U$ נובע ש- $(v + U) \cap (w + U) \neq \emptyset$.

כעת נניח ש- $(v + U) \cap (w + U) \neq \emptyset$. לפיכך קיימים $u_1, u_2 \in U$ כך ש-

$$v + u_1 = w + u_2.$$

לפיכך, $v - w = u_2 - u_1$. לכן $v - w \in U$, ובכך הראינו ש- $(v + U) \cap (w + U) \neq \emptyset$ גורר ש- $v - w \in U$, והשלמנו את ההוכחה. ■

כעת נוכל להגדיר חיבור וכפל בסקלר מעל V/U .

3.102 הגדרה: חיבור וכפל בסקלר מעל V/U

נניח ש- U תת-מרחב של V . אזי חיבור וכפל בסקלר מוגדרים מעל V/U על ידי

$$(v + U) + (w + U) = (v + w) + U$$

$$\lambda(v + U) = (\lambda v) + U$$

לכל $v, w \in V$ ולכל $\lambda \in \mathbb{F}$.

כחלק מהוכחת המסקנה הבאה, נצטרך להראות שההגדרות לעיל הגיוניות.

3.103 מרחב מנה הוא מרחב וקטורי

נניח ש- U תת-מרחב של V . אזי V/U , בצירוף פעולות החיבור והכפל בסקלר כפי שהוגדרו לעיל, מרחב וקטורי.

הוכחה הבעיה הפוטנציאלית בהגדרות החיבור והכפל בסקלר לעיל מעל V/U היא שלהזהה של U אין ייצוג יחיד. ליתר דיוק, נניח ש- $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ הם כך ש-

$$v_1 + U = v_2 + U \quad \text{וגם} \quad w_1 + U = w_2 + U.$$

כדי להראות שהגדרת החיבור מעל V/U כפי שהוגדרה לעיל הגיונית, עלינו להראות ש- $(v_1 + w_1) + U = (v_2 + w_2) + U$.

מ-3.101, נקבל ש-

$$v_1 - v_2 \in U \quad \text{וגם} \quad w_1 - w_2 \in U.$$

מאחר ש- U תת-מרחב של V ולפיכך סגור תחת פעולת החיבור, מכאן נובע ש- $(v_1 - v_2) + (w_1 - w_2) \in U$. לפיכך $(v_1 + w_1) - (v_2 + w_2) \in U$. שימוש חוזר ב-3.101 מראה ש-

$$(v_1 + w_1) + U = (v_2 + w_2) + U,$$

כפי שרצינו. לפיכך, הגדרת החיבור מעל V/U הגיונית.

באופן דומה, נניח ש- $\lambda \in F$. אנו עדיין תחת ההנחה ש- $v_1 + U = v_2 + U$. מאחר ש- U תת-מרחב של V ולפיכך סגור תחת פעולת כפל בסקלר, נקבל ש- $\lambda(v_1 - v_2) \in U$. לפיכך $\lambda v_1 - \lambda v_2 \in U$. לכן 3.101 גורר ש- $(\lambda v_1) + U = (\lambda v_2) + U$.

לפיכך ההגדרה של פעולת הכפל בסקלר מעל V/U הגיונית.

כעת משהוגדרו פעולות החיבור והכפל בסקלר מעל V/U , הווידוא שפעולות אלו אכן הופכות את V/U למרחב וקטורי הוא פשוט, ומושאר לקוראים. שימו לב שאיבר הזהות לחיבור של V/U הוא $0 + U$ (השווה ל- U) ואיבר הנגדי לחיבור של $v + U$ הוא $(-v) + U$. ■

הרעיון הבא יוביל אותנו לאופן חישוב הממד של V/U .

3.104 הגדרה: העתקת מנה, π

נניח ש- U תת-מרחב של V . העתקת המנה $\pi: V \rightarrow V/U$ היא ההעתקה הליניארית המוגדרת על ידי

$$\pi(v) = v + U$$

לכל $v \in V$.

על הקוראים לוודא כי π היא אכן העתקה ליניארית. אף ש- π תלויה ב- U כמו גם ב- V , מרחבים אלו אינם נכללים בסימון, מאחר שזהותם ברורה מתוך ההקשר.

3.105 ממד מרחב מנה

נניח ש- V מממד סופי ו- U תת-מרחב של V . אזי
 $\dim V/U = \dim V - \dim U$.

הוכחה תהא π העתקת המנה מ- V ל- V/U . אם $v \in V$, אזי $v + U = 0 + U$ אם ורק אם $v \in U$. מכאן נסיק כי $\pi(U) = \{0\}$. מהגדרת π נובע ש- $\text{range } \pi = V/U$. לפי המשפט היסודי של ההעתקות הליניאריות (3.21) נסיק כעת כי $\dim V = \dim U + \dim V/U$, ובכך קיבלנו את התוצאה המבוקשת. ■

כל העתקה ליניארית T מעל V משרה העתקה ליניארית $\tilde{T}$ מעל $V/(\text{null } T)$, לפי ההגדרה להלן.

3.106 סימון: $\tilde{T}$

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. נגדיר $\tilde{T}: V/(\text{null } T) \rightarrow W$ על ידי
 $\tilde{T}(v + \text{null } T) = Tv$.

כדי להראות שהגדרת $\tilde{T}$ הגיונית, נניח כי $u, v \in V$ כך ש- $u + \text{null } T = v + \text{null } T$. לפי 3.101, נסיק ש- $u - v \in \text{null } T$. לפיכך $T(u - v) = 0$, לכן $Tu = Tv$. לפיכך הגדרת $\tilde{T}$ בהחלט הגיונית. הווידוא השגרתי ש- $\tilde{T}$ העתקה ליניארית מ- $V/(\text{null } T)$ אל W מושאר לקוראים. במסקנה הבאה נראה כי ניתן לחשוב על $\tilde{T}$ כגרסה מותאמת של T , הפועלת בתחום המפיק העתקה חד-חד-ערכית.

3.107 מרחב האפס והטווח של $\tilde{T}$

- נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי
- $\tilde{T} \circ \pi = T$, כאשר π העתקת המנה מ- V על $V/(\text{null } T)$.
 - $\tilde{T}$ חד-חד-ערכית.
 - $\text{range } \tilde{T} = \text{range } T$.
 - $V/(\text{null } T)$ ו- $\text{range } T$ מרחבים וקטוריים איזומורפיים.

הוכחה

- אם $v \in V$, אזי $\tilde{T}(\pi(v)) = \tilde{T}(v + \text{null } T) = Tv$, אזי $(\tilde{T} \circ \pi)(v) = \tilde{T}(\pi(v)) = Tv$, כפי שרצינו.
- נניח ש- $v \in V$ וגם $\tilde{T}(v + \text{null } T) = 0$. אזי $Tv = 0$. לפיכך $v \in \text{null } T$. לכן $\tilde{T}(v + \text{null } T) = 0$ גורר ש- $v + \text{null } T = 0 + \text{null } T$. מכאן נובע ש- $\text{null } \tilde{T} = \{0 + \text{null } T\}$. לכן $\tilde{T}$ חד-חד-ערכית, כפי שרצינו.
- מהגדרת $\tilde{T}$ נובע ש- $\text{range } \tilde{T} = \text{range } T$.
- כעת נוכל להסיק מ- (ב) ו- (ג) שאם נחשוב על $\tilde{T}$ כהעתקה אל $\text{range } T$, נקבל ש- $\tilde{T}$ היא איזומורפיזם מ- $V/(\text{null } T)$ על $\text{range } T$. ■

- 1 נניח ש- T פונקציה מ- V אל W . הגרף של T הוא התת-קבוצה של $V \times W$ המוגדרת על ידי

$$T = \{(v, Tv) \in V \times W : v \in V\}.$$
הוכיחו ש- T העתקה ליניארית אס-ורק-אם הגרף של T הוא תת-מרחב של $V \times W$.
באופן פורמלי, פונקציה T מ- V אל W היא תת-קבוצה T של $V \times W$ כך שלכל $v, w \in V$, קיים איבר יחיד $T(v, w) \in T$. במילים אחרות, ההגדרה הפורמלית של פונקציה היא מה שהגדרנו לעיל כגרף שלה. בדרך כלל איננו חושבים על פונקציות בהיבט הפורמלי. בכל זאת, לאור ההגדרה הפורמלית, נוכל לנסח תרגיל זה באופן הבא: הוכיחו שפונקציה T מ- V אל W היא העתקה ליניארית אס-ורק-אם T תת-מרחב של $V \times W$.
- 2 נניח ש- $V_1, \dots, V_m$ מרחבים וקטוריים כך ש- $V_1 \times \dots \times V_m$ מממד סופי. הוכיחו ש- V_k מממד סופי לכל $k = 1, \dots, m$.
- 3 נניח ש- $V_1, \dots, V_m$ מרחבים וקטוריים. הוכיחו ש- $\mathcal{L}(V_1 \times \dots \times V_m, W)$ ו- $\mathcal{L}(V_1, W) \times \dots \times \mathcal{L}(V_m, W)$ מרחבים וקטוריים איזומורפיים.
אין הנחה בתרגיל לעיל או בשני התרגילים הבאים שהמרחבים הווקטוריים מופיעים סופי.
- 4 נניח ש- $W_1, \dots, W_m$ מרחבים וקטוריים. הוכיחו ש- $\mathcal{L}(V, W_1 \times \dots \times W_m)$ ו- $\mathcal{L}(V, W_1) \times \dots \times \mathcal{L}(V, W_m)$ מרחבים וקטוריים איזומורפיים.
- 5 עבור m מספר שלם חיובי, הגדירו V^m על ידי

$$V^m = \underbrace{V \times \dots \times V}_m \text{ פעמים}.$$
הוכיחו ש- V^m ו- $\mathcal{L}(F^m, V)$ מרחבים וקטוריים איזומורפיים.
- 6 נניח ש- v, x וקטורים ב- V ו- U, W תת-מרחב של V כך ש- $v + U = x + W$. הוכיחו ש- $U = W$.
- 7 יהי $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 5z = 0\}$. נניח ש- $A \subseteq \mathbb{R}^3$. הוכיחו ש- A היא או הקבוצה אס-ורק-אם קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 5z = c\}$.
- 8 א. נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $c \in W$. הוכיחו ש- $\{x \in V : Tx = c\}$ היא או הקבוצה הריקה או היא $\text{null } T$.
ב. הסבירו מדוע קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות ליניאריות כמו זו שב-3.27 היא או הקבוצה הריקה או היא תת-מרחב כלשהו של F^n .
- 9 הוכיחו שתת-קבוצה שאינה ריקה A של V היא תת-מרחב של V אס-ורק-אם $\lambda v + (1 - \lambda)w \in A$ לכל $v, w \in A$ ולכל $\lambda \in F$.
- 10 נניח ש- $A_1 = v + U_1$ ו- $A_2 = w + U_2$ עבור $v, w \in V$ כלשהם ו- U_1, U_2 תת-מרחב כלשהם של V . הוכיחו שהחיתוך $A_1 \cap A_2$ הוא או תת-מרחב כלשהו של V או הקבוצה הריקה.

11 נניח ש- U היא קבוצת כל הסדרות $(x_1, x_2, \dots) \in F^\infty$ המקיימות $x_k \neq 0$ רק עבור מספר סופי של ערכי k .

- א. הראו ש- U תת-מרחב של F^∞ .
 ב. הוכיחו ש- F^∞/U מממד אינסופי.

12 נניח ש- $v_1, \dots, v_m \in V$ יהי

$$A = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in F \text{ וגם } \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1\}.$$

- א. הוכיחו ש- A הזזה של תת-מרחב כלשהו של V .
 ב. הוכיחו שאם B הזזה של תת-מרחב כלשהו של V ו- $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq B$ אזי $A \subseteq B$.
 ג. הוכיחו ש- A הזזה של תת-מרחב כלשהו של V מממד קטן מ- m .

13 נניח ש- U תת-מרחב של V כך ש- V/U מממד סופי. הוכיחו ש- V איזומורפי ל- $U \times (V/U)$.

14 נניח ש- U ו- W תתי-מרחב של V ו- $V = U \oplus W$. נניח ש- $w_1, \dots, w_m$ בסיס של W . הוכיחו ש- $w_1 + U, \dots, w_m + U$ בסיס של V/U .

15 נניח ש- U תת-מרחב של V ו- $v_1 + U, \dots, v_m + U$ בסיס של V/U ו- $u_1, \dots, u_n$ בסיס של U . הוכיחו ש- $v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_n$ בסיס של V .

16 נניח ש- $\varphi \in \mathcal{L}(V, F)$ ו- $\varphi \neq 0$. הוכיחו ש- $\dim V/(\text{null } \varphi) = 1$.

17 נניח ש- U תת-מרחב של V כך ש- $\dim V/U = 1$. הוכיחו שקיים $\varphi \in \mathcal{L}(V, F)$ כך ש- $\text{null } \varphi = U$.

18 נניח ש- U תת-מרחב של V כך ש- V/U מממד סופי.

א. הראו שאם W תת-מרחב מממד סופי של V ו- $V = U + W$, אזי $\dim W \geq \dim V/U$.

ב. הוכיחו שקיים תת-מרחב מממד סופי W של V כך ש- $\dim W = \dim V/U$ וגם $V = U \oplus W$.

19 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- U תת-מרחב של V . תהי π העתקת המנה מ- V על V/U . הוכיחו שקיים $S \in \mathcal{L}(V/U, W)$ כך ש- $T = S \circ \pi$ אס-ורק-אם $U \subseteq \text{null } T$.

6ג דואליות

מרחב דואלי והעתקה דואלית

להעתקות ליניאריות אל שדה הסקלרים F תפקיד מיוחד באלגברה ליניארית, ולפיכך מוענק להן שם מיוחד.

3.108 הגדרה: פונקציונל ליניארי

פונקציונל ליניארי מעל V הוא העתקה ליניארית מ- V אל F . במילים אחרות, פונקציונל ליניארי הוא איבר של $\mathcal{L}(V, F)$.

3.109 דוגמה: פונקציונלים ליניאריים

- נגדיר $\varphi: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ על ידי $\varphi(x, y, z) = 4x - 5y + 2z$. אזי φ הוא פונקציונל ליניארי מעל $\mathbf{R}^3$.
- נקבע $(c_1, \dots, c_n) \in F^n$. נגדיר $\varphi: F^n \rightarrow F$ על ידי $\varphi(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$. אזי φ הוא פונקציונל ליניארי מעל F^n .
- נגדיר $\varphi: \mathcal{P}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ על ידי

$$\varphi(p) = 3p''(5) + 7p(4).$$

אזי φ הוא פונקציונל ליניארי מעל $\mathcal{P}(\mathbf{R})$.

- נגדיר $\varphi: \mathcal{P}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ על ידי

$$\varphi(p) = \int_0^1 p$$

לכל $p \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$. אזי φ הוא פונקציונל ליניארי מעל $\mathcal{P}(\mathbf{R})$.

המרחב הווקטורי $\mathcal{L}(V, F)$ גם הוא מקבל שם וסימון מיוחדים.

3.110 הגדרה: מרחב דואלי, V'

המרחב הדואלי של V , המסומן ב- V' , הוא המרחב הווקטורי של כל הפונקציונלים הליניאריים מעל V . במילים אחרות, $V' = \mathcal{L}(V, F)$.

3.111 $\dim V' = \dim V$

נניח ש- V מממד סופי. אזי V' גם הוא מממד סופי ו- $\dim V' = \dim V$.

הוכחה לפי 3.72 מתקיים

$$\dim V' = \dim \mathcal{L}(V, F) = (\dim V)(\dim F) = \dim V,$$

כפי שרצינו.

מלמת ההעתקה הליניארית (3.4) נובע כי בהגדרה להלן, כל φ_j מוגדר היטב.

3.112 הגדרה: בסיס דואלי

אם $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V , אזי הבסיס הדואלי של $v_1, \dots, v_n$ הוא הרשימה $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ של איברי V' , כאשר כל φ_j הוא הפונקציונל הליניארי מעל V כך ש-

$$\varphi_j(v_k) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = j, \\ 0 & \text{if } k \neq j. \end{cases}$$

3.113 דוגמה: הבסיס הדואלי של הבסיס הסטנדרטי של F^n

נניח ש- n מספר שלם חיובי. עבור $1 \leq j \leq n$, נגדיר את φ_j כפונקציונל הליניארי מעל F^n הבוחר את הקואורדינטה ה- j^{th} של וקטור ב- F^n . לפיכך

$$\varphi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j \quad \text{לכל } (x_1, \dots, x_n) \in F^n.$$

יהיו $e_1, \dots, e_n$ הבסיס הסטנדרטי של F^n . אזי

$$\varphi_j(e_k) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = j, \\ 0 & \text{if } k \neq j. \end{cases}$$

לפיכך $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ הוא הבסיס הדואלי של הבסיס הסטנדרטי $e_1, \dots, e_n$ של F^n .

המסקנה הבאה מראה כי בסיס דואלי של בסיס של V מורכב מהפונקציונלים הליניאריים מעל V המספקים את המקדמים לביטוי וקטור ב- V כצירוף ליניארי של וקטורי הבסיס.

3.114 בסיס דואלי מספק מקדמים עבור צירוף ליניארי

נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V ו- $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ הוא הבסיס הדואלי. אזי

$$v = \varphi_1(v)v_1 + \dots + \varphi_n(v)v_n$$

לכל $v \in V$.

הוכחה נניח ש- $v \in V$. אזי קיימים $c_1, \dots, c_n \in F$ כך ש-

3.115

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n.$$

אם $j \in \{1, \dots, n\}$, אזי הפעלת φ_j על שני אגפי המשוואה לעיל נותנת

$$\varphi_j(v) = c_j.$$

נציב את הערכים של $c_1, \dots, c_n$ שקיבלנו מהמשוואה לעיל בתוך 3.115 ונקבל ש-

$$v = \varphi_1(v)v_1 + \dots + \varphi_n(v)v_n$$

המסקנה הבאה מראה כי הבסיס הדואלי הוא אכן בסיס למרחב הדואלי. לפיכך המונח "בסיס דואלי" מוצדק.

3.116 בסיס דואלי הוא בסיס של המרחב הדואלי

נניח ש- V מממד סופי. אזי הבסיס הדואלי של בסיס של V הוא בסיס של V' .

הוכחה נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V . נסמן ב- $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ את הבסיס הדואלי. כדי להראות ש- $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ היא רשימת איברים של V' בלתי תלויה ליניארית, נניח ש- $a_1, \dots, a_n \in F$ כך ש-

$$3.117 \quad a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n = 0.$$

כעת

$$(a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n)(v_k) = a_k$$

לכל $k = 1, \dots, n$. לפיכך 3.117 מראה לנו ש- $a_1 = \dots = a_n = 0$. לכן $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ בלתי תלויה ליניארית.

מאחר ש- $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ רשימה בלתי תלויה ליניארית ב- V' שאורכה שווה ל- $\dim V'$ (לפי 3.111), אנו מסיקים כי $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ בסיס של V' (ראו 2.38). ■

נשים לב כי בהגדרה הבאה, אם T העתקה ליניארית מ- V אל W אזי T' העתקה ליניארית מ- W' אל V' .

3.118 הגדרה: העתקה דואלית, T'

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. ההעתקה הדואלית של T היא ההעתקה הליניארית $T' \in \mathcal{L}(W', V')$ המוגדרת לכל $\varphi \in W'$ על ידי

$$T'(\varphi) = \varphi \circ T.$$

אם $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $\varphi \in W'$, אזי $T'(\varphi)$ מוגדרת לעיל כהרכבה של ההעתקות הליניאריות φ ו- T . לפיכך $T'(\varphi)$ היא אכן העתקה ליניארית מ- V אל F ; במילים אחרות, $T'(\varphi) \in V'$.

שתי הנקודות הבאות מראות כי T' העתקה ליניארית מ- W' אל V' .

• אם $\varphi, \psi \in W'$ אזי

$$T'(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi) \circ T = \varphi \circ T + \psi \circ T = T'(\varphi) + T'(\psi).$$

• אם $\lambda \in F$ ו- $\varphi \in W'$ אזי

$$T'(\lambda\varphi) = (\lambda\varphi) \circ T = \lambda(\varphi \circ T) = \lambda T'(\varphi).$$

הסימון באמצעות תג מופיע בדוגמה הבאה בשתי משמעויות בלתי קשורות: D' מסמן את ההעתקה הדואלית של ההעתקה הליניארית D , ואילו p' מסמן את הנגזרת של הפולינום p .

3.119 דוגמה: העתקה זואלית של העתקת הגזירה

נגדיר $D: \mathcal{P}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{R})$ על ידי $Dp = p'$.

- נניח ש- φ הוא הפונקציונל הליניארי מעל $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ המוגדר על ידי $\varphi(p) = p(3)$. אזי $D'(\varphi)$ הוא הפונקציונל הליניארי מעל $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ הנתון על ידי

$$(D'(\varphi))(p) = (\varphi \circ D)(p) = \varphi(Dp) = \varphi(p') = p'(3).$$

לפיכך $D'(\varphi)$ הוא הפונקציונל הליניארי מעל $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ המעתיק את p אל $p'(3)$.

- נניח ש- φ הוא הפונקציונל הליניארי מעל $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ המוגדר על ידי $\varphi(p) = \int_0^1 p$. אזי $D'(\varphi)$ הוא הפונקציונל הליניארי מעל $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ הנתון על ידי

$$(D'(\varphi))(p) = (\varphi \circ D)(p)$$

$$= \varphi(Dp)$$

$$= \varphi(p')$$

$$= \int_0^1 p'$$

$$= p(1) - p(0).$$

לפיכך $D'(\varphi)$ הוא הפונקציונל הליניארי מעל $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ המעתיק את p אל $p(1) - p(0)$.

במסקנה הבאה מסעיפים (א) ו-(ב) נובע כי הפונקציה המעתיקה את T אל T' היא העתקה ליניארית מ- $\mathcal{L}(V, W)$ אל $\mathcal{L}(W', V')$. שימו לב להיפוך הסדר בסעיף (ג) מ- ST באגף השמאלי ל- $T'S'$ באגף הימני.

3.120 תכונות אלגבריות של העתקות זואליות

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזיא. $(S + T)' = S' + T'$ לכל $S \in \mathcal{L}(V, W)$ ב. $(\lambda T)' = \lambda T'$ לכל $\lambda \in \mathbf{F}$ ג. $(ST)' = T'S'$ לכל $S \in \mathcal{L}(W, U)$ **הוכחה** הוכחות (א) ו-(ב) מושארות לקוראים.להוכחת (ג), נניח ש- $\varphi \in U'$. אזי

$$(ST)'(\varphi) = \varphi \circ (ST) = (\varphi \circ S) \circ T = T'(\varphi \circ S) = T'(S'(\varphi)) = (T'S')(\varphi),$$

כאשר השוויונות הראשון, השלישי, והרביעי לעיל מתקיימים לאור הגדרת ההעתקה הזואלית, השוויון השני מתקיים מאחר שפעולת הרכבת פונקציות היא אסוציאטיבית, והשוויון האחרון נובע מהגדרת ההרכבה.

המשוואה לעיל מראה כי $(ST)'(\varphi) = (T'S')(\varphi)$ לכל $\varphi \in U'$. לפיכך $(ST)' = T'S'$.

בחלק מהספרים זואליות מסומנות ב- V^* ו- T^* במקום V' ו- T' . אולם, בספר זה הסימון T^* שמור להעתקה הצמודה שאותה נכיר כשנלמד על העתקות מעל מרחבי מכפלה פנימית בפרק 4.

מרחב האפס והטווח של העתקה דואלית

מטרתנו בתת־יחידה זו היא לתאר את $\text{null } T'$ ו- $\text{range } T'$ במונחים של $\text{range } T$ ו- $\text{null } T$. לצורך כך נזדקק להגדרה הבאה.

3.121 הגדרה: **מֵאָפֶס**, U^0

עבור $U \subseteq V$, המֵאָפֶס של U , המסומן ב- U^0 , מוגדר על ידי
 $U^0 = \{\varphi \in V' : \varphi(u) = 0 \text{ לכל } u \in U\}.$

3.122 דוגמה: איבר במאפס

נניח ש- U התת־מרחב של $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ המורכב מכפולות פולינומיות של x^2 . אם φ הוא הפונקציונל הליניארי מעל $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ המוגדר על ידי $\varphi(p) = p'(0)$, אזי $\varphi \in U^0$.

עבור $U \subseteq V$, המֵאָפֶס U^0 הוא תת־קבוצה של המרחב הדואלי V' . לפיכך U^0 תלוי במרחב הווקטורי המכיל את U , ולכן סימון כגון U_V^0 יהיה מדויק יותר. אולם, מאחר שהמרחב הווקטורי המכיל תמיד יהיה ברור מההקשר, אנו נשתמש בסימון הפשוט U^0 יותר.

3.123 דוגמה: המאפס של תת־מרחב דו־ממדי של $\mathbf{R}^5$

נסמן ב- e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^5$; יהיו $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5 \in (\mathbf{R}^5)'$ הבסיס הדואלי של e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 . נניח ש-

$$U = \text{span}(e_1, e_2) = \{(x_1, x_2, 0, 0, 0) \in \mathbf{R}^5 : x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}.$$

ברצוננו להראות כי $U^0 = \text{span}(\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)$.

נזכיר (ראו 3.113) כי φ_j הוא הפונקציונל הליניארי מעל $\mathbf{R}^5$ הבוחר את הקואורדינטה ה- j^{th} באופן הבא: $\varphi_j(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_j$.

תחילה נניח ש- $\varphi \in \text{span}(\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)$. אזי קיימים $c_3, c_4, c_5 \in \mathbf{R}$ כך ש- $\varphi = c_3\varphi_3 + c_4\varphi_4 + c_5\varphi_5$. אם $(x_1, x_2, 0, 0, 0) \in U$, אזי

$$\varphi(x_1, x_2, 0, 0, 0) = (c_3\varphi_3 + c_4\varphi_4 + c_5\varphi_5)(x_1, x_2, 0, 0, 0) = 0.$$

לפיכך $\varphi \in U^0$. לכן הראינו כי $\text{span}(\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5) \subseteq U^0$.

כעת נראה את ההכלה בכיוון ההפוך.

נניח כי $\varphi \in U^0$. מאחר שהבסיס הדואלי הוא בסיס של $(\mathbf{R}^5)'$, קיימים סקלרים $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbf{R}$ כך ש- $\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 + c_4\varphi_4 + c_5\varphi_5$. מאחר ש- $e_1 \in U$ ו- $\varphi \in U^0$, נקבל

$$0 = \varphi(e_1) = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 + c_4\varphi_4 + c_5\varphi_5)(e_1) = c_1.$$

באופן דומה, $e_2 \in U$ ולפיכך $c_2 = 0$. לכן $\varphi = c_3\varphi_3 + c_4\varphi_4 + c_5\varphi_5$. לפיכך $U^0 \subseteq \text{span}(\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)$.

לפיכך $U^0 = \text{span}(\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)$.

3.124 המאפס הוא תת-מרחב

נניח ש- $U \subseteq V$. אזי U^0 תת-מרחב של V' .

הוכחה נשים לב כי $0 \in U^0$ (כאן ה-0 הוא הפונקציונל הליניארי האפס מעל V) מאחר שהפעלת פונקציונל האפס על כל וקטור ב- U תוצאתה $0 \in F$.

נניח ש- $\varphi, \psi \in U^0$. לפיכך $\varphi, \psi \in V'$ ו- $\varphi(u) = \psi(u) = 0$ לכל $u \in U$. אם $u \in U$, אזי

$$(\varphi + \psi)(u) = \varphi(u) + \psi(u) = 0 + 0 = 0.$$

לפיכך $\varphi + \psi \in U^0$.

באופן דומה, U^0 סגור תחת פעולת כפל בסקלר. לפיכך 1.34 גורר ש- U^0 תת-מרחב של V' . ■

במסקנה הבאה נראה ש- $\dim U^0$ הוא ההפרש בין $\dim V$ ל- $\dim U$. לדוגמה, המסקנה מראה לנו כי אם U תת-מרחב דו-ממדי של $\mathbb{R}^5$, אזי U^0 תת-מרחב תלת-ממדי של $(\mathbb{R}^5)'$, כפי שראינו בדוגמה 3.123.

את המסקנה הבאה אפשר להוכיח אם נלך בעקבות ההוכחה בדוגמה 3.123: נבחר בסיס $u_1, \dots, u_m$ של U , נשלים לבסיס $u_1, \dots, u_m, \dots, u_n$ של V , יהי $\varphi_1, \dots, \varphi_m, \dots, \varphi_n$ הבסיס הדואלי של V' , ובנקודה זו נוכל להראות ש- $\varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n$ בסיס של U^0 , מה שיוביל אל התוצאה הרצויה. עליכם לבנות את ההוכחה במתווה שתואר, זאת אף שאנו מציגים להלן הוכחה אלגנטית יותר.

3.125 ממד המאפס

נניח ש- V מממד סופי ו- U תת-מרחב של V . אזי

$$\dim U^0 = \dim V - \dim U.$$

הוכחה תהי $i \in \mathcal{L}(U, V)$ העתקת ההכלה המוגדרת על ידי $i(u) = u$ לכל $u \in U$. לפיכך i' העתקה ליניארית מ- V' אל U' . נפעיל את המשפט היסודי של ההעתקות הליניאריות (3.21) על i' ונקבל

$$\dim \text{range } i' + \dim \text{null } i' = \dim V'.$$

אולם $\text{null } i' = U^0$ (כפי שניתן לראות כשבוחנים את ההגדרות) ו- $\dim V' = \dim V$ (לפי 3.111), כך שנוכל לכתוב מחדש את המשוואה לעיל באופן הבא

$$\dim \text{range } i' + \dim U^0 = \dim V. \quad 3.126$$

אם $\varphi \in U'$, אזי נוכל להרחיב את הגדרת φ לפונקציונל ליניארי ψ מעל V (ראו, לדוגמה, תרגיל 13 ביחידה 1). מהגדרת $i'(\psi) = \varphi$ נובע כי $i'(\psi) = \varphi$ לפיכך $\varphi \in \text{range } i'$. לכן מה שמוביל למסקנה כי $\text{range } i' = U'$. לכן

$$\dim \text{range } i' = \dim U' = \dim U,$$

בשלב זה 3.126 הופכת למשוואה $\dim U + \dim U^0 = \dim V$, כפי שרצינו. ■

המסקנה הבאה יכולה לשמש ככלי שבאמצעותו ניתן להראות שגודלו של תת-מרחב מקסימלי-ראו (א)–או להראות שגודלו של תת-מרחב מינימלי-ראו (ב).

3.127 תנאי לכך שהמאפס שווה ל- $\{0\}$ או למרחב כולו

נניח ש- V מממד סופי ו- U תת-מרחב של V . אזי

א. $U^0 = \{0\}$ אם ורק אם $U = V$

ב. $U^0 = V'$ אם ורק אם $U = \{0\}$.

הוכחה להוכחת (א), מתקיים

$$\begin{aligned} U^0 = \{0\} &\Leftrightarrow \dim U^0 = 0 \\ &\Leftrightarrow \dim U = \dim V \\ &\Leftrightarrow U = V, \end{aligned}$$

כאשר השקילות השנייה נובעת מ-3.125 והשקילות השלישית נובעת מ-2.39.

באופן דומה, להוכחת (ב) מתקיים

$$\begin{aligned} U^0 = V' &\Leftrightarrow \dim U^0 = \dim V' \\ &\Leftrightarrow \dim U^0 = \dim V \\ &\Leftrightarrow \dim U = 0 \\ &\Leftrightarrow U = \{0\}, \end{aligned}$$

כאשר כיוון אחד של השקילות הראשונה נובע מ-2.39, השקילות השנייה נובעת מ-3.111, והשקילות השלישית נובעת מ-3.125.

ההוכחה של (א) במסקנה הבאה אינה משתמשת בהנחה ש- V ו- W מממד סופי.

3.128 מרחב האפס של T'

נניח ש- V ו- W מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי

א. $\text{null } T' = (\text{range } T)^0$

ב. $\dim \text{null } T' = \dim \text{null } T + \dim W - \dim V$.

הוכחה

א. ראשית נניח כי $\varphi \in \text{null } T'$. לפיכך $0 = T'(\varphi) = \varphi \circ T$. לכן

$$0 = (\varphi \circ T)(v) = \varphi(Tv) \quad \text{לכל } v \in V.$$

לפיכך $\varphi \in (\text{range } T)^0$. מכאן נובע ש- $\text{null } T' \subseteq (\text{range } T)^0$.

להוכחת ההכלה בכיוון ההפוך, נניח כעת ש- $\varphi \in (\text{range } T)^0$. לפיכך $\varphi(Tv) = 0$ לכל וקטור $v \in V$. לכן $0 = \varphi \circ T = T'(\varphi)$. אחרות, $\varphi \in \text{null } T'$. מה שמראה לנו כי $\text{null } T' \supseteq (\text{range } T)^0$, ובזאת השלמנו את הוכחת (א).

ב. מתקיים

$$\begin{aligned}\dim \text{null } T' &= \dim(\text{range } T)^0 \\ &= \dim W - \dim \text{range } T \\ &= \dim W - (\dim V - \dim \text{null } T) \\ &= \dim \text{null } T + \dim W - \dim V,\end{aligned}$$

כאשר השוויון הראשון נובע מ- (א), השוויון השני נובע מ- 3.125, והשוויון השלישי נובע מהמשפט היסודי של ההעתקות הליניאריות (3.21).

המסקנה הבאה יכולה להיות שימושית שכן לעיתים קל יותר להראות ש- T' חד-חד-ערכית מאשר להראות ישירות ש- T על.

3.129 T על שקול ל- T' חד-חד-ערכית

נניח ש- V ו- W מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי
 $T \iff T'$ חד-חד-ערכית.

הוכחה מתקיים

$$\begin{aligned}\text{range } T = W &\iff T \in \mathcal{L}(V, W) \\ (\text{range } T)^0 = \{0\} &\iff \\ \text{null } T' = \{0\} &\iff \\ T' \text{ חד-חד-ערכית,} &\iff\end{aligned}$$

כאשר השקילות השנייה נובעת מ- 3.127 (א) והשקילות השלישית נובעת מ- 3.128 (א).

3.130 הטווח של T'

נניח ש- V ו- W מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי
א. $\dim \text{range } T' = \dim \text{range } T$
ב. $\text{range } T' = (\text{null } T)^0$.

הוכחה

א. מתקיים

$$\begin{aligned}\dim \text{range } T' &= \dim W' - \dim \text{null } T' \\ &= \dim W - \dim(\text{range } T)^0 \\ &= \dim \text{range } T,\end{aligned}$$

כאשר השוויון הראשון נובע מ- 3.21, השוויון השני נובע מ- 3.111 ו- 3.128 (א), והשוויון השלישי נובע מ- 3.125.

ב. נניח תחילה ש- $\varphi \in \text{range } T'$. לפיכך קיים $\psi \in W'$ כך ש- $\varphi = T'(\psi)$. אם $v \in \text{null } T$ אזי

$$\varphi(v) = (T'(\psi))v = (\psi \circ T)(v) = \psi(Tv) = \psi(0) = 0.$$

לכן $\varphi \in (\text{null } T)^0$. מכאן נובע ש- $\text{range } T' \subseteq (\text{null } T)^0$.

נשלים את ההוכחה בכך שנראה כי הממדים של $\text{range } T'$ ו- $(\text{null } T)^0$ זהים. לצורך כך, נציין כי

$$\begin{aligned} \dim \text{range } T' &= \dim \text{range } T \\ &= \dim V - \dim \text{null } T \\ &= \dim(\text{null } T)^0, \end{aligned}$$

כאשר השוויון הראשון נובע מ- (א), השוויון השני נובע מ- 3.21, והשוויון השלישי נובע מ- 3.125. ■

את המסקנה הבאה יש להשוות ל- 3.129.

3.131 T חד-חד-ערכית שקול ל- T' על

נניח ש- V ו- W מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי

$$T \text{ חד-חד-ערכית} \iff T' \text{ על.}$$

הוכחה מתקיים

$$\begin{aligned} \text{null } T = \{0\} &\iff \text{חד-חד-ערכית } T \\ (\text{null } T)^0 = V' &\iff \\ \text{range } T' = V' &\iff \end{aligned}$$

כאשר השקילות השנייה נובעת מ- 3.127 (ב) והשקילות השלישית נובעת מ- 3.130 (ב). ■

מטריצה של העתקה דואלית

המסגרת עבור המסקנה הבאה היא ההנחה שיש לנו בסיס $v_1, \dots, v_n$ של V , יחד עם הבסיס הדואלי שלו $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ של V' . בנוסף יש לנו בסיס $w_1, \dots, w_m$ של W , יחד עם הבסיס הדואלי שלו $\psi_1, \dots, \psi_m$ של W' . לפיכך $\mathcal{M}(T)$ מחושבת ביחס לבסיסים של V ו- W שאותם ציינו זה עתה, ואילו $\mathcal{M}(T')$ מחושבת ביחס לבסיסים הדואליים שאותם ציינו זה עתה של W' ו- V' . שימוש בבסיסים אלו יוביל אל המסקנה היפה הבאה.

3.132 מטריצת T' היא המטריצה המשוחלפת של T

נניח ש- V ו- W מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי

$$\mathcal{M}(T') = (\mathcal{M}(T))^t.$$

הוכחה תהינה $A = \mathcal{M}(T)$ ו- $C = \mathcal{M}(T')$. נניח ש- $1 \leq j \leq m$ ו- $1 \leq k \leq n$. מהגדרת $\mathcal{M}(T')$ נקבל

$$T'(\psi_j) = \sum_{r=1}^n C_{r,j} \varphi_r.$$

האגף השמאלי של המשוואה לעיל שווה ל- $\psi_j \circ T$. לפיכך הפעלת שני אגפי המשוואה לעיל על v_k נותנת

$$\begin{aligned} (\psi_j \circ T)(v_k) &= \sum_{r=1}^n C_{r,j} \varphi_r(v_k) \\ &= C_{k,j}. \end{aligned}$$

בנוסף, מתקיים

$$\begin{aligned} (\psi_j \circ T)(v_k) &= \psi_j(Tv_k) \\ &= \psi_j\left(\sum_{r=1}^m A_{r,k} w_r\right) \\ &= \sum_{r=1}^m A_{r,k} \psi_j(w_r) \\ &= A_{j,k}. \end{aligned}$$

בהשוואת השורה האחרונה של כל אחת משתי קבוצות המשוואות, אנו מקבלים $C_{k,j} = A_{j,k}$. לפיכך $C = A^t$. במילים אחרות, $\mathcal{M}(T') = (\mathcal{M}(T))^t$, כפי שרצינו. ■

כעת אנו משתמשים בדואליות כדי לספק הוכחה חלופית לכך שדרגת העמודות של מטריצה שווה לדרגת השורות של המטריצה. את מסקנה זו הוכחנו לעיל באמצעים אחרים—ראו 3.57.

3.133 דרגת העמודות שווה לדרגת השורות

נניח ש- $A \in \mathbb{F}^{m,n}$. אזי דרגת העמודות של A שווה לדרגת השורות של A .

הוכחה נגדיר $T: \mathbb{F}^{n,1} \rightarrow \mathbb{F}^{m,1}$ על ידי $Tx = Ax$. לפיכך $\mathcal{M}(T) = A$, כאשר $\mathcal{M}(T)$ מחושבת ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של $\mathbb{F}^{n,1}$ ו- $\mathbb{F}^{m,1}$. נקבל כעת

דרגת העמודות של A = דרגת העמודות של $\mathcal{M}(T)$

$$\dim \text{range } T =$$

$$\dim \text{range } T' =$$

$$= \text{דרגת העמודות של } \mathcal{M}(T')$$

$$= \text{דרגת העמודות של } A^t$$

$$= \text{דרגת השורות של } A,$$

כאשר השוויון השני נובע מ- 3.78, השוויון השלישי נובע מ- 3.130(א), השוויון הרביעי נובע מ- 3.78, השוויון החמישי נובע מ- 3.132, והשוויון האחרון נובע מההגדרות של דרגות השורות והעמודות. ■

ראו תרגיל 8 ביחידה 1 להוכחה חלופית נוספת למסקנה לעיל.

- 1 הסבירו מדוע כל פונקציונל ליניארי הוא או על או העתקת האפס.
- 2 הביאו שלוש דוגמאות שונות של פונקציונלים ליניאריים מעל $\mathbb{R}^{[0,1]}$.
- 3 נניח ש- V מממד סופי ו- $v \in V$ עם $v \neq 0$. הוכיחו שקיים $\varphi \in V'$ כך ש- $\varphi(v) = 1$.
- 4 נניח ש- V מממד סופי ו- U תת-מרחב של V כך ש- $U \neq V$. הוכיחו שקיים $\varphi \in V'$ כך ש- $\varphi(u) = 0$ לכל $u \in U$ אבל $\varphi \neq 0$.
- 5 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $w_1, \dots, w_m$ בסיס של $\text{range } T$. לכן לכל $v \in V$, קיימים מספרים יחידים $\varphi_1(v), \dots, \varphi_m(v)$ כך ש-
$$Tv = \varphi_1(v)w_1 + \dots + \varphi_m(v)w_m,$$
 ובכך מוגדרות פונקציות $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ מ- V ל- F . הראו שכל אחת מהפונקציות $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ היא פונקציונל ליניארי מעל V .
- 6 נניח ש- $\varphi, \beta \in V'$. הוכיחו ש- $\text{null } \varphi \subseteq \text{null } \beta$ אם ורק אם קיים $c \in F$ כך ש- $\beta = c\varphi$.
- 7 נניח ש- $V_1, \dots, V_m$ מרחבים וקטוריים. הוכיחו ש- $(V_1 \times \dots \times V_m)'$ ו- $V_1' \times \dots \times V_m'$ מרחבים וקטוריים איזומורפיים.
- 8 נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V ו- $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ הבסיס הדואלי של V' . הגדירו $\Gamma: V \rightarrow F^n$ ו- $\Lambda: F^n \rightarrow V$ על ידי
$$\Gamma(v) = (\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v)) \quad \text{וגם} \quad \Lambda(a_1, \dots, a_n) = a_1v_1 + \dots + a_nv_n.$$
 הסבירו מדוע Γ ו- Λ הופכיות זו של זו.
- 9 נניח ש- m מספר שלם חיובי. הראו שהבסיס הדואלי של הבסיס $1, x, \dots, x^m$ של $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ הוא $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$, כאשר
$$\varphi_k(p) = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}.$$
 כאן $p^{(k)}$ מסמן את הנגזרת ה- k^{th} של p , תוך הבנה כי הנגזרת ה- 0^{th} של p היא p .
- 10 נניח ש- m מספר שלם חיובי. א. הראו ש- $1, x - 5, \dots, (x - 5)^m$ בסיס של $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$. ב. מהו הבסיס הדואלי של הבסיס ב- (א)?
- 11 נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V ו- $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ הבסיס הדואלי המתאים של V' . נניח ש- $\psi \in V'$. הוכיחו ש-
$$\psi = \psi(v_1)\varphi_1 + \dots + \psi(v_n)\varphi_n.$$

12 נניח ש- $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$.

א. הוכיחו ש- $(S + T)' = S' + T'$.

ב. הוכיחו ש- $(\lambda T)' = \lambda T'$ לכל $\lambda \in \mathbf{F}$.

תרגיל זה מבקש מכם לוודא את (א) ו- (ב) ב- 3.120.

13 הראו שההעתקה הדואלית של אופרטור הזהות מעל V היא אופרטור הזהות מעל V' .

14 נגדיר $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ על ידי

$$T(x, y, z) = (4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z).$$

נניח ש- φ_1, φ_2 מסמנים את הבסיס הדואלי של הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^2$ ו- ψ_1, ψ_2, ψ_3 מסמנים את הבסיס הדואלי של הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^3$.

א. תארו את הפונקציונלים הליניאריים $T'(\varphi_1)$ ו- $T'(\varphi_2)$.

ב. כתבו את $T'(\varphi_1)$ ו- $T'(\varphi_2)$ כצירוף ליניארי של ψ_1, ψ_2, ψ_3 .

15 נגדיר $T: \mathcal{P}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{R})$ על ידי

$$(Tp)(x) = x^2 p(x) + p''(x)$$

לכל $x \in \mathbf{R}$.

א. נניח ש- $\varphi \in \mathcal{P}(\mathbf{R})'$ מוגדר על ידי $\varphi(p) = p'(4)$. תארו את הפונקציונל הליניארי $T'(\varphi)$ מעל $\mathcal{P}(\mathbf{R})$.

ב. נניח ש- $\varphi \in \mathcal{P}(\mathbf{R})'$ מוגדר על ידי $\varphi(p) = \int_0^1 p$. חשבו $(T'(\varphi))(x^3)$.

16 נניח ש- W מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הוכיחו ש-

$$T' = 0 \iff T = 0.$$

17 נניח ש- V ו- W מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הוכיחו ש- T הפיכה אם ורק אם $T' \in \mathcal{L}(W', V')$ הפיכה.

18 נניח ש- V ו- W מממד סופי. הוכיחו שההעתקה המעתיקה $T \in \mathcal{L}(V, W)$ אל $\mathcal{L}(W', V')$ היא איזומורפיזם של $\mathcal{L}(V, W)$ על $\mathcal{L}(W', V')$.

19 נניח ש- $U \subseteq V$. הסבירו מדוע

$$U^0 = \{\varphi \in V' : U \subseteq \text{null } \varphi\}.$$

20 נניח ש- V מממד סופי ו- U תת-מרחב של V . הראו ש-

$$U = \{v \in V : \varphi(v) = 0 \text{ לכל } \varphi \in U^0\}.$$

21 נניח ש- V מממד סופי ו- U ו- W תתי-מרחב של V .

א. הוכיחו ש- $U^0 \subseteq W^0$ אם ורק אם $U \subseteq W$.

ב. הוכיחו ש- $W^0 = U^0$ אם ורק אם $U = W$.

22 נניח ש- V מממד סופי ו- U ו- W תת-מרחב של V .

א. הראו ש- $(U + W)^0 = U^0 \cap W^0$.

ב. הראו ש- $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$.

23 נניח ש- V מממד סופי ו- $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in V'$. הוכיחו ששלוש הקבוצות הבאות שוות זו לזו.

א. $\text{span}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$

ב. $((\text{null } \varphi_1) \cap \dots \cap (\text{null } \varphi_m))^0$

ג. $\{\varphi \in V' : (\text{null } \varphi_1) \cap \dots \cap (\text{null } \varphi_m) \subseteq \text{null } \varphi\}$

24 נניח ש- V מממד סופי ו- $v_1, \dots, v_m \in V$. הגדירו העתקה ליניארית $\Gamma: V' \rightarrow \mathbf{F}^m$ על ידי $\Gamma(\varphi) = (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_m))$.

א. הוכיחו ש- $v_1, \dots, v_m$ פורסת את V אם ורק אם Γ חד-חד-ערכית.

ב. הוכיחו ש- $v_1, \dots, v_m$ בלתי תלויה ליניארית אם ורק אם Γ על.

25 נניח ש- V מממד סופי ו- $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in V'$. הגדירו העתקה ליניארית $\Gamma: V \rightarrow \mathbf{F}^m$ על ידי $\Gamma(v) = (\varphi_1(v), \dots, \varphi_m(v))$.

א. הוכיחו ש- $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ פורסת את V' אם ורק אם Γ חד-חד-ערכית.

ב. הוכיחו ש- $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ בלתי תלויה ליניארית אם ורק אם Γ על.

26 נניח ש- V מממד סופי ו- Ω תת-מרחב של V' . הוכיחו ש-

$$\Omega = \{v \in V : \varphi(v) = 0 \text{ לכל } \varphi \in \Omega\}^0.$$

27 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_5(\mathbf{R}))$ ו- $\text{null } T' = \text{span}(\varphi)$, כאשר φ הפונקציונל הליניארי מעל $\mathcal{P}_5(\mathbf{R})$ המוגדר על ידי $\varphi(p) = p(8)$. הוכיחו ש-

$$\text{range } T = \{p \in \mathcal{P}_5(\mathbf{R}) : p(8) = 0\}.$$

28 נניח ש- V מממד סופי ו- $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ רשימה בלתי תלויה ליניארית ב- V' . הוכיחו ש-

$$\dim((\text{null } \varphi_1) \cap \dots \cap (\text{null } \varphi_m)) = (\dim V) - m.$$

29 נניח ש- V ו- W מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

א. הוכיחו שאם $\varphi \in W'$ ו- $\text{null } T' = \text{span}(\varphi)$, אזי $\text{range } T = \text{null } \varphi$.

ב. הוכיחו שאם $\psi \in V'$ ו- $\text{range } T' = \text{span}(\psi)$, אזי $\text{null } T = \text{null } \psi$.

30 נניח ש- V מממד סופי ו- $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ בסיס של V' . הראו שקיים בסיס של V שבבסיסו הדואלי הוא $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

31 נניח ש- U תת-מרחב של V . תהי $i: U \rightarrow V$ העתקת ההכלה המוגדרת על ידי $i(u) = u$. לפיכך $i' \in \mathcal{L}(V', U')$.

א. הראו ש- $\text{null } i' = U^0$.

ב. הוכיחו שאם V מממד סופי, אזי $\text{range } i' = U'$.

ג. הוכיחו שאם V מממד סופי, אזי $\tilde{i}$ איזומורפיזם מ- V/U^0 על U' .

האיזומורפיזם ב- (ג) הוא טבעי במובן שאינו תלוי בבחירת בסיס של V או של U .
מהמרחבים הווקטוריים.

32 המרחב הדואלי הכפול של V , המסומן ב- V'' , מוגדר כמרחב הדואלי של V' . במילים אחרות, $V'' = (V')'$. הגדירו $\Lambda: V \rightarrow V''$ באופן הבא

$$(\Lambda v)(\varphi) = \varphi(v)$$

לכל $v \in V$ ולכל $\varphi \in V'$.

- א. הראו ש- Λ העתקה ליניארית מ- V אל V'' .
- ב. הראו שאם $T \in \mathcal{L}(V)$, אזי $T'' \circ \Lambda = \Lambda \circ T$, כאשר $T'' = (T')'$.
- ג. הראו שאם V מממד סופי, אזי Λ איזומורפיזם מ- V על V'' .

ATOM-03-748

נניח ש- V מממד סופי. אזי V ו- V' איזומורפיים, אך פציאת איזומורפיזם מ- V על V' בדרך כלל דורשת בחירת בסיס של V . בניגוד לכך, האיזומורפיזם Λ מ- V על V'' אינו דורש בחירת בסיס ולפיכך נחשב לסבעי יותר.

33 נניח ש- U תת-מרחב של V . תהי $\pi: V \rightarrow V/U$ העתקת המנה הרגילה. לפיכך $\pi' \in \mathcal{L}((V/U)', V')$

- א. הראו ש- π' חד-חד-ערכית.
- ב. הראו ש- $\text{range } \pi' = U^0$.
- ג. הסיקו כי π' איזומורפיזם מ- $(V/U)'$ על U^0 .

האיזומורפיזם ב- (ג) הוא טבעי במובן שאינו תלוי בבחירת בסיס של אף אחד מהמרחבים הווקטוריים. למעשה, אין כאן הנחה שאחד מהמרחבים הווקטוריים הללו מממד סופי.

פרק ד

פולינומים

פרק זה מכיל חומר על פולינומים שנזדקק לו כשנעסוק בהעתקות ליניאריות ממרחב וקטורי לעצמו. אף שרבות מהמסקנות בפרק זה כבר מוכרות לכם מקורסים אחרים, הן הוכללו כאן למען השלמות.

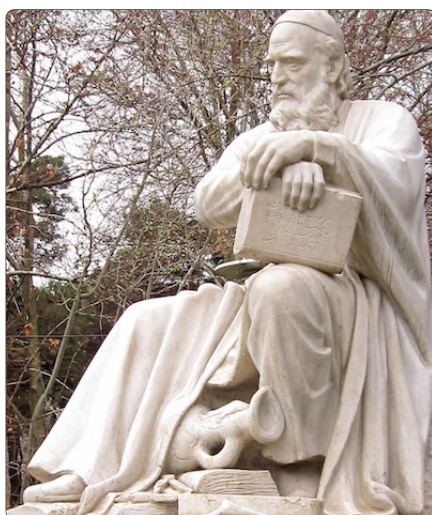
מאחר שפרק זה אינו עוסק באלגברה ליניארית, מנחה הקורס עשוי לעבור עליו בזריזות, וייתכן שלא תידרשו לנתח לעומק את כל ההוכחות. עם זאת, ודאו שלכל הפחות קראתם והבנתם את ניסוחי כל המסקנות בפרק—הן תהיינה בשימוש בפרקים הבאים.

הפרק נפתח בסקירה קצרה של המאפיינים האלגבריים של המספרים המרוכבים. לאחר מכן אנו מוכיחים כי מספר השורשים של פולינום שאינו קבוע הוא לכל היותר מעלתו. בנוסף אנו מספקים הוכחה המבוססת על אלגברה ליניארית לאלגוריתם החלוקה של פולינומים, שכדאי לקרוא אותה גם אם כבר מוכרת לכם הוכחה שאינה משתמשת באלגברה ליניארית.

כפי שנראה, המשפט היסודי של האלגברה יוביל אותנו לפירוק של כל פולינום לגורמים ממעלה ראשונה אם שדה הסקלרים הוא $\mathbb{C}$, או לגורמים ממעלה שנייה לכל היותר אם שדה הסקלרים הוא $\mathbb{R}$.

הנחות המוצא לפרק זה

• F מייצג $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.



Alireza Javaheri CC BY

פסלו של המתמטיקאי והמשורר עומר ח'יאם (1048–1131), שבספר האלגברה שכתב בשנת 1070 מופיע לראשונה חקר מעמיק של פולינומים ממעלה שלישית.

בטרם נעסוק בפולינומים עם מקדמים מרוכבים או ממשיים, עלינו ללמוד מעט יותר על המספרים המרוכבים.

4.1 הגדרה: חלק ממשי, $\operatorname{Re} z$, חלק מדומה, $\operatorname{Im} z$

נניח ש- $z = a + bi$, כאשר a ו- b מספרים ממשיים.

- החלק הממשי של z , המסומן ב- $\operatorname{Re} z$, מוגדר על ידי $\operatorname{Re} z = a$.
- החלק המדומה של z , המסומן ב- $\operatorname{Im} z$, מוגדר על ידי $\operatorname{Im} z = b$.

לפיכך, עבור כל מספר מרוכב z , נקבל

$$z = \operatorname{Re} z + (\operatorname{Im} z)i.$$

4.2 הגדרה: צמוד מרוכב, $\bar{z}$, ערך מוחלט, $|z|$

נניח ש- $z \in \mathbb{C}$.

- הצמוד המרוכב של $z \in \mathbb{C}$, המסומן ב- $\bar{z}$, מוגדר על ידי $\bar{z} = \operatorname{Re} z - (\operatorname{Im} z)i$.
- הערך המוחלט של מספר מרוכב z , המסומן ב- $|z|$, מוגדר על ידי $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$.

4.3 דוגמה: חלק ממשי ומדומה, צמוד מרוכב, ערך מוחלט

נניח ש- $z = 3 + 2i$. אזי

$$\bullet \operatorname{Re} z = 3 \text{ ו- } \operatorname{Im} z = 2$$

$$\bullet \bar{z} = 3 - 2i$$

$$\bullet |z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

זיהוי מספר מרוכב $z \in \mathbb{C}$ עם הזוג הסדור $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \mathbb{R}^2$ מזהה את $\mathbb{C}$ עם $\mathbb{R}^2$. נשים לב כי $\mathbb{C}$ הוא מרחב וקטורי מרוכב חד-ממדי, אך עדיין נוכל לחשוב על $\mathbb{C}$ (המזוהה עם $\mathbb{R}^2$) כמרחב וקטורי ממשי דו-ממדי.

הערך המוחלט של כל מספר מרוכב הוא מספר אי-שלילי. ליתר דיוק, אם $z \in \mathbb{C}$, אזי $|z|$ שווה למרחק מהראשית ב- $\mathbb{R}^2$ לנקודה $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \mathbb{R}^2$.

עליכם לוודא ש- $z = \bar{\bar{z}}$ ו- $z = \bar{z}$ אם ורק אם z מספר ממשי.

החלקים הממשי והמדומה, הצמוד המרוכב והערך המוחלט מקיימים את התכונות במסקנה מרובת הסעיפים להלן.

4.4 תכונות מספרים מרוכבים

נניח ש- $w, z \in \mathbb{C}$. אזי מתקיימים השוויונות והאי-שוויונות הבאים.

סכום z ו- $\bar{z}$

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$$

הפרש z ו- $\bar{z}$

$$z - \bar{z} = 2(\operatorname{Im} z)i$$

מכפלת z ו- $\bar{z}$

$$z\bar{z} = |z|^2$$

אדיטיביות וכפליות של צמוד מרוכב

$$\overline{w + z} = \bar{w} + \bar{z} \quad \text{ו-} \quad \overline{wz} = \bar{w}\bar{z}$$

הצמדה כפולה של מרוכב

$$\overline{\bar{z}} = z$$

החלקים הממשי והמדומה תחומים על ידי $|z|$

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z| \quad \text{ו-} \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$$

ערך מוחלט של צמוד מרוכב

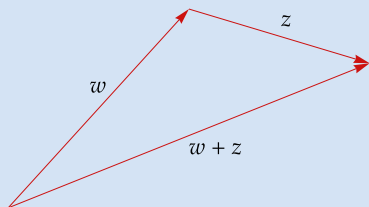
$$|\bar{z}| = |z|$$

כפליות ערך מוחלט

$$|wz| = |w||z|$$

אי-שוויון המשולש

$$|w + z| \leq |w| + |z|$$



פרשנות גאומטרית לאי-שוויון המשולש: אורך כל צלע במשולש הוא קטן או שווה לסכום אורכן של שתי הצלעות האחרות.

הוכחה מלבד הסעיף האחרון, ההוכחות השגרתיות לטענות לעיל מושארות לקוראים. נוכיח כעת את אי-שוויון המשולש. מתקיים

$$\begin{aligned} |w + z|^2 &= (w + z)(\bar{w} + \bar{z}) \\ &= w\bar{w} + z\bar{z} + w\bar{z} + \bar{w}z \\ &= |w|^2 + |z|^2 + w\bar{z} + \bar{w}z \\ &= |w|^2 + |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(w\bar{z}) \\ &\leq |w|^2 + |z|^2 + 2|w\bar{z}| \\ &= |w|^2 + |z|^2 + 2|w||z| \\ &= (|w| + |z|)^2. \end{aligned}$$

ראו תרגיל 2 לאי-שוויון המשולש ההפוך.

הוצאת שורש כעת נותנת את האי-שוויון
 הרצוי $|w + z| \leq |w| + |z|$. ■

שורשי פולינומים

נזכיר כי פונקציה $p: F \rightarrow F$ נקראת פולינום ממעלה m אם קיימים $a_0, \dots, a_m \in F$ ו- $a_m \neq 0$ כך ש-

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m$$

לכל $z \in F$. אם ייצוגו של p באופן שתואר לעיל לא היה יחיד, הייתה יכולה להיות לפולינום יותר ממעלה אחת. משימתנו הראשונה היא לשלול אפשרות זו.

לפתרונות המשוואה $p(z) = 0$ תפקיד מרכזי בחקר הפולינום $p \in \mathcal{P}(F)$. לפיכך לפתרונות אלו הוענק שם מיוחד.

4.5 הגדרה: שורש פולינום

מספר $\lambda \in F$ נקרא שורש של פולינום $p \in \mathcal{P}(F)$ אם

$$p(\lambda) = 0.$$

המסקנה הבאה משמשת ככלי המרכזי בבואנו להוכיח כי מעלת הפולינום יחידה.

4.6 כל שורש פולינום מתאים לגורם ממעלה ראשונה

נניח ש- m מספר שלם חיובי ו- $p \in \mathcal{P}(F)$ פולינום ממעלה m . נניח ש- $\lambda \in F$. אזי $p(\lambda) = 0$ אם ורק אם קיים פולינום $q \in \mathcal{P}(F)$ ממעלה $m-1$ כך ש-

$$p(z) = (z - \lambda)q(z)$$

לכל $z \in F$.

הוכחה ראשית נניח ש- $p(\lambda) = 0$. יהיו $a_0, a_1, \dots, a_m \in F$ כך ש-

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m$$

לכל $z \in F$. אזי

$$4.7 \quad p(z) = p(z) - p(\lambda) = a_1(z - \lambda) + \dots + a_m(z^m - \lambda^m)$$

לכל $z \in F$. עבור כל $k \in \{1, \dots, m\}$, המשוואה

$$z^k - \lambda^k = (z - \lambda) \sum_{j=1}^k \lambda^{j-1} z^{k-j}$$

מראה ש- $z^k - \lambda^k$ שווה ל- $z - \lambda$ כפול פולינום כלשהו ממעלה $k-1$. לפיכך לפי 4.7, p שווה ל- $z - \lambda$ כפול פולינום כלשהו ממעלה $m-1$, כפי שרצינו.

להוכחה בכיוון ההפוך, נניח כעת שקיים פולינום $q \in \mathcal{P}(F)$ כך ש- $p(z) = (z - \lambda)q(z)$ לכל $z \in F$. אזי $p(\lambda) = (\lambda - \lambda)q(\lambda) = 0$, כפי שרצינו. ■

כעת באפשרותנו להוכיח שלפולינומים מספר שורשים מוגבל.

4.8 מעלה m משמעותה m שורשים לכל היותר

נניח ש- m מספר שלם חיובי ו- $p \in \mathcal{P}(F)$ פולינום ממעלה m . אזי ל- p יש לכל היותר m שורשים ב- F .

הוכחה נוכיח באמצעות אינדוקציה על m . אם $m = 1$ המסקנה מתקיימת, שהרי אם $a_1 \neq 0$ אזי לפולינום $a_0 + a_1 z$ שורש אחד בלבד (השווה ל- $-a_0/a_1$). לפיכך נניח ש- $m > 1$ והמסקנה מתקיימת עבור $m - 1$.

אם ל- p אין שורשים ב- F , אזי המסקנה מתקיימת וההוכחה הסתיימה. לפיכך נניח שיש ל- p שורש $\lambda \in F$. לפי 4.6, קיים פולינום $q \in \mathcal{P}(F)$ ממעלה $m - 1$ כך שמתקיים

$$p(z) = (z - \lambda)q(z)$$

לכל $z \in F$. לפי הנחת האינדוקציה, ל- q יש לכל היותר $m - 1$ שורשים ב- F . המשוואה לעיל מראה ששורשי p ב- F הם בדיוק שורשי q ב- F בצירוף λ . לפיכך ל- p יש לכל היותר m שורשים ב- F .

המסקנה לעיל גוררת שמקדמי הפולינום נקבעים באופן יחיד (שהרי אם לפולינום היו שתי קבוצות שונות של מקדמים, תוצאת חיסור ייצוג אחד מהאחר הייתה פולינום שחלק ממקדמיו שונים מאפס אך בעל אינסוף שורשים). בפרט, מעלת הפולינום מוגדרת באופן יחיד.

לפולינום האפס הוגדרה המעלה $-\infty$ כך שלא יידרשו החרגות עבור מסקנות סבירות שונות כגון $\deg(pq) = \deg p + \deg q$.

נזכיר כי מעלת פולינום האפס מוגדרת כ- $-\infty$. בעת הצורך נבצע את החישוב הצפוי עם $-\infty$. לדוגמה, $-\infty < m$ ו- $-\infty + m = -\infty$ לכל מספר שלם m .

אלגוריתם חלוקת פולינומים

אם p ו- s מספרים שלמים אי-שליליים, ו- $s \neq 0$, אזי קיימים מספרים שלמים אי-שליליים q ו- r כך ש-

$$p = sq + r$$

וגם $r < s$. חשבו על תהליך שבו מחלקים p ב- s , ומקבלים מנה q עם שארית r . המסקנה הבאה נותנת תוצאה אנלוגית לפולינומים. לפיכך, לעיתים קרובות, היא נקראת האלגוריתם לחלוקת פולינומים, אף שבצורה שבה נוסחה כאן, אין זה אלגוריתם של ממש כי אם תוצאה שימושית.

חשבו על האלגוריתם לחלוקת פולינומים כתהליך שבו מופק פולינום שארית r כתוצאה מחילוק הפולינום p בפולינום s .

את האלגוריתם לחלוקת פולינומים ניתן להוכיח ללא שימוש באלגברה ליניארית כלל. אולם, כיאה לספר לימוד אלגברה ליניארית, נציג כאן הוכחה שמשתמשת בטכניקות

אלגברה ליניארית ואף עושה שימוש נאה בבסיס של $\mathcal{P}_n(F)$, שהוא המרחב הווקטורי ה- $(n + 1)$ -ממדי של פולינומים עם מקדמים מ- F ממעלה n לכל היותר.

4.9 אלגוריתם חלוקת פולינומים

נניח ש- $p, s \in \mathcal{P}(F)$, ו- $s \neq 0$. אזי קיימים פולינומים יחידים $q, r \in \mathcal{P}(F)$ כך ש-

$$p = sq + r$$

 כאשר $\deg r < \deg s$.

הוכחה נגדיר $n = \deg p$ ו- $m = \deg s$. אם $n < m$, אזי ניקח $q = 0$ ו- $r = p$ ונקבל את המשוואה $p = sq + r$ יחד עם $\deg r < \deg s$. לפיכך נניח כעת ש- $n \geq m$.
 הרשימה

$$4.10 \quad 1, z, \dots, z^{m-1}, s, zs, \dots, z^{n-m}s$$

בלתי תלויה ליניארית ב- $\mathcal{P}_n(F)$ שכן לכל פולינום ברשימה זו מעלה שונה. בנוסף, אורך הרשימה 4.10 הוא $n + 1$, מספר השווה ל- $\dim \mathcal{P}_n(F)$. לכן 4.10 בסיס של $\mathcal{P}_n(F)$ [לפי 2.38].

מאחר ש- $p \in \mathcal{P}_n(F)$ ו- 4.10 בסיס של $\mathcal{P}_n(F)$, קיימים קבועים יחידים

$$a_0, a_1, \dots, a_{m-1} \in F \quad \text{ו-} \quad b_0, b_1, \dots, b_{n-m} \in F$$

כך ש-

$$4.11 \quad p = a_0 + a_1 z + \dots + a_{m-1} z^{m-1} + b_0 s + b_1 zs + \dots + b_{n-m} z^{n-m} s$$

$$= \underbrace{a_0 + a_1 z + \dots + a_{m-1} z^{m-1}}_r + s \underbrace{(b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-m} z^{n-m})}_q.$$

בהינתן r ו- q כפי שהוגדרו לעיל, אנו רואים כי ניתן לבטא את p כ- $p = sq + r$ כאשר $\deg r < \deg s$, כפי שרצינו.

יחידותם של $q, r \in \mathcal{P}(F)$ המקיימים תנאים אלו נובעת מיחידותם של הקבועים $a_0, a_1, \dots, a_{m-1} \in F$ ו- $b_0, b_1, \dots, b_{n-m} \in F$ המקיימים את 4.11. ■

פירוק לגורמים של פולינומים מעל C

המשפט היסודי של האלגברה הוא משפט על קיומם של שורשים. הוכחתו אינה מובילה לשיטה למציאתם. נוסחת השורשים לפתרון משוואה ריבועית מוצאת בצפורש את השורשים עבור פולינומים מעלה 2. נוסחאות דומות אך מורכבות יותר קיימות עבור פולינומים מעלה 3 ו- 4. לא קיימות נוסחאות כאלו עבור פולינומים מעלה 5 ומעבר.

עסקנו עד כה בפולינומים עם מקדמים מרוכבים ובפולינומים עם מקדמים ממשיים במקביל, כש- F מייצג R או C . כעת נראה הבדלים בין שני מקרים אלו. תחילה נעסוק בפולינומים עם מקדמים מרוכבים. לאחר מכן, נשתמש במסקנות אלו להוכיח מסקנות תואמות עבור פולינומים עם מקדמים ממשיים.

ההוכחה שנביא למשפט היסודי של האלגברה עושה שימוש מובלע במשפט הקובע כי פונקציה ממשית רציפה המוגדרת מעל עיגול סגור ב- R^2 מקבלת ערך מינימום. חיפוש ברשת עשוי להוביל אתכם למספר הוכחות נוספות למשפט היסודי של האלגברה.

ההוכחה העושה שימוש במשפט ליוֹבִיל יפה במיוחד אם אתם חשים בנוח עם פונקציות אנליטיות. כל ההוכחות של המשפט היסודי של האלגברה חייבות לעשות שימוש מסוים באנליזה, מאחר שהתוצאה אינה נכונה אם $\mathbb{C}$ מוחלף, לדוגמה, בקבוצת המספרים מהצורה $c + di$ כאשר c, d רציונליים.

4.12 המשפט היסודי של האלגברה, גרסה ראשונה

לכל פולינום שאינו קבוע עם מקדמים מרוכבים יש שורש ב- $\mathbb{C}$.

הוכחה משפט דה־מואבר, הניתן להוכחה באינדוקציה על k ובנוסחאות החיבור עבור הפונקציות סינוס וקוסינוס, קובע כי אם k מספר שלם חיובי, ו- $\theta \in \mathbb{R}$, אזי

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^k = \cos k\theta + i \sin k\theta.$$

נניח ש- $w \in \mathbb{C}$ ו- k מספר שלם חיובי. בשימוש בקואורדינטות קוטביות, אנו יודעים כי קיימים $r \geq 0$ ו- $\theta \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$r(\cos \theta + i \sin \theta) = w.$$

ממשפט דה־מואבר נובעת המשוואה

$$\left(r^{1/k} \left(\cos \frac{\theta}{k} + i \sin \frac{\theta}{k} \right) \right)^k = w.$$

לפיכך לכל מספר מרוכב יש שורש מסדר k , עובדה שבה נעשה שימוש בקרוב.

נניח ש- p פולינום שאינו קבוע עם מקדמים מרוכבים, שאיברו השונה מאפס מהסדר הגבוה ביותר הוא $c_m z^m$. אזי, $|p(z)| \rightarrow \infty$ כאשר $|z| \rightarrow \infty$ (מאחר ש- $|p(z)|/|z^m| \rightarrow |c_m|$ כאשר $|z| \rightarrow \infty$). לפיכך, לפונקציה הרציפה $z \mapsto |p(z)|$ יש מינימום גלובלי בנקודה כלשהי $\zeta \in \mathbb{C}$. כדי להראות ש- $p(\zeta) = 0$, נניח ש- $p(\zeta) \neq 0$.

נגדיר פולינום חדש q על ידי

$$q(z) = \frac{p(z + \zeta)}{p(\zeta)}.$$

הערך בנקודת המינימום הגלובלי של הפונקציה $z \mapsto |q(z)|$ הוא 1 עבור $z = 0$. נכתוב

$$q(z) = 1 + a_k z^k + \dots + a_m z^m,$$

כאשר k המספר השלם החיובי הקטן ביותר כך שהמקדם של z^k שונה מאפס; במילים אחרות, $a_k \neq 0$.

יהי $\beta \in \mathbb{C}$ כך ש- $\beta^k = -\frac{1}{a_k}$. קיים קבוע $c > 1$ כך שאם $t \in (0, 1)$, אזי

$$\begin{aligned} |q(t\beta)| &\leq |1 + a_k t^k \beta^k| + t^{k+1} c \\ &= 1 - t^k(1 - tc). \end{aligned}$$

לפיכך אם נציב $t = 1/(2c)$ באי־השוויון לעיל, נקבל $|q(t\beta)| < 1$, בסתירה להנחה שהמינימום הגלובלי של $|q(z)|$ הוא 1. מסתירה זו נובע ש- $p(\zeta) = 0$, ובכך הראינו כי ל- p יש שורש, כפי שרצינו. ■

בשימוש במחשב תוך הפעלת שיטות נומריות מתוחכמות נוכל למצוא קירובים טובים לשורשים של כל פולינום, גם כאשר לא ניתן למצוא את השורשים המדויקים. לדוגמה, איש לא יוכל לספק נוסחה מדויקת לשורש של הפולינום p המוגדר על ידי

$$p(x) = x^5 - 5x^4 - 6x^3 + 17x^2 + 4x - 7.$$

אולם, באמצעות מחשב נוכל למצוא שהשורשים של p הם בקירוב חמשת המספרים $-1.87, -0.74, 0.62, 1.47, 5.51$.

המשפט היסודי של האלגברה בגרסתו הראשונה מוביל לפירוק לגורמים הבא עבור פולינומים עם מקדמים מרוכבים. שימו לב כי בפירוק לגורמים זה, שורשי p הם המספרים $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, שהם ערכי z היחידים שעבורם האגף הימני של המשוואה במסקנה להלן שווה 0.

4.13 המשפט היסודי של האלגברה, גרסה שנייה

אם $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ פולינום שאינו קבוע, אזי ל- p פירוק לגורמים יחיד (עד כדי סדר הופעתם) מהצורה

$$p(z) = c(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m),$$

כאשר $c, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$.

הוכחה יהי $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ ויהי $m = \deg p$. נוכיח באמצעות אינדוקציה על m . אם $m = 1$, אזי הפירוק לגורמים קיים והוא יחיד כפי שרצינו. לכן נניח ש- $m > 1$ והפירוק לגורמים הרצוי קיים באופן יחיד לכל הפולינומים ממעלה $m - 1$.

תחילה נראה את קיומם של הגורמים של p . לפי המשפט היסודי של האלגברה בגרסתו הראשונה (4.12), לפולינום p יש שורש $\lambda \in \mathbb{C}$. לפי 4.6, קיים פולינום q ממעלה $m - 1$ כך ש-

$$p(z) = (z - \lambda)q(z)$$

לכל $z \in \mathbb{C}$. הנחת האינדוקציה שלנו גוררת שעבור q הפירוק לגורמים שרצינו קיים, וכאשר נציב אותו במשוואה לעיל, נקבל את הפירוק לגורמים שרצינו עבור p .

כעת נפנה לשאלת היחידות. המספר c נקבע באופן יחיד כמקדם של z^m ב- p . לכן כל שעלינו להראות הוא שמלבד סדר הופעת הגורמים, יש אפשרות אחת בלבד לבחירת $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. אם

$$(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m) = (z - \tau_1) \cdots (z - \tau_m)$$

לכל $z \in \mathbb{C}$, אזי, מאחר שהאגף השמאלי של המשוואה לעיל שווה 0 כאשר $z = \lambda_1$, אחד ה- τ ים באגף הימני של המשוואה שווה ל- λ_1 . בסימון מחדש, נוכל להניח כי $\tau_1 = \lambda_1$. כעת אם $z \neq \lambda_1$, נוכל לחלק את שני אגפי המשוואה לעיל ב- $z - \lambda_1$, ונקבל

$$(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_m) = (z - \tau_2) \cdots (z - \tau_m)$$

לכל $z \in \mathbb{C}$ מלבד אולי עבור $z = \lambda_1$. למעשה המשוואה לעיל מתקיימת לכל $z \in \mathbb{C}$ שכן אחרת, אם נחסר את האגף הימני מהאגף השמאלי, נקבל פולינום השונה מאפס בעל אינסוף שורשים. מהמשוואה לעיל ומהנחת האינדוקציה נובעת המסקנה שמלבד סדר הופעת הגורמים, ערכי ה- λ זהים לערכי ה- τ , ובכך הושלמה הוכחת היחידות. ■

פירוק לגורמים של פולינומים מעל $\mathbf{R}$

היעדר תוקפו של המשפט היסודי של האלגברה עבור $\mathbf{R}$ מסביר את ההבדלים בין אלגברה ליניארית מעל מרחבים וקטוריים ממשיים ומרוכבים, כפי שנראה בפרקי ההמשך.

לפולינום עם מקדמים ממשיים, ייתכן שלא יהיו שורשים ממשיים. לדוגמה, לפולינום $1 + x^2$ אין שורשים ממשיים.

להשגת משפט פירוק לגורמים מעל $\mathbf{R}$, נשתמש במשפט שלנו לפירוק לגורמים מעל $\mathbf{C}$. נתחיל במסקנה להלן.

4.14 השורשים הלא-ממשיים של פולינומים עם מקדמים ממשיים באים בזוגות

נניח ש- $p \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$ הוא פולינום עם מקדמים ממשיים. אם $\lambda \in \mathbf{C}$ שורש של p , אזי גם $\bar{\lambda}$ שורש של p .

הוכחה יהי

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m,$$

כאשר $a_0, \dots, a_m$ מספרים ממשיים. נניח ש- $\lambda \in \mathbf{C}$ שורש של p . אזי

$$a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_m \lambda^m = 0.$$

ניקח את הצמוד המרוכב של שני אגפי המשוואה, וכתוצאה מכך נקבל

$$a_0 + a_1 \bar{\lambda} + \cdots + a_m \bar{\lambda}^m = 0,$$

כאשר השתמשנו בתכונות הבסיסיות של הצמוד המרוכב (ראו 4.4). המשוואה לעיל מראה ש- $\bar{\lambda}$ שורש של p .

חשבו על נוסחת השורשים לפתרון משוואה ריבועית בקשר לפעסקה הבאה.

אנו מעוניינים במשפט לפירוק לגורמים עבור פולינומים עם מקדמים ממשיים. נפתח אם כן במסקנה הבאה.

4.15 פירוק לגורמים של פולינום מפעלה שנייה

נניח ש- $b, c \in \mathbf{R}$. אזי קיים פירוק לגורמים של הפולינום מהצורה

$$x^2 + bx + c = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

כאשר $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ אם-ורק-אם $b^2 \geq 4c$.

הוכחה נשים לב כי

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right).$$

המשוואה לעיל היא הנסיס לטכניקה הנקראת השלמה לריבוע.

נניח תחילה ש- $b^2 < 4c$. אזי האגף הימני של המשוואה חיובי לכל $x \in \mathbf{R}$. לכן לפולינום $x^2 + bx + c$ אין שורשים ממשיים, ולפיכך לא נוכל לפרק אותו לגורמים מהצורה $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ כאשר $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$.

בכיוון ההפוך, כעת נניח ש- $b^2 \geq 4c$. אזי, קיים מספר ממשי d כך ש- $d^2 = \frac{b^2}{4} - c$. מהמשוואה שהצגנו לעיל, נקבל

$$\begin{aligned} x^2 + bx + c &= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - d^2 \\ &= \left(x + \frac{b}{2} + d\right)\left(x + \frac{b}{2} - d\right), \end{aligned}$$

ובזאת קיבלנו את הפירוק לגורמים שרצינו.

מהמסקנה הבאה נקבל את הפירוק לגורמים מעל $\mathbf{R}$. הרעיון בהוכחה הוא להשתמש במשפט היסודי של האלגברה בגרסתו השנייה (4.13), שממנו מתקבל הפירוק לגורמים של p כפולינום עם מקדמים מרוכבים. השורשים המרוכבים הלא-ממשיים של p באים בזוגות; ראו 4.14. לפיכך, אם הפירוק לגורמים של p כאיבר ב- $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ מכיל גורם מהצורה $(x - \lambda)$ כאשר λ מספר מרוכב שאינו ממשי, אזי $(x - \bar{\lambda})$ גם הוא גורם בפירוק לגורמים. בהכפלת שני גורמים אלו זה בזה, נקבל

$$(x^2 - 2(\operatorname{Re} \lambda)x + |\lambda|^2),$$

שהוא ביטוי ריבועי בצורה הנדרשת.

הרעיון ששרטטנו בפסקה לעיל כמעט מספק את ההוכחה לקיומו של הפירוק לגורמים המבוקש. אך עלינו להיזהר בנקודה אחת. נניח ש- λ הוא מספר מרוכב שאינו ממשי ו- $(x - \lambda)$ הוא גורם בפירוק לגורמים של p כאיבר של 4.14. $\mathcal{P}(\mathbf{C})$. מבטיחה ש- $(x - \bar{\lambda})$ מופיע גם הוא כגורם בפירוק לגורמים, אך 4.14 אינה קובעת שמספר המופיעים של שני גורמים אלו זהה, מה שנדרש כדי שהרעיון לעיל יעבוד. אולם, בפועל ההוכחה עוקפת נקודה זו.

במסקנה הבאה ייתכן ש- m או M שווה 0. המספרים $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ הם במדויק השורשים הממשיים של p , מאחר שהם הערכים הממשיים היחידים של x שעבורם האגף הימני של המשוואה במסקנה הבאה שווה 0.

4.16 פירוק לגורמים של פולינום מעל $\mathbf{R}$

נניח ש- $p \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ הוא פולינום שאינו קבוע. אזי ל- p יש פירוק לגורמים יחיד (עד כדי סדר הופעתם) מהצורה

$$p(x) = c(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_m)(x^2 + b_1x + c_1) \cdots (x^2 + b_Mx + c_M),$$

כאשר $c, \lambda_1, \dots, \lambda_m, b_1, \dots, b_M, c_1, \dots, c_M \in \mathbf{R}$ ומתקיים $b_k^2 < 4c_k$ לכל k .

הוכחה תחילה נוכיח שהפירוק לגורמים המבוקש אכן קיים, ולאחר מכן נוכיח שהוא יחיד.

נחשוב על p כעל איבר ב- $\mathcal{P}(\mathbf{C})$. אם כל השורשים (המרוכבים) של p הם ממשיים, קיבלנו את הפירוק לגורמים הרצוי לפי 4.13. לפיכך, נניח כעת שלפולינום p יש שורש $\lambda \in \mathbf{C}$ כאשר $\lambda \notin \mathbf{R}$. לפי 4.14, גם $\bar{\lambda}$ הוא שורש של p . לפיכך נוכל לכתוב

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - \lambda)(x - \bar{\lambda})q(x) \\ &= (x^2 - 2(\operatorname{Re} \lambda)x + |\lambda|^2)q(x) \end{aligned}$$

עבור פולינום $q \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ כלשהו ממעלה הפחותה בשתיים ממעלת p . אם ביכולתנו להוכיח כי ל- q מקדמים ממשיים, אזי שימוש באינדוקציה על מעלת p ישלים את החלק של הוכחת הקיום של מסקנה זו.

כדי להוכיח שלפולינום q מקדמים ממשיים, נפתור את המשוואה לעיל עבור q ונקבל

$$q(x) = \frac{p(x)}{x^2 - 2(\operatorname{Re} \lambda)x + |\lambda|^2}$$

לכל $x \in \mathbb{R}$. מהמשוואה לעיל נובע כי $q(x) \in \mathbb{R}$ לכל $x \in \mathbb{R}$. בכתיבת

$$q(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-2}x^{n-2},$$

כאשר $n = \deg p$ ו- $a_0, \dots, a_{n-2} \in \mathbb{C}$, לפיכך מתקיים

$$0 = \operatorname{Im} q(x) = (\operatorname{Im} a_0) + (\operatorname{Im} a_1)x + \dots + (\operatorname{Im} a_{n-2})x^{n-2}$$

לכל $x \in \mathbb{R}$. מכאן נובע ש- $\operatorname{Im} a_0, \dots, \operatorname{Im} a_{n-2}$ כולם שווים 0 (לפי 4.8). לפיכך כל מקדמי q ממשיים, כפי שרצינו. לכן הפירוק לגורמים המבוקש קיים.

כעת נעבור לשאלת היחידות של הפירוק לגורמים. גורם של p מהצורה $x^2 + b_kx + c_k$ כאשר $b_k^2 < 4c_k$ ניתן לבטא באופן יחיד בצורה $(x - \lambda_k)(x - \bar{\lambda}_k)$ עבור $\lambda_k \in \mathbb{C}$. במעט מחשבה נראה ששני פירוקים לגורמים של p כאיבר ב- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ יובילו לשני פירוקים לגורמים של p כאיבר ב- $\mathcal{P}(\mathbb{C})$, בסתירה ל-4.13. ■

תרגילים ד

1. נניח ש- $w, z \in \mathbb{C}$. ודאו את השוויונות והאי-שוויונות הבאים.

א. $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$

ב. $z - \bar{z} = 2(\operatorname{Im} z)i$

ג. $z\bar{z} = |z|^2$

ד. $\overline{wz} = \bar{w}\bar{z}$ ו- $\overline{w+z} = \bar{w} + \bar{z}$

ה. $\bar{\bar{z}} = z$

ו. $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ ו- $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$

ז. $|\bar{z}| = |z|$

ח. $|wz| = |w||z|$

התוצאות לעיל הן החלקים ב-4.4 שהושארו לקוראים.

2. הוכיחו שאם $w, z \in \mathbb{C}$, אזי $||w| - |z|| \leq |w - z|$. אי-שוויון זה נקרא **אי-שוויון המשולש ההפוך**.

3 נניח ש- V מרחב וקטורי מרוכב ו- $\varphi \in V'$. הגדירו $\sigma: V \rightarrow \mathbf{R}$ על ידי

$$\sigma(v) = \operatorname{Re} \varphi(v) \quad \text{לכל } v \in V$$

$$\varphi(v) = \sigma(v) - i\sigma(iv)$$

לכל $v \in V$.

4 נניח ש- m מספר שלם חיובי. האם הקבוצה

$$\{0\} \cup \{p \in \mathcal{P}(\mathbf{F}) : \deg p = m\}$$

תת־מרחב של $\mathcal{P}(\mathbf{F})$?

5 האם הקבוצה

$$\{0\} \cup \{p \in \mathcal{P}(\mathbf{F}) : \deg p \text{ זוגי}\}$$

תת־מרחב של $\mathcal{P}(\mathbf{F})$?

6 נניח ש- m ו- n מספרים שלמים חיוביים ו- $m \leq n$, ונניח ש- $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{F}$. הוכיחו שקיים פולינום $p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$ עם $\deg p = n$ כך ש- $0 = p(\lambda_1) = \dots = p(\lambda_m)$ וכך שאין שורשים אחרים ל- p .

7 נניח ש- m מספר שלם אי־שלילי, $z_1, \dots, z_{m+1}$ איברים של $\mathbf{F}$ השונים זה מזה, ו- $w_1, \dots, w_{m+1} \in \mathbf{F}$. הוכיחו שקיים פולינום יחיד $p \in \mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ כך ש-

$$p(z_k) = w_k \quad \text{לכל } k = 1, \dots, m+1$$

אף שניתן להוכיח מסקנה זו ללא שימוש באלגברה ליניארית, נסו למצוא את ההוכחה הברורה והקצרה יותר העושה שימוש באלגברה ליניארית.

8 נניח ש- $p \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$ ממעלה m . הוכיחו כי ל- p יש m שורשים שונים אם־רק אם אין ל- p נגזרתו p' שורשים משותפים.

9 הוכיחו כי לכל פולינום ממעלה אי־זוגית עם מקדמים ממשיים יש שורש ממשי.

10 עבור $p \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$, נגדיר $Tp: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ על ידי

$$(Tp)(x) = \begin{cases} \frac{p(x) - p(3)}{x - 3} & \text{if } x \neq 3, \\ p'(3) & \text{if } x = 3 \end{cases}$$

לכל $x \in \mathbf{R}$. הראו ש- $Tp \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ לכל פולינום $p \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ ובנוסף, הראו כי $T: \mathcal{P}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{R})$ העתקה ליניארית.

11 נניח ש- $p \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$. נגדיר $q: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ על ידי

$$q(z) = p(z) \overline{p(\bar{z})}.$$

הוכיחו כי q פולינום עם מקדמים ממשיים.

12 נניח ש- m מספר שלם אי-שלילי ו- $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{C})$ כך שקיימים מספרים ממשיים שונים $x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ המקיימים $p(x_k) \in \mathbb{R}$ לכל $k = 0, 1, \dots, m$. הוכיחו שכל מקדמי p ממשיים.

13 נניח ש- $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ כאשר $p \neq 0$. יהי $U = \{pq : q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})\}$.

א. הראו ש- $\dim \mathcal{P}(\mathbb{F})/U = \deg p$.

ב. מצאו בסיס של $\mathcal{P}(\mathbb{F})/U$.

14 נניח ש- $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ פולינומים שאינם קבועים, ללא שורשים משותפים. יהי $m = \deg p$ ו- $n = \deg q$. השתמשו באלגברה ליניארית כמפורט בסעיפים (א)-(ג) להלן כדי להוכיח כי קיימים $r \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ ו- $s \in \mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{C})$ כך ש-

$$rp + sq = 1.$$

א. הגדירו $T: \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \times \mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}_{m+n-1}(\mathbb{C})$ על ידי

$$T(r, s) = rp + sq.$$

הראו שההעתקה הליניארית T חד-חד-ערכית.

ב. הראו שההעתקה הליניארית T בסעיף (א) היא על.

ג. השתמשו בסעיף (ב) כדי להסיק כי קיימים $r \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ ו- $s \in \mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{C})$ כך ש- $rp + sq = 1$.

ערכים עצמיים וקטורים עצמיים

העתקות ליניאריות ממרחב וקטורי אחד למרחב וקטורי אחר היו האובייקטים שאותם למדנו בפרק ג. כעת אנו מתחילים לעסוק בחקר אופרטורים – שהם העתקות ליניאריות ממרחב וקטורי לעצמו. מחקרם מהווה את החלק החשוב ביותר באלגברה ליניארית. כדי ללמוד על אופרטור, ננסה לצמצם אותו לתת-מרחב קטן יותר. הדרישה כי תחת צמצום זה הוא יישאר אופרטור תוביל אותנו למושג תת-מרחב שמורים. כל תת-מרחב שמור חד-ממדי נוצר מווקטור שאותו האופרטור מעתיק אל כפולה סקלרית שלו. נתיב זה יוביל אותנו אל וקטורים עצמיים וערכים עצמיים. לאחר מכן נוכיח את אחת המסקנות החשובות ביותר באלגברה ליניארית: לכל אופרטור מעל מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי השונה מאפס, יש ערך עצמי. מסקנה זו תאפשר לנו להראות כי לכל אופרטור מעל מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי, קיים בסיס למרחב, אשר ביחס אליו, לפחות כמעט מחצית מאיברי מטריצת האופרטור שווים 0.

הנחות המוצא לפרק זה

- F מסמן R או C .
- V מסמן מרחב וקטורי מעל F .



Hans-Peter Postel CC BY

פסלו של לאונרדו מפיזה (1250–1170), תאריכים משוערים), הידוע גם בשם פִּיבֹנָאצִי. תרגיל 21 ביחידה 4 מראה איך ניתן להשתמש באלגברה ליניארית למציאת הנוסחה המפורשת של סדרת פִּיבֹנָאצִי המופיעה על עטיפת הספר.

ה- תתי-מרחב שמורים

ערכים עצמיים

5.1 הגדרה: אופרטור

העתקה ליניארית ממרחב וקטורי לעצמו נקראת אופרטור.

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. אם $m \geq 2$ ו-

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m,$$

זכרו שהגדרנו את הסימון $\mathcal{L}(V)$ שמשמעותו $\mathcal{L}(V, V)$.

כאשר כל V_k הוא תת-מרחב השונה מאפס של V , אזי להבנת התנהגות T די שנבין את התנהגות כל $T|_{V_k}$; כאן $T|_{V_k}$ מסמן צמצום T לתחום קטן יותר V_k . העיסוק ב- $T|_{V_k}$ אמור להיות קל יותר מהעיסוק ב- T מאחר ש- V_k מרחב וקטורי קטן יותר מ- V . אולם, אם במהלך חקר האופרטורים נפעיל כלים שימושיים (דוגמת העלאה בחזקה), אזי ניתקל בבעיה: ייתכן ש- $T|_{V_k}$ לא תעתיק את V_k לעצמו; ובמילים אחרות, ייתכן ש- $T|_{V_k}$ לא יהיה אופרטור מעל V_k . לפיכך נבחר לעסוק רק בפירוקים של V מהצורה לעיל, כאלו שבהם T מעתיקה את כל V_k לעצמו. לכן נעניק שם לתתי-מרחב של V המועתקים לעצמם על ידי T .

5.2 הגדרה: תת-מרחב שמור

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. תת-מרחב U של V נקרא שמור תחת T אם $Tu \in U$ לכל $u \in U$.

לפיכך U שמור תחת T אם $T|_U$ אופרטור מעל U .

5.3 דוגמה: תת-מרחב שמור תחת אופרטור גזירה

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbf{R}))$ מוגדר על ידי $Tp = p'$. אזי $\mathcal{P}_4(\mathbf{R})$, שהוא תת-מרחב של $\mathcal{P}(\mathbf{R})$, שמור תחת T מאחר שאם מעלתו של $p \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ היא לכל היותר 4, אזי גם מעלתו של p' היא לכל היותר 4.

5.4 דוגמה: ארבעה תתי-מרחב שמורים שאינם בהכרח שונים

אם $T \in \mathcal{L}(V)$, אזי תתי-המרחב של V להלן, כולם שמורים תחת T .

$\{0\}$ התת-מרחב $\{0\}$ שמור תחת T מאחר שאם $u \in \{0\}$, אזי $u = 0$ ולכן $Tu = 0 \in \{0\}$.

V התת-מרחב V שמור תחת T מאחר שאם $u \in V$, אזי $Tu \in V$.

$\text{null } T$ התת-מרחב $\text{null } T$ שמור תחת T מאחר שאם $u \in \text{null } T$, אזי $Tu = 0$, ולכן $Tu \in \text{null } T$.

$\text{range } T$ התת-מרחב $\text{range } T$ שמור תחת T מאחר שאם $u \in \text{range } T$, אזי $Tu \in \text{range } T$.

האם בהכרח לאופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ יש אי אלו תתי־מרחב שמורים מלבד $\{0\}$ ו- V ? בהמשך נראה שלשאלה זו תשובה חיובית אם V מממד סופי ו- $\dim V > 1$ (עבור $F = \mathbb{C}$) או $\dim V > 2$ (עבור $F = \mathbb{R}$); ראו 5.19 ותרגיל 29 ביחידה 2.

הדוגמה הקודמת ציינה ש- $\text{null } T$ ו- $\text{range } T$ שמורים תחת T . אולם תתי־מרחב אלו אינם בהכרח מספקים בקלות תשובות לשאלה לעיל בנוגע לקיומם של תתי־מרחב שמורים השונים מ- $\{0\}$ ו- V , מאחר שייתכן ש- $\text{null } T$ שווה ל- $\{0\}$ ו- $\text{range } T$ שווה ל- V (זה קורה כאשר T הפיך).

בהמשך נחזור לחקר מעמיק יותר של תתי־מרחב שמורים. לעת עתה נפנה לחקירת תתי־המרחב השמורים הלא־טריבויאליים הפשוטים ביותר—תתי־מרחב שמורים חד־ממדיים.

ניקח $v \in V$ כלשהו עם $v \neq 0$ ויהי U שווה לקבוצת כל הכפולות בסקלר של v :

$$U = \{\lambda v : \lambda \in F\} = \text{span}(v).$$

אזי U תת־מרחב חד־ממדי של V (וכך כל תת־מרחב חד־ממדי של V הוא מהצורה הזו, עבור בחירה מתאימה של v). אם U שמור תחת אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$, אזי $Tv \in U$ ולכן קיים סקלר $\lambda \in F$ כך ש־

$$Tv = \lambda v.$$

ולהפיך, אם $Tv = \lambda v$ עבור $\lambda \in F$ כלשהו, אזי $\text{span}(v)$ הוא תת־מרחב חד־ממדי של V השמור תחת T .

המשוואה $Tv = \lambda v$, שראינו זה עתה קשורה באופן הדוק לתתי־מרחב חד־ממדיים שמורים, חשיבותה רבה כל כך שלסקלרים λ ולווקטורים v המקיימים אותה הוענקו שמות מיוחדים.

5.5 הגדרה: ערך עצמי

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. מספר $\lambda \in F$ נקרא ערך עצמי של T אם קיים $v \in V$ כך ש־
 $Tv = \lambda v$ וגם $v \neq 0$.

ערך עצמי באנגלית נקרא eigenvalue, פילה שמחציתה גרמנית ומחציתה אנגלית. הקידומת הגרמנית eigen משמעותה "עצמי" במובן של אפיון פהותי פנימי.

בהגדרה לעיל דרשנו ש־ $v \neq 0$ מאחר שכל סקלר $\lambda \in F$ מקיים $T0 = \lambda 0$. מההערות לעיל אנו למדים כי ל- V יש תת־מרחב חד־ממדי שמור תחת T אם־ורק־אם יש ל- T ערך עצמי.

5.6 דוגמה: ערך עצמי

נגדיר אופרטור $T \in \mathcal{L}(F^3)$ על ידי

$$T(x, y, z) = (7x + 3z, 3x + 6y + 9z, -6y)$$

עבור $(x, y, z) \in F^3$. אזי $T(3, 1, -1) = (18, 6, -6) = 6(3, 1, -1)$. לפיכך 6 ערך עצמי של T .

התנאים השקולים במסקנה להלן, יחד עם מסקנות עמוקות רבות באלגברה ליניארית, תקפים רק בהקשר של מרחבים וקטוריים מממד סופי.

5.7 תנאים שקולים להיותו ערך עצמי

תזכורת: $I \in \mathcal{L}(V)$ הוא אופרטור הזהות. לפיכך $Iv = v$ לכל $v \in V$.

נניח ש- V מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V)$, ו- $\lambda \in F$. אזי התנאים הבאים שקולים.

א. λ הוא ערך עצמי של T .

ב. $T - \lambda I$ אינו חד־חד־ערכי.

ג. $T - \lambda I$ אינו על.

ד. $T - \lambda I$ אינו הפיך.

הוכחה התנאים (א) ו- (ב) שקולים, מאחר שהמשוואה $Tv = \lambda v$ שקולה למשוואה $(T - \lambda I)v = 0$. התנאים (ב), (ג), ו- (ד) שקולים לפי 3.65. ■

5.8 הגדרה: וקטור עצמי

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\lambda \in F$ ערך עצמי של T . וקטור $v \in V$ נקרא וקטור עצמי של T השייך ל- λ אם $v \neq 0$ וגם $Tv = \lambda v$.

במילים אחרות, וקטור $v \in V$ השונה מאפס הוא וקטור עצמי של האופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ אם־רק־אם $Tv = \lambda v$ מאחר ש- $Tv = \lambda v$ שקולה ל- $(T - \lambda I)v = 0$, וקטור $v \in V$ כאשר $v \neq 0$ הוא וקטור עצמי של T השייך ל- λ אם־רק־אם $v \in \text{null}(T - \lambda I)$.

5.9 דוגמה: ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(F^2)$ מוגדר על ידי $T(w, z) = (-z, w)$.

א. תחילה נבחן את המקרה שבו $F = \mathbb{R}$. אזי T הוא סיבוב נגד כיוון השעון של 90° סביב ראשית הצירים ב- $\mathbb{R}^2$. לאופרטור יש ערך עצמי אם־רק־אם קיים וקטור השונה מאפס בתחומי, הנשלח על ידי האופרטור לכפולת סקלר של עצמו. סיבוב 90° נגד כיוון השעון של וקטור השונה מאפס ב- $\mathbb{R}^2$ אינו יכול להיות שווה לכפולה בסקלר של עצמו. מסקנה: אם $F = \mathbb{R}$, אזי ל- T אין ערכים עצמיים (ולפיכך גם לא וקטורים עצמיים).

ב. כעת נבחן את המקרה שבו $F = \mathbb{C}$. כדי למצוא ערכים עצמיים של T , עלינו למצוא סקלרים λ כך שעבור $T(w, z) = \lambda(w, z)$ יש פתרונות השונים מ- $w = z = 0$. המשוואה $T(w, z) = \lambda(w, z)$ שקולה לצמד המשוואות

$$-z = \lambda w, \quad w = \lambda z.$$

בהצבת ערכו של w הנתון על ידי המשוואה השנייה במשוואה הראשונה, נקבל

$$-z = \lambda^2 z.$$

כעת z אינו יכול להיות שווה 0 [אחרת 5.10 גורר ש- $w = 0$; ואנו מחפשים פתרונות עבור 5.10 כך ש- (w, z) אינו וקטור האפס], ולכן המשוואה לעיל מובילה אותנו למשוואה הבאה

$$-1 = \lambda^2.$$

הפתרונות עבור המשוואה הזו הם $\lambda = i$ ו- $\lambda = -i$.

ותוכלו לוודא ש- i ו- $-i$ ערכים עצמיים של T . אכן, הווקטורים העצמיים השייכים לערך העצמי i הם הווקטורים מהצורה $(w, -wi)$, כאשר $w \in \mathbb{C}$ ו- $w \neq 0$. בנוסף, הווקטורים העצמיים השייכים לערך העצמי $-i$ הם הווקטורים מהצורה (w, wi) , כאשר $w \in \mathbb{C}$ ו- $w \neq 0$.

בהוכחה הבאה, נעשה שוב שימוש בתנאי השקול

$$Tv = \lambda v \iff (T - \lambda I)v = 0.$$

5.11 וקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניארי

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי כל רשימת וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים שונים של T בלתי תלויה ליניארית.

הוכחה נניח שהמסקנה אינה נכונה. אזי קיים מספר שלם חיובי m הקטן ביותר כך שקיימת רשימה תלויה ליניארית $v_1, \dots, v_m$ של וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים שונים של T (נשים לב כי $2 \geq m$ מאחר שווקטור עצמי, בהגדרה, שונה מאפס). לפיכך קיימים $a_1, \dots, a_m \in F$, שאף אחד מהם אינו 0 (לאור המינימליות של m), כך ש-

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0.$$

נפעיל את ההעתקה $T - \lambda_m I$ על שני אגפי המשוואה לעיל, ונקבל

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + \dots + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_{m-1} = 0.$$

מאחר שהערכים העצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ שונים זה מזה, אף אחד מהמקדמים אינו שווה 0. לפיכך הרשימה $v_1, \dots, v_{m-1}$ היא רשימה תלויה ליניארית המכילה $m-1$ וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים שונים, בסתירה למינימליות של m . סתירה זו משלימה את ההוכחה. ■

המסקנה לעיל מובילה להוכחה קצרה למסקנה להלן, אשר קובעת חסם עליון למספר הערכים העצמיים השונים שיכולים להיות לאופרטור.

5.12 מספר הערכים העצמיים של אופרטור לא יעלה על מצד המרחב הווקטורי

נניח ש- V מממד סופי. אזי לכל אופרטור מעל V יש לכל היותר $\dim V$ ערכים עצמיים שונים.

הוכחה יהי $T \in \mathcal{L}(V)$. נניח ש- $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ערכים עצמיים שונים של T . יהיו $v_1, \dots, v_m$ וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים אלו. אזי 5.11 גוררת שהרשימה $v_1, \dots, v_m$ בלתי תלויה ליניארית. לפיכך $m \leq \dim V$ (ראו 2.22), כפי שרצינו. ■

יישום פולינומים על אופרטורים

הסיבה העיקרית לכך שקיימת תאוריה עשירה יותר עבור אופרטורים (המעתיקים מרחב וקטורי אל עצמו) מזו הקיימת עבור העתקות ליניאריות כלליות יותר, היא שניתן להעלות אופרטורים בחזקה. בתתי־יחידה זו נגדיר מושג זה ואת רעיון הפעלת פולינום על אופרטור. רעיון זה יהיה הכלי המרכזי שבו נשתמש ביחידה הבאה, כאשר נוכיח כי לכל אופרטור מעל מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי שאינו מרחב האפס, קיים ערך עצמי.

אם T אופרטור, אזי יש משמעות ל- TT (ראו 3.7), וגם הוא, בדומה ל- T , אופרטור מעל אותו מרחב וקטורי. בדרך כלל נרשום T^2 במקום TT . באופן כללי יותר, נתונה להלן ההגדרה עבור T^m .

5.13 סימון: T^m

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- m מספר שלם חיובי.

$$\bullet T^m \in \mathcal{L}(V) \text{ מוגדר על ידי } T^m = \underbrace{T \cdots T}_m \text{ פעמים}$$

$$\bullet T^0 \text{ מוגדר כאופרטור הזהות } I \text{ מעל } V.$$

$$\bullet \text{ אם } T \text{ הפיך וההופכי שלו הוא } T^{-1}, \text{ אזי } T^{-m} \in \mathcal{L}(V) \text{ מוגדר על ידי } T^{-m} = (T^{-1})^m.$$

עליכם לוודא שאם T אופרטור, אזי

$$T^m T^n = T^{m+n} \quad \text{וגם} \quad (T^m)^n = T^{mn},$$

כאשר m ו- n מספרים שלמים שרירותיים אם T הפיך ומספרים שלמים אי-שליליים אם T אינו הפיך.

משהגדרנו חזקות עבור אופרטורים, נוכל כעת להגדיר את משמעות הפעלת פולינום על אופרטור.

5.14 סימון: $p(T)$

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ פולינום הנתון על ידי

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m$$

לכל $z \in \mathbb{F}$. אזי $p(T)$ הוא אופרטור מעל V המוגדר על ידי

$$p(T) = a_0 I + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_m T^m.$$

זהו שימוש חדש בסימון p שכן אנו מפעילים את p על אופרטורים, לא רק על איברים ב- $\mathbb{F}$. הרעיון כאן הוא שכדי לחשב את $p(T)$, אנו פשוט מחליפים את z ב- T בבטייט שבו אנו מגדירים את p . נשים לב כי האיבר הקבוע a_0 ב- $p(z)$ הופך לאופרטור $a_0 I$ (שזו בחירה הגיונית מאחר ש- $a_0 z^0 = a_0$ ולפיכך עלינו להחליף את a_0 ב- $a_0 I$ השווה ל- $a_0 T^0$).

5.15 דוגמה: פולינום מופעל על אופרטור גזירה

נניח ש- $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ הוא אופרטור הגזירה המוגדר על ידי $Dq = q'$ ו- p פולינום המוגדר על ידי $p(x) = 7 - 3x + 5x^2$. אזי $p(D) = 7I - 3D + 5D^2$. לפיכך

$$(p(D))q = 7q - 3q' + 5q''$$

לכל $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

אם נקבע אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$, אזי הפונקציה מ- $\mathcal{P}(F)$ אל $\mathcal{L}(V)$ הנתונה על ידי $p \mapsto p(T)$ ליניארית, כפי שעליכם לוודא.

5.16 הגדרה: מכפלת פולינומים

אם $p, q \in \mathcal{P}(F)$, אזי $pq \in \mathcal{P}(F)$ הוא הפולינום המוגדר על ידי

$$(pq)(z) = p(z)q(z)$$

לכל $z \in F$.

כשמכפילים פולינומים של אותו אופרטור אין חשיבות לסדר הגורמים, כפי שנראה בסעיף (ב) במסקנה הבאה.

5.17 תכונות מכפלה

הוכחה בלתי רשמית: אם נפתח סוגריים למכפלת פולינומים תוך שימוש בתכונת הדיסטריבוטיביות, לא יהיה הבדל אם הספל הוא z או T .

נניח ש- $p, q \in \mathcal{P}(F)$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי

א. $(pq)(T) = p(T)q(T)$

ב. $p(T)q(T) = q(T)p(T)$

הוכחה

א. נניח ש- $p(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j$ וגם $q(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$ לכל $z \in F$. אזי

$$(pq)(z) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_j b_k z^{j+k}.$$

לפיכך

$$\begin{aligned} (pq)(T) &= \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_j b_k T^{j+k} \\ &= \left(\sum_{j=0}^m a_j T^j \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k T^k \right) \\ &= p(T)q(T). \end{aligned}$$

ב. בהפעלת (א) פעמיים, נקבל $p(T)q(T) = (pq)(T) = (qp)(T) = q(T)p(T)$.

מוקדם יותר ראינו שאם $T \in \mathcal{L}(V)$, אזי תתי-המרחב $\text{null } T$ ו- $\text{range } T$ שמורים תחת T (ראו 5.4). כעת נראה שמרחב האפס והטווח של כל פולינום של T גם הם שמורים תחת T .

5.18 מרחב האפס והטווח של $p(T)$ שמורים תחת T

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ וגם $p \in \mathcal{P}(F)$. אזי $\text{null } p(T)$ ו- $\text{range } p(T)$ שמורים תחת T .

הוכחה נניח ש- $u \in \text{null } p(T)$. אזי $p(T)u = 0$. לפיכך

$$(p(T))(Tu) = (p(T)T)(u) = (Tp(T))(u) = T(p(T)u) = T(0) = 0.$$

לכן $Tu \in \text{null } p(T)$. לפיכך $\text{null } p(T)$ שמור תחת T , כפי שרצינו.

נניח ש- $u \in \text{range } p(T)$. אזי קיים $v \in V$ כך ש- $u = p(T)v$. לפיכך

$$Tu = T(p(T)v) = p(T)(Tv).$$

לכן $Tu \in \text{range } p(T)$. לפיכך $\text{range } p(T)$ שמור תחת T , כפי שרצינו.

תרגילים 1ה

1 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- U תתי-מרחב של V .

א. הוכיחו שאם $U \subseteq \text{null } T$, אזי U שמור תחת T .

ב. הוכיחו שאם $\text{range } T \subseteq U$, אזי U שמור תחת T .

2 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ וגם $V_1, \dots, V_m$ תתי-מרחב של V השמורים תחת T . הוכיחו ש- $V_1 + \dots + V_m$ שמור תחת T .

3 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו שהחיתוך של כל אוסף תתי-מרחב של V השמורים תחת T שמור תחת T .

4 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם V מממד סופי ו- U תתי-מרחב של V השמור תחת כל אופרטור מעל V , אזי $U = \{0\}$ או $U = V$.

5 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ מוגדר על ידי $T(x, y) = (-3y, x)$. מצאו את הערכים העצמיים של T .

6 הגדירו $T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^2)$ על ידי $T(w, z) = (z, w)$. מצאו את כל הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של T .

7 הגדירו $T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^3)$ על ידי $T(z_1, z_2, z_3) = (2z_2, 0, 5z_3)$. מצאו את כל הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של T .

8 נניח ש- $P \in \mathcal{L}(V)$ הוא כך ש- $P^2 = P$. הוכיחו שאם λ ערך עצמי של P , אזי $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$.

- 9 הגדירו $T: \mathcal{P}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{R})$ על ידי $Tp = p'$. מצאו את כל הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של T .
- 10 הגדירו $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4(\mathbf{R}))$ על ידי $(Tp)(x) = xp'(x)$ לכל $x \in \mathbf{R}$. מצאו את כל הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של T .
- 11 נניח ש- V מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V)$, ו- $\alpha \in \mathbf{F}$. הוכיחו שקיים $\delta > 0$ כך ש- $T - \lambda I$ הפיך לכל $\lambda \in \mathbf{F}$ כך ש- $|\alpha - \lambda| < \delta$.
- 12 נניח ש- $V = U \oplus W$, כאשר U ו- W תתי-מרחב של V השונים מאפס. הגדירו $P \in \mathcal{L}(V)$ על ידי $P(u + w) = u$ לכל $u \in U$ ולכל $w \in W$. מצאו את כל הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של P .
- 13 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. נניח ש- $S \in \mathcal{L}(V)$ הפיך.
א. הוכיחו שלאופרטור T ול- $S^{-1}TS$ אותם ערכים עצמיים.
ב. מה הקשר בין הווקטורים העצמיים של T לווקטורים העצמיים של $S^{-1}TS$?
- 14 הביאו דוגמה לאופרטור מעל $\mathbf{R}^4$ שאין לו ערכים עצמיים (ממשיים).
- 15 נניח ש- V מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V)$, ו- $\lambda \in \mathbf{F}$. הראו ש- λ ערך עצמי של T אם ורק אם λ ערך עצמי של האופרטור הדואלי $T' \in \mathcal{L}(V')$.
- 16 נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו שאם λ ערך עצמי של T , אזי
$$|\lambda| \leq n \max\{|\mathcal{M}(T)_{j,k}| : 1 \leq j, k \leq n\},$$

כאשר $\mathcal{M}(T)_{j,k}$ מסמן את האיבר בשורה j , עמודה k של המטריצה של T ביחס לבסיס $v_1, \dots, v_n$.
ראו תרגיל 19 ביחידה 11 לחסס שונה על $|\lambda|$.
- 17 נניח ש- $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, $T \in \mathcal{L}(V)$, ו- $\lambda \in \mathbf{R}$. הוכיחו ש- λ ערך עצמי של T אם ורק אם λ ערך עצמי של המירכוב T_C .
ראו תרגיל 33 ביחידה 12 להגדרת T_C .
- 18 נניח ש- $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, $T \in \mathcal{L}(V)$, ו- $\lambda \in \mathbf{C}$. הוכיחו ש- λ ערך עצמי של המירכוב T_C אם ורק אם $\bar{\lambda}$ ערך עצמי של T_C .
- 19 הראו שלאופרטור ההסטה לפנים $T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^\infty)$ המוגדר על ידי
$$T(z_1, z_2, \dots) = (0, z_1, z_2, \dots)$$

אין ערכים עצמיים.
- 20 הגדירו את אופרטור ההסטה לאחור $S \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^\infty)$ על ידי
$$S(z_1, z_2, z_3, \dots) = (z_2, z_3, \dots).$$

א. הראו שכל איבר של $\mathbf{F}$ הוא ערך עצמי של S .
ב. מצאו את כל הווקטורים העצמיים של S .

- 21** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ הפיך.
 א. נניח ש- $\lambda \in F$ ו- $\lambda \neq 0$. הוכיחו ש- λ ערך עצמי של T אם ורק אם $\frac{1}{\lambda}$ ערך עצמי של T^{-1} .
 ב. הוכיחו שלאופרטורים T ו- T^{-1} יש אותם וקטורים עצמיים.
- 22** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ושקיימים וקטורים השונים מאפס u ו- w ב- V כך ש-
 $Tu = 3w$ וגם $Tw = 3u$.
 הוכיחו ש- 3 או -3 ערך עצמי של T .
- 23** נניח ש- V מממד סופי ו- $S, T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו שלאופרטורים ST ו- TS יש אותם ערכים עצמיים.
- 24** נניח ש- A מטריצה $n \times n$ עם איברים ב- F . הגדירו $T \in \mathcal{L}(F^n)$ על ידי $Tx = Ax$, כאשר x ו- u חושבים על איברים ב- F^n כווקטורי עמודה $n \times 1$.
 א. נניח ששכום האיברים בכל שורה של A שווה 1. הוכיחו ש- 1 ערך עצמי של T .
 ב. נניח ששכום האיברים בכל עמודה של A שווה 1. הוכיחו ש- 1 ערך עצמי של T .
- 25** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- u, w וקטורים עצמיים של T כך ש- $u + w$ גם הוא וקטור עצמי של T . הוכיחו ש- u ו- w וקטורים עצמיים של T השייכים לאותו ערך עצמי.
- 26** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ כך שכל וקטור השונה מאפס ב- V הוא וקטור עצמי של T . הוכיחו ש- T כפולת סקלר של אופרטור הזהות.
- 27** נניח ש- V מממד סופי ו- $k \in \{1, \dots, \dim V - 1\}$. נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ כך שכל תתי-מרחב של V מממד k שמור תחת T . הוכיחו ש- T כפולת סקלר של אופרטור הזהות.
- 28** נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי מספר הערכים העצמיים השונים של T הוא לכל היותר $1 + \dim \text{range } T$.
- 29** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ו- $5, -4$, ו- $\sqrt{7}$ ערכים עצמיים של T . הוכיחו כי קיים $x \in \mathbb{R}^3$ כך ש- $Tx - 9x = (-4, 5, \sqrt{7})$.
- 30** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $(T - 2I)(T - 3I)(T - 4I) = 0$. נניח ש- λ ערך עצמי של T . הוכיחו ש- $\lambda = 2$ או $\lambda = 3$ או $\lambda = 4$.
- 31** הביאו דוגמה ל- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ כך ש- $T^4 = -I$.
- 32** נניח שלאופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ אין ערכים עצמיים וגם $T^4 = I$. הוכיחו ש- $T^2 = -I$.
- 33** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- m מספר שלם חיובי.
 א. הוכיחו ש- T חד-חד-ערכי אם ורק אם T^m חד-חד-ערכי.
 ב. הוכיחו ש- T על אם ורק אם T^m על.

34 נניח ש- V מממד סופי ו- $v_1, \dots, v_m \in V$. הוכיחו ש- $v_1, \dots, v_m$ רשימה בלתי תלויה ליניארית אם ורק אם קיים $T \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $v_1, \dots, v_m$ וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים שונים.

35 נניח ש- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ רשימת מספרים ממשיים שונים. הוכיחו ש- $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ רשימה בלתי תלויה ליניארית במרחב הווקטורי של הפונקציות הממשיות מעל $\mathbb{R}$.
רמז: יהי $V = \text{span}(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x})$, והגדירו אופרטור $D \in \mathcal{L}(V)$ על ידי $Df = f'$. מצאו את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של D .

36 נניח ש- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ היא רשימה של מספרים חיוביים שונים. הוכיחו כי הרשימה $\cos(\lambda_1 x), \dots, \cos(\lambda_n x)$ בלתי תלויה ליניארית במרחב הווקטורי של הפונקציות הממשיות מעל $\mathbb{R}$.

37 נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הגדירו $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ על ידי $\mathcal{A}(S) = TS$

לכל $S \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי קבוצת הערכים העצמיים של T שווה לקבוצת הערכים העצמיים של $\mathcal{A}$.

38 נניח ש- V מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V)$, ו- U תת-מרחב של V שמור תחת T . אופרטור הפנה $T/U \in \mathcal{L}(V/U)$ מוגדר על ידי $(T/U)(v + U) = Tv + U$ לכל $v \in V$.

א. הראו שהגדרת T/U הגיונית (דבר הדורש שימוש בתנאי ש- U שמור תחת T) והראו ש- T/U אופרטור מעל V/U .
ב. הראו שכל ערך עצמי של T/U הוא ערך עצמי של T .

39 נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו שלאופרטור T יש ערך עצמי אם ורק אם קיים תת-מרחב של V שמממדו $\dim V - 1$ ושמור תחת T .

40 נניח ש- $S, T \in \mathcal{L}(V)$ ו- S הפיך. נניח ש- $p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$ פולינום. הוכיחו ש- $p(STS^{-1}) = Sp(T)S^{-1}$.

41 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- U תת-מרחב של V השמור תחת T . הוכיחו ש- U שמור תחת $p(T)$ לכל פולינום $p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$.

42 הגדירו $T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^n)$ על ידי $T(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots, nx_n)$.
א. מצאו את כל הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של T .
ב. מצאו את כל תתי-המרחב של $\mathbf{F}^n$ השמורים תחת T .

43 נניח ש- V מממד סופי, $\dim V > 1$, ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו ש- $\{p(T) : p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})\} \neq \mathcal{L}(V)$.

הפולינום המינימלי

קיומם של ערכים עצמיים מעל מרחב וקטורי מרוכב

כעת אנו ניגשים אל אחת המסקנות המרכזיות לגבי אופרטורים מעל מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי.

5.19 קיומם של ערכים עצמיים

לכל אופרטור מעל מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי השונה מאפס יש ערך עצמי.

הוכחה נניח ש- V מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי שממדו $n > 0$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. נבחר $v \in V$ עם $v \neq 0$. נקבל ש-

$$v, Tv, T^2v, \dots, T^n v$$

אינה בלתי תלויה ליניארית, שכן ממדו של V הוא n וברשימה זו $n + 1$ איברים. לכן, צירוף ליניארי כלשהו (כאשר לא כל המקדמים שווים 0) של הווקטורים לעיל שווה 0. לפיכך קיים פולינום שאינו קבוע p מהמעלה הנמוכה ביותר כך ש-

$$p(T)v = 0.$$

לפי המשפט היסודי של האלגברה בגרסתו הראשונה (ראו 4.12), קיים $\lambda \in \mathbb{C}$ כך ש- $p(\lambda) = 0$. לכן קיים פולינום $q \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ כך ש-

$$p(z) = (z - \lambda)q(z)$$

לכל $z \in \mathbb{C}$ (ראו 4.6). מכאן נובע (תוך שימוש ב- 5.17) ש-

$$0 = p(T)v = (T - \lambda I)(q(T)v).$$

מאחר שמעלת q נמוכה מזו של p , אנו יודעים ש- $q(T)v \neq 0$. לפיכך מהמשוואה לעיל נובע ש- λ ערך עצמי של T עם וקטור עצמי $q(T)v$. ■

ההוכחה לעיל עושה שימוש מרכזי במשפט היסודי של האלגברה. ההערה שאחרי תרגיל 16 מסייעת להבין מדוע למשפט היסודי של האלגברה קשר כה הדוק למסקנה לעיל.

את ההנחה במסקנה לעיל כי $F = \mathbb{C}$ לא ניתן להחליף בהנחה ש- $F = \mathbb{R}$, כפי שראינו בדוגמה 5.9. בדוגמה להלן נראה שגם ההנחה כי מדובר במרחב מממד סופי הכרחית.

5.20 דוגמה: אופרטור מעל מרחב וקטורי מרוכב ללא ערכים עצמיים

נגדיר $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{C}))$ על ידי $(Tp)(z) = zp(z)$. אם $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ פולינום השונה מאפס, אזי מעלת Tp גדולה באחת ממעלת p , ולפיכך Tp אינו יכול להיות שווה לכפולת סקלר של p . לכן ל- T אין ערכים עצמיים.

מאחר ש- $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ מממד אינסופי, דוגמה זו אינה בסתירה למסקנה לעיל.

ערכים עצמיים והפולינום המינימלי

בתת־יחידה זו אנו מציגים פולינום חשוב המשוך לכל אופרטור. נפתח בהגדרה הבאה.

5.21 הגדרה: פולינום מתוקן

פולינום מתוקן הוא פולינום שערך המקדם המוביל בו הוא 1.

לדוגמה, הפולינום $z^7 + 9z^2 + 2$ הוא פולינום מתוקן שמעלתו 7.

5.22 קיום, יחידות, ומעלת פולינום מינימלי

נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי קיים פולינום מתוקן יחיד $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ מהמעלה הנמוכה ביותר כך ש- $p(T) = 0$. בנוסף, $\deg p \leq \dim V$.

הוכחה אם $\dim V = 0$, אזי I הוא אופרטור האפס מעל V ולפיכך נבחר את p כפולינום הקבוע 1.

כעת נשתמש באינדוקציה על $\dim V$. לפיכך נניח ש- $\dim V > 0$ ונניח שהתוצאה מתקיימת עבור כל האופרטורים מעל כל המרחבים הווקטוריים מממד קטן יותר. יהי $u \in V$ כך ש- $u \neq 0$. אורך הרשימה $u, Tu, \dots, T^{\dim V}u$ הוא $1 + \dim V$, ולפיכך היא תלויה ליניארית. לפי למת התלות הליניארית (2.19), קיים מספר שלם חיובי $m \leq \dim V$ הקטן ביותר כך ש- $T^m u$ צירוף ליניארי של $u, Tu, \dots, T^{m-1}u$. לפיכך קיימים סקלרים $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{m-1} \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$5.23 \quad c_0 u + c_1 Tu + \dots + c_{m-1} T^{m-1} u + T^m u = 0.$$

נגדיר פולינום מתוקן $q \in \mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ על ידי

$$q(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{m-1} z^{m-1} + z^m.$$

אזי 5.23 גוררת ש- $q(T)u = 0$.

אם k מספר שלם אי-שלילי, אזי

$$q(T)(T^k u) = T^k(q(T)u) = T^k(0) = 0.$$

למת התלות הליניארית (2.19) מראה לנו ש- $u, Tu, \dots, T^{m-1}u$ בלתי תלויה ליניארית. לפיכך המשוואה לעיל גוררת ש- $\dim \text{null } q(T) \geq m$. לכן

$$\dim \text{range } q(T) = \dim V - \dim \text{null } q(T) \leq \dim V - m.$$

מאחר ש- $\text{range } q(T)$ שמור תחת T (לפי 5.18), נוכל להחיל את הנחת האינדוקציה שלנו על האופרטור $T|_{\text{range } q(T)}$ מעל המרחב הווקטורי $\text{range } q(T)$. לפיכך קיים פולינום מתוקן $s \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ עם

$$\deg s \leq \dim V - m \quad \text{וגם} \quad s(T|_{\text{range } q(T)}) = 0.$$

לכן, לכל $v \in V$ נקבל

$$((sq)(T))(v) = s(T)(q(T)v) = 0$$

מאחר ש- $q(T)v \in \text{range } q(T)$ ו- $s(T)|_{\text{range } q(T)} = 0$ לפיכך sq פולינום מתוקן כך ש- $\deg sq \leq \dim V$ ובנוסף $(sq)(T) = 0$.

בפסקה לעיל ראינו שקיים פולינום מתוקן שמעלתו $\dim V$ לכל היותר והפעלתו על T מפיקה את אופרטור האפס. לפיכך קיים פולינום מתוקן מהמעלה הנמוכה ביותר עם תכונה זו, ובכך השלמנו את הוכחת חלק הקיום של מסקנה זו.

יהי $p \in \mathcal{P}(F)$ פולינום מתוקן מהמעלה הנמוכה ביותר כך ש- $p(T) = 0$. להוכחת חלק היחידות של המסקנה, נניח ש- $r \in \mathcal{P}(F)$ פולינום מתוקן שמעלתו זהה לזו של p ובנוסף, $r(T) = 0$. אזי $(p-r)(T) = 0$ ובנוסף $\deg(p-r) < \deg p$. אם $p-r$ לא היה שווה 0, היינו יכולים לחלק את $p-r$ במקדם המוביל של $p-r$ כדי לקבל פולינום מתוקן (שמעלתו נמוכה מזו של p) שכאשר מופעל על T מפיק את אופרטור האפס. לפיכך $p-r=0$, כפי שרצינו.

המסקנה הקודמת מצדיקה את ההגדרה להלן.

5.24 הגדרה: פולינום מינימלי

נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי הפולינום המינימלי של T הוא הפולינום המתוקן היחיד $p \in \mathcal{P}(F)$ מהמעלה הנמוכה ביותר כך ש- $p(T) = 0$.

לחישוב הפולינום המינימלי של אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$, עלינו למצוא את המספר השלם החיובי הקטן ביותר m כך שלמשוואה

$$c_0 I + c_1 T + \dots + c_{m-1} T^{m-1} = -T^m$$

יש פתרון $c_0, c_1, \dots, c_{m-1} \in F$. אם נבחר בסיס של V ונחליף את T במשוואה לעיל במטריצה של T , אזי נוכל לחשוב על המשוואה לעיל כמערכת של $(\dim V)^2$ משוואות ליניאריות עם m נעלמים $c_0, c_1, \dots, c_{m-1} \in F$. שיטת החילוף של גאוס או כל שיטה מהירה אחרת לפתרון מערכת משוואות ליניאריות תוכל לתת מענה לשאלה האם קיים פתרון, תוך בדיקת ערכים עוקבים $m = 1, 2, \dots$ עד למציאת פתרון. לפי 5.22, קיים מספר שלם חיובי קטן ביותר $m \leq \dim V$ שעבורו קיים פתרון. הפולינום המינימלי של T הוא אם כן $c_0 + c_1 z + \dots + c_{m-1} z^{m-1} + z^m$.

שיטה מהירה אף יותר (ברוב המקרים): נבחר $v \in V$ כך ש- $v \neq 0$ ונתבונן במשוואה

$$c_0 v + c_1 T v + \dots + c_{\dim V-1} T^{\dim V-1} v = -T^{\dim V} v.$$

נשתמש בבסיס של V להמרת המשוואה למערכת של $\dim V$ משוואות ליניאריות עם $\dim V$ נעלמים $c_0, c_1, \dots, c_{\dim V-1}$. אם למערכת משוואות זו יש פתרון יחיד $c_0, c_1, \dots, c_{\dim V-1}$ (כפי שקורה ברוב המקרים), אזי הסקלרים $c_0, c_1, \dots, c_{\dim V-1}, 1$ הם המקדמים של הפולינום המינימלי של T (מאחר ש- 5.22 קובעת שמעלת הפולינום המינימלי היא לכל היותר $\dim V$).

הערכות אלו מבוססות על בדיקת מיליוני מטריצות אקראיות.

נתבונן באופרטורים מעל $\mathbb{R}^4$ (כשאנו חושבים עליהם כמטריצות 4×4 ביחס לבסיס הסטנדרטי), וניקח את $v =$

$(1, 0, 0, 0)$ בפסקה לעיל. השיטה המהירה שתוארה לעיל מצליחה עבור יותר מ- 99.999% מהמטריצות 4×4 עם איברים שלמים בקטע $[-10, 10]$ וביותר מ- 99.999% מהמטריצות 4×4 עם איברים שלמים בקטע $[-100, 100]$.

הדוגמה הבאה ממחישה את השיטה המהירה שתוארה לעיל.

5.26 דוגמה: פולינום מינימלי של אופרטור מעל F^5

$$\text{נניח ש- } T \in \mathcal{L}(F^5) \text{ נתונה על ידי המטריצה } M(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ביחס לבסיס הסטנדרטי e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 . אם נבחר $v = e_1$ עבור 5.25, נקבל

$$Te_1 = e_2, \quad T^4e_1 = T(T^3e_1) = Te_4 = e_5,$$

$$T^2e_1 = T(Te_1) = Te_2 = e_3, \quad T^5e_1 = T(T^4e_1) = Te_5 = -3e_1 + 6e_2.$$

$$T^3e_1 = T(T^2e_1) = Te_3 = e_4,$$

לפיכך $3e_1 - 6Te_1 = -T^5e_1$. הרשימה $e_1, Te_1, T^2e_1, T^3e_1, T^4e_1$ השווה לרשימה e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 , בלתי תלויה ליניארית, כך שאין צירוף ליניארי אחר של רשימה זו השווה ל- T^5e_1 . לכן הפולינום המינימלי של T הוא $3 - 6z + z^5$.

נזכיר כי לפי ההגדרה, ערכים עצמיים של אופרטור מעל V ושורשים של פולינומים ב- $\mathcal{P}(F)$ חייבים להיות איברים ב- F . בפרט, אם $F = \mathbb{R}$, אזי הערכים העצמיים והשורשים חייבים להיות מספרים ממשיים.

5.27 ערכים עצמיים הם שורשי הפולינום המינימלי

נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$.

א. השורשים של הפולינום המינימלי של T הם הערכים העצמיים של T .

ב. אם V מרחב וקטורי מרוכב, אזי הפולינום המינימלי של T הוא מהצורה

$$(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m),$$

כאשר $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ היא רשימת כל הערכים העצמיים של T , עם אפשרות לחזרות.

הוכחה יהי p הפולינום המינימלי של T .

א. ראשית נניח ש- $\lambda \in F$ שורש של p . אזי נוכל לכתוב את p באופן הבא

$$p(z) = (z - \lambda)q(z),$$

כאשר q פולינום מתוקן עם מקדמים ב- F (ראו 4.6). מאחר ש- $p(T) = 0$, נקבל

$$0 = (T - \lambda I)(q(T)v)$$

לכל $v \in V$. מאחר ש- $\deg q = (\deg p) - 1$ ו- p הפולינום המינימלי של T , קיים לפחות וקטור אחד $v \in V$ כך ש- $q(T)v \neq 0$. לפיכך מהמשוואה לעיל נובע ש- λ ערך עצמי של T , כפי שרצינו.

כדי להוכיח שכל ערך עצמי של T הוא שורש של p , נניח כעת ש- $\lambda \in F$ ערך עצמי של T . לפיכך קיים $v \in V$ עם $v \neq 0$ כך ש- $Tv = \lambda v$. הפעולות חוזרות של T על שני אגפי המשוואה מראות ש- $T^k v = \lambda^k v$ לכל k שלם אי-שלילי. לפיכך

$$p(T)v = p(\lambda)v.$$

מאחר ש- p הוא הפולינום המינימלי של T , קיבלנו ש- $p(T)v = 0$. לכן מהמשוואה לעיל נובע ש- $p(\lambda) = 0$. לפיכך λ שורש של p , כפי שרצינו.

ב. לקבלת התוצאה הרצויה, נשתמש ב- (א) ובגרסה השנייה של המשפט היסודי של האלגברה (ראו 4.13).

לפולינום שאינו פולינום האפס יש לכל היותר מספר שורשים שונים השווה למעלתו (ראו 4.8). לפיכך סעיף (א) של המסקנה הקודמת, בצירוף המסקנה שמעלת הפולינום המינימלי של אופרטור מעל V היא לכל היותר $\dim V$, מספק הוכחה חלופית עבור 5.12, הקובעת כי לאופרטור מעל V יש לכל היותר $\dim V$ ערכים עצמיים שונים.

כל פולינום מתוקן הוא פולינום מינימלי של אופרטור כלשהו, כפי שמודגם בתרגיל 16, המכליל את דוגמה 5.26. לפיכך 5.27 (א) מלמד אותנו שמציאת נוסחאות מדויקות עבור ערכים עצמיים של אופרטורים שקולה לבעיית מציאת נוסחאות מדויקות לשורשי פולינום (ולפיכך בלתי אפשרית עבור חלק מהאופרטורים).

5.28 דוגמה: אופרטור שעבורו לא ניתן למצוא ערכים עצמיים באופן מדויק

יהי $T \in \mathcal{L}(C^5)$ האופרטור המוגדר על ידי

$$T(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = (-3z_5, z_1 + 6z_5, z_2, z_3, z_4).$$

המטריצה של T ביחס לבסיס הסטנדרטי של C^5 היא המטריצה 5×5 בדוגמה 5.26. כפי שהראינו בדוגמה ההיא, הפולינום המינימלי של T הוא הפולינום

$$3 - 6z + z^5.$$

לא ניתן לבטא אף אחד משורשי פולינום זה תוך שימוש במספרים רציונליים, שורשים של מספרים רציונליים, וכללי האריתמטיקה הרגילים (הוכחה לכך תחרוג משמעותית מעבר לאלגברה ליניארית). מאחר ששורשי הפולינום לעיל הם הערכים העצמיים של T [לפי 5.27 (א)], אין ביכולתנו למצוא ביטוי מדויק לערכו של אף אחד מהערכים העצמיים של T בשום צורה מוכרת.

טכניקות נומריות, שלא נפרט כאן, מראות ששורשי הפולינום לעיל, ולפיכך הערכים העצמיים של T , הם חמשת המספרים המרוכבים הבאים בקירוב:

$$-1.67, \quad 0.51, \quad 1.40, \quad -0.12 + 1.59i, \quad -0.12 - 1.59i.$$

שימו לב כי שני השורשים הלא-ממשיים של הפולינום הם מרוכבים צמודים זה של זה, כפי שאנו מצפים מפולינום עם מקדמים ממשיים (ראו 4.14).

המסקנה הבאה מאפיינת באופן מלא את הפולינומים המפיקים את אופרטור האפס כאשר הם מופעלים על אופרטור.

$$5.29 \quad q(T) = 0 \text{ אס-ורק-אם } q \text{ כפולת פולינום של הפולינום המינימלי}$$

נניח ש- V מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V)$, ו- $q \in \mathcal{P}(F)$. אזי $q(T) = 0$ אס-ורק-אם q הוא כפולת פולינום של הפולינום המינימלי של T .

הוכחה יהי p הפולינום המינימלי של T .

תחילה נניח ש- $q(T) = 0$. לפי האלגוריתם לחלוקת פולינומים (4.9), קיימים פולינומים $s, r \in \mathcal{P}(F)$ כך ש-

$$5.30 \quad q = ps + r$$

ובנוסף $\deg r < \deg p$. קיבלנו אם כן

$$0 = q(T) = p(T)s(T) + r(T) = r(T).$$

ממשוואה זו נובע ש- $r = 0$ (אחרת, חלוקת r במקדם המוביל תפיק פולינום מתוקן שכאשר יופעל על T ייתן 0 ; לפולינום זה תהיה מעלה נמוכה יותר מזו של הפולינום המינימלי, בסתירה להגדרה). לפיכך 5.30 הופכת למשוואה $q = ps$. לכן q כפולת פולינום של p , כפי שרצינו.

להוכחת הכיוון השני, נניח כעת ש- q כפולת פולינום של p . לפיכך קיים פולינום $s \in \mathcal{P}(F)$ כך ש- $q = ps$. קיבלנו אם כן

$$q(T) = p(T)s(T) = 0s(T) = 0,$$

כפי שרצינו.

המסקנה הבאה היא תוצאה נחמדה של המסקנה לעיל.

$$5.31 \quad \text{פולינום מינימלי של אופרטור מצומצם}$$

נניח ש- V מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V)$, ו- U תת-מרחב של V שמור תחת T . אזי הפולינום המינימלי של T הוא כפולת פולינום של הפולינום המינימלי של $T|_U$.

הוכחה נניח ש- p הפולינום המינימלי של T . לפיכך $p(T)v = 0$ לכל $v \in V$. בפרט,

$$p(T)u = 0 \text{ לכל } u \in U.$$

לפיכך $p(T|_U) = 0$. כעת 5.29, מופעל על האופרטור $T|_U$ במקום על T , גורר ש- p כפולת פולינום של הפולינום המינימלי של $T|_U$.

ראו תרגיל 25 לתוצאה הנוגעת לאופרטורי מנה האנלוגית למסקנה זו.

במסקנה הבאה נראה שהאיבר הקבוע של הפולינום המינימלי של אופרטור קובע האם האופרטור הפיך.

5.32 T אינו הפיך אס-זורק-אס האיבר הקבוע של הפולינום המינימלי של T הוא 0

נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי T אינו הפיך אס-זורק-אס האיבר הקבוע של הפולינום המינימלי של T הוא 0.

הוכחה נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- p הפולינום המינימלי של T . אזי

$$T \text{ אינו הפיך} \iff 0 \text{ ערך עצמי של } T$$

$$\iff 0 \text{ שורש של } p$$

$$\iff \text{האיבר הקבוע של } p \text{ הוא } 0,$$

כאשר השקילות הראשונה מתקיימת לפי 5.7, השקילות השנייה מתקיימת לפי 5.27(א), והשקילות האחרונה מתקיימת מאחר שהאיבר הקבוע של p שווה ל- $p(0)$. ■

ערכים עצמיים מעל מרחבים וקטוריים ממשיים מממד אי-זוגי

המסקנה הבאה תשמש ככלי מרכזי שבו נשתמש כאשר נראה כי לכל אופרטור מעל מרחב וקטורי ממשי מממד אי-זוגי יש ערך עצמי.

5.33 מרחב אפס מממד זוגי

נניח ש- $F = \mathbb{R}$ ו- V מממד סופי. נניח בנוסף ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $b, c \in \mathbb{R}$ כאשר $b^2 < 4c$. אזי $\dim \text{null}(T^2 + bT + cI)$ מספר זוגי.

הוכחה נזכיר כי $\text{null}(T^2 + bT + cI)$ שמור תחת T (לפי 5.18). בהחלפת V ב- $\text{null}(T^2 + bT + cI)$ ובהחלפת T ב- T מצומצם ל- $\text{null}(T^2 + bT + cI)$, נוכל להניח כי $T^2 + bT + cI = 0$; כעת עלינו להוכיח כי $\dim V$ מספר זוגי.

נניח ש- $\lambda \in \mathbb{R}$ ו- $v \in V$ כך ש- $Tv = \lambda v$. אזי

$$0 = (T^2 + bT + cI)v = (\lambda^2 + b\lambda + c)v = \left(\left(\lambda + \frac{b}{2} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4} \right)v.$$

הביטוי בסוגריים הגדולים לעיל הוא מספר חיובי. לפיכך מהמשוואה נובע ש- $v = 0$. לכן הראינו של- T אין וקטורים עצמיים.

יהי U תת-מרחב של V השמור תחת T מהממד הגבוה ביותר מבין כל תת-המרחב של V השמורים תחת T ומממד מספר זוגי. אם $U = V$, בזאת סיימנו; אחרת, נניח שקיים $w \in V$ כך ש- $w \notin U$.

יהי $W = \text{span}(w, Tw)$. אזי W שמור תחת T שכן $Tw = -bTw - cw$. בנוסף, $\dim W = 2$ שכן אחרת w היה וקטור עצמי של T . כעת נקבל

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = \dim U + 2,$$

כאשר $U \cap W = \{0\}$ שכן אחרת $U \cap W$ היה תת-מרחב חד-ממדי של V השמור תחת T (דבר בלתי אפשרי לאור העובדה שאין ל- T וקטורים עצמיים).

מאחר ש- $U + W$ שמור תחת T , מהמשוואה לעיל אנו רואים כי קיים תת-מרחב של V השמור תחת T מממד זוגי גדול מ- $\dim U$. לפיכך ההנחה ש- $U \neq V$ הייתה שגויה. לכן V מממד זוגי. ■

המסקנה הבאה קובעת כי במרחב וקטורי מממד אי-זוגי, לכל אופרטור יש ערך עצמי. מסקנה זו ידועה לנו כבר עבור מרחבים וקטוריים מרוכבים מממד סופי (ללא הנחת הממד האי-זוגי). לפיכך, בהוכחה להלן, נניח ש- $F = \mathbb{R}$.

5.34 לאופרטורים מעל מרחב וקטורי מממד אי-זוגי יש ערכים עצמיים

לכל אופרטור מעל מרחב וקטורי מממד אי-זוגי יש ערך עצמי.

הוכחה נניח ש- $F = \mathbb{R}$ ו- V מממד סופי. יהי $n = \dim V$, ונניח ש- n מספר אי-זוגי. יהי $T \in \mathcal{L}(V)$. נשתמש באינדוקציה על n בדילוגים של שניים כדי להראות כי ל- T יש ערך עצמי. ראשית, נשים לב כי אם $\dim V = 1$ התוצאה הרצויה מתקיימת, שכן אז, כל וקטור השונה מאפס ב- V הוא וקטור עצמי של T .

כעת נניח ש- $n \geq 3$ ושהתוצאה הרצויה מתקיימת עבור כל האופרטורים מעל כל המרחבים הווקטוריים מממד אי-זוגי שממדם קטן מ- n . יהי p הפולינום המינימלי של T . אם p כפולת פולינום של $x - \lambda$ עבור $\lambda \in \mathbb{R}$ כלשהו, אזי λ ערך עצמי של T [לפי 5.27(א)] ובזאת סיימנו. לפיכך נוכל להניח כי קיימים $b, c \in \mathbb{R}$ כך ש- $b^2 < 4c$ ו- p כפולת פולינום של $x^2 + bx + c$ (ראו 4.16).

קיים פולינום מתוקן $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ כך ש- $q(x)(x^2 + bx + c) = p(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. כעת נקבל

$$0 = p(T) = (q(T))(T^2 + bT + cI),$$

משמעות הדבר היא ש- $q(T)$ שווה 0 מעל $\text{range}(T^2 + bT + cI)$. מאחר ש- $\deg q < \deg p$ ו- p הוא הפולינום המינימלי של T , מכאן נובע ש- $\text{range}(T^2 + bT + cI) \neq V$. המשפט היסודי של ההעתקות הליניאריות (3.21) קובע כי

$$\dim V = \dim \text{null}(T^2 + bT + cI) + \dim \text{range}(T^2 + bT + cI).$$

מאחר ש- $\dim V$ אי-זוגי (לפי ההנחה) ו- $\dim \text{null}(T^2 + bT + cI)$ זוגי (לפי 5.33), המשוואה לעיל מראה ש- $\dim \text{range}(T^2 + bT + cI)$ אי-זוגי.

לכן $\text{range}(T^2 + bT + cI)$ תת-מרחב של V השמור תחת T (לפי 5.18) וממדו אי-זוגי הקטן מ- $\dim V$. לפי הנחת האינדוקציה, לאופרטור T כאשר הוא מצומצם ל- $\text{range}(T^2 + bT + cI)$ יש ערך עצמי, ומשמעות הדבר היא כי יש ל- T ערך עצמי. ■

ראו תרגיל 23 ביחידה ח ותרגיל 10 ביחידה ט להוכחות חלופיות למסקנה לעיל.

תרגילים ה

1 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו ש-9 ערך עצמי של T^2 אם ורק אם 3 או -3 ערך עצמי של T .

2 נניח ש- V מרחב וקטורי מרוכב ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור ללא ערכים עצמיים. הוכיחו כי כל תת-מרחב של V השמור תחת T הוא או $\{0\}$ או מממד אינסופי.

- 3 נניח ש- n מספר שלם עם $n > 1$ ו- $T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^n)$ מוגדר על ידי

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n, \dots, x_1 + \dots + x_n).$$

 א. מצאו את כל הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של T .
 ב. מצאו את הפולינום המינימלי של T .
 המטריצה של T ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{F}^n$ איבריה כולם 1-ים.
- 4 נניח ש- $\mathbf{F} = \mathbf{C}$, $T \in \mathcal{L}(V)$, $p \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$ פולינום שאינו קבוע, ו- $\alpha \in \mathbf{C}$. הוכיחו ש- α ערך עצמי של $p(T)$ אם ורק אם $\alpha = p(\lambda)$ עבור λ ערך עצמי כלשהו של T .
- 5 הביאו דוגמה לאופרטור מעל $\mathbf{R}^2$ המראה כי התוצאה בתרגיל 4 אינה מתקיימת אם נחליף את $\mathbf{C}$ ב- $\mathbf{R}$.
- 6 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^2)$ מוגדר על ידי $T(w, z) = (-z, w)$. מצאו את הפולינום המינימלי של T .
- 7 א. הביאו דוגמה של $S, T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^2)$ כך שהפולינום המינימלי של ST אינו שווה לפולינום המינימלי של TS .
 ב. נניח ש- V מממד סופי ו- $S, T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו שאם לפחות אחד מ- S, T הפיך, אזי הפולינום המינימלי של ST שווה לפולינום המינימלי של TS .
 רמז: הראו שאם S הפיך ו- $p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$ אזי $p(TS) = S^{-1}p(ST)S$.
- 8 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ אופרטור המסובב נגד כיוון השעון ב- 1° . מצאו את הפולינום המינימלי של T .
 מאחר ש- $\dim \mathbf{R}^2 = 2$, מעלת הפולינום המינימלי של T היא לכל היותר 2. לפיכך הפולינום המינימלי של T אינו זה שהיינו מתפתים לחשוב עליו $x^{180} + 1$ אף ש- $T^{180} = -I$.
- 9 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ כך שביחס לבסיס כלשהו של V , כל איברי המטריצה של T מספרים רציונליים. הסבירו מדוע כל המקדמים של הפולינום המינימלי של T מספרים רציונליים.
- 10 נניח ש- V מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $v \in V$. הוכיחו ש-

$$\text{span}(v, Tv, \dots, T^m v) = \text{span}(v, Tv, \dots, T^{\dim V - 1} v)$$

 לכל המספרים השלמים $m \geq \dim V - 1$.
- 11 נניח ש- V מרחב וקטורי דו-ממדי, $T \in \mathcal{L}(V)$, והמטריצה של T ביחס לבסיס כלשהו של V היא $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
 א. הראו ש- $T^2 - (a + d)T + (ad - bc)I = 0$.
 ב. הראו שהפולינום המינימלי של T שווה ל-

$$\begin{cases} z - a & \text{if } b = c = 0 \text{ and } a = d, \\ z^2 - (a + d)z + (ad - bc) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

12 הגדירו $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$ על ידי $T(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots, nx_n)$. מצאו את הפולינום המינימלי של T .

13 נניח ש- V מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V)$, ו- $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. הוכיחו כי קיים פולינום יחיד $r \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ כך ש- $p(T) = r(T)$ ו- $\deg r < \dim V$. ממצאת את הפולינום המינימלי של T .

14 נניח ש- V מרחב וקטורי מממד סופי והפולינום המינימלי של $T \in \mathcal{L}(V)$ הוא $z^5 + 2z^4 - 7z^3 - 6z^2 + 5z + 4$. מצאו את הפולינום המינימלי של T^{-1} .

15 נניח ש- V מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי, $\dim V > 0$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. נגדיר $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי

$$f(\lambda) = \dim \text{range}(T - \lambda I).$$

הוכיחו ש- f פונקציה שאינה רציפה.

16 נניח ש- $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$. יהי T אופרטור מעל $\mathbb{F}^n$ שהמטריצה שלו (ביחס לבסיס הסטנדרטי) היא

$$\begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & -a_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

במטריצה זו, כל האיברים הם 0 מלבד כל ה-1ים באלכסון שמתחת לאלכסון הראשי והאיברים בעמודה האחרונה (שייתכן שחלקם 0). הראו שהפולינום המינימלי של T הוא הפולינום

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n.$$

המטריצה לעיל נקראת **מטריצה מלווה** לפולינום לעיל. תרגיל זה פראה שכל פולינום מתוקן הוא פולינום מינימלי של אופרטור כלשהו. לכן, נוסחה או אלגוריתם הפסוגלים למצוא באופן מדויק ערכים עצמיים לכל אופרטור מעל כל $\mathbb{F}^n$ היו יכולים למצוא באופן מדויק שורשים עבור כל פולינום [לפי 5.27(א)]. לפיכך אין נוסחה או אלגוריתם כאלו. בכל זאת, קיימים אלגוריתמים יעילים באנליזה נומרית הפסוגלים למצוא קירובים טובים מאוד לערכים העצמיים של אופרטור.

17 נניח ש- V מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V)$, ו- p הפולינום המינימלי של T . נניח ש- $\lambda \in \mathbb{F}$. הראו שהפולינום המינימלי של $T - \lambda I$ הוא הפולינום q המוגדר על ידי $q(z) = p(z + \lambda)$.

18 נניח ש- V מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V)$, ו- p הוא הפולינום המינימלי של T . נניח ש- $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. הראו שהפולינום המינימלי של λT הוא הפולינום q המוגדר על ידי $q(z) = \lambda^{\deg p} p\left(\frac{z}{\lambda}\right)$.

19 נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. יהי $\mathcal{E}$ התת-מרחב של $\mathcal{L}(V)$ המוגדר על ידי

$$\mathcal{E} = \{q(T) : q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})\}.$$

הוכיחו ש- $\dim \mathcal{E}$ שווה למעלת הפולינום המינימלי של T .

20 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$ הוא כך שהערכים העצמיים של T הם 3, 5, 8. הוכיחו ש- $(T - 3I)^2(T - 5I)^2(T - 8I)^2 = 0$.

21 נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו שמעלת הפולינום המינימלי של T היא לכל היותר $1 + \dim \text{range } T$.

אם $\dim \text{range } T < \dim V - 1$, אזי תרגיל זה נותן חסם עליון טוב יותר מזה המוגדר ב-5.22 למעלת הפולינום המינימלי של T .

22 נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו ש- T הפיך אם ורק אם $I \in \text{span}(T, T^2, \dots, T^{\dim V})$.

23 נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. יהי $n = \dim V$. הוכיחו שאם $v \in V$, אזי $\text{span}(v, Tv, \dots, T^{n-1}v)$ שמור תחת T .

24 נניח ש- V מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי. נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ כך ש-5 ו-6 ערכים עצמיים של T וכי ל- T אין ערכים עצמיים נוספים. הוכיחו כי $(T - 5I)^{\dim V - 1}(T - 6I)^{\dim V - 1} = 0$.

25 נניח ש- V מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V)$, ו- U תת-מרחב של V השמור תחת T . א. הוכיחו שהפולינום המינימלי של T הוא כפולת פולינום של הפולינום המינימלי של $T|_U$ המנה T/U .

ב. הוכיחו כי אם p_1 הוא הפולינום המינימלי של $T|_U$ ו- p_2 הוא הפולינום המינימלי של T/U , אזי $p_1 p_2$ הוא כפולת פולינום של הפולינום המינימלי של T .

אופרטור המנה T/U הוגדר בתרגיל 38 ביחידה 1ה.

26 נניח ש- V מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V)$, ו- U תת-מרחב של V השמור תחת T . הוכיחו שקבוצת הערכים העצמיים של T שווה לאיחוד של קבוצת הערכים העצמיים של $T|_U$ וקבוצת הערכים העצמיים של T/U .

27 נניח ש- $V = \mathbb{R}, \mathbb{F} = \mathbb{C}$ מממד סופי, ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו שהפולינום המינימלי של $T_{\mathbb{C}}$ שווה לפולינום המינימלי של T . הפירוק $T_{\mathbb{C}}$ הוגדר בתרגיל 33 ביחידה 2ג.

28 נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו שהפולינום המינימלי של $T' \in \mathcal{L}(V')$ שווה לפולינום המינימלי של T . ההעתקה הזואלית T' הוגדרה ביחידה 6ג.

29 הראו שלכל אופרטור מעל מרחב וקטורי מממד סופי שממדו לפחות שניים יש תת-מרחב שמור דו-ממדי.

תרגיל 6 ביחידה 3ה יספר את התוצאה כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

ה3 מטריצות משולשיות עליונות

בפרק ג הגדרנו את מטריצת ההעתקה הליניארית ממרחב וקטורי מממד סופי אחד למרחב וקטורי מממד סופי אחר. מטריצה זו תלויה בבחירת בסיס עבור כל אחד משני המרחבים הווקטוריים. כעת כשאנו לומדים על אופרטורים המעתיקים מרחב וקטורי לעצמו, הדגש הוא על בחירת בסיס אחד בלבד.

5.35 הגדרה: מטריצת אופרטור, $\mathcal{M}(T)$

נניח $T \in \mathcal{L}(V)$. המטריצה של T ביחס לבסיס $v_1, \dots, v_n$ של V היא המטריצה $n \times n$

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

שאיבריה $A_{j,k}$ מוגדרים על ידי

$$Tv_k = A_{1,k}v_1 + \cdots + A_{n,k}v_n.$$

נשתמש בסימון $\mathcal{M}(T, (v_1, \dots, v_n))$ כאשר הבסיס אינו ברור מההקשר.

מטריצות של אופרטורים הן מטריצות ריבועיות (כלומר מספר השורות שווה למספר העמודות), בשונה מהמטריצות המלבניות הכלליות יותר שאותן הגדרנו קודם לכן עבור העתקות ליניאריות.

העמודה ה- k^{th} של המטריצה $\mathcal{M}(T)$ נבנית מהעקזמים שבהם השתמשנו כדי לבטא את Tv_k כצירוף ליניארי של הבסיס $v_1, \dots, v_n$.

אם T אופרטור מעל $\mathbb{F}^n$ ולא צוין בסיס, הניחו כי הבסיס המדובר הוא הבסיס הסטנדרטי (כאשר בווקטור הבסיס ה- k^{th} יש 1 ברכיב ה- k^{th} ו-0 ביתר הרכיבים).

ניתן לחשוב על העמודה ה- k^{th} של $\mathcal{M}(T)$ כהפעלת T על וקטור הבסיס ה- k^{th} , כאשר אנו מזהים וקטורי עמודה $n \times 1$ עם איברים ב- $\mathbb{F}^n$.

5.36 דוגמה: מטריצה של אופרטור ביחס לבסיס הסטנדרטי

נגדיר $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$ על ידי $T(x, y, z) = (2x + y, 5y + 3z, 8z)$. אזי המטריצה של T ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^3$ היא

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

כפי שעליכם לוודא.

מטרה מרכזית באלגברה ליניארית היא להראות כי בהינתן אופרטור T מעל מרחב וקטורי מממד סופי V , קיים בסיס של V אשר ביחס אליו, ל- T יש מטריצה פשוטה באופן יחסי. כדי להפוך ניסוח מעורפל זה למדויק מעט יותר, נוכל לנסות לבחור בסיס של V כך שבמטריצה $\mathcal{M}(T)$ יהיו הרבה אפסים.

אם V מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי, אזי יש בידינו מספיק כלים להראות כי קיים בסיס של V אשר ביחס אליו למטריצה של T יש אפסים בכל מקום בעמודה הראשונה, מלבד אולי באיבר הראשון. במילים אחרות, קיים בסיס של V אשר ביחס אליו המטריצה של T נראית כך

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ 0 & * & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix};$$

ה- $*$ כאן מייצגת את כל האיברים במטריצה מלבד איברי העמודה הראשונה. כדי להוכיח זאת, יהי λ ערך עצמי של T (לפי 5.19 קיים אחד) ויהי v וקטור עצמי השייך לערך עצמי זה. נרחיב את v לבסיס של V . אזי המטריצה של T ביחס לבסיס זה היא מהצורה שתוארה לעיל. בקרוב נראה שאנו יכולים לבחור בסיס של V אשר ביחס אליו, למטריצה של T יהיו עוד יותר אפסים.

5.37 הגדרה: אלכסון המטריצה

האלכסון של מטריצה ריבועית מורכב מהאיברים שעל הקו הנמתח מהפינה השמאלית העליונה אל הפינה הימנית התחתונה.

לדוגמה, אלכסון המטריצה

$$M(T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

מדוגמה 5.36 מורכב מהאיברים 2, 5, 8, המוצגים באדום במטריצה לעיל.

5.38 הגדרה: מטריצה משולשית עליונה

מטריצה ריבועית נקראת מטריצה משולשית עליונה אם כל איבריה תחת האלכסון אפסים.

לדוגמה, המטריצה 3×3 לעיל היא משולשית עליונה.

ברוב המקרים, נציג מטריצה משולשית עליונה בצורה הבאה

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix};$$

אנו משתמשים לעתים קרובות ב- $*$ לסמן איברי מטריצה שאין לנו ידע לגביהם או שאינם רלוונטיים לדיון.

ה- 0 במטריצה לעיל מסמן כי כל האיברים תחת האלכסון במטריצה $n \times n$ זו אפסים. מטריצות משולשיות עליונות נחשבות יחסית פשוטות—אם n מספר גדול, אזי לפחות כמעט מחצית מאיברי מטריצה $n \times n$ משולשית עליונה הם אפסים.

המסקנה הבאה מספקת קשר שימושי בין מטריצות משולשיות עליונות לבין תתי-מרחב שמורים.

5.39 תנאים למטריצה משולשית עליונה

- נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V . אזי התנאים הבאים שקולים.
- המטריצה של T ביחס ל- $v_1, \dots, v_n$ משולשית עליונה.
 - $\text{span}(v_1, \dots, v_k)$ שמור תחת T לכל $k = 1, \dots, n$.
 - $Tv_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ לכל $k = 1, \dots, n$.

הוכחה ראשית נניח ש- (א) מתקיים. להוכחה ש- (ב) מתקיים, נניח ש- $k \in \{1, \dots, n\}$ אם $j \in \{1, \dots, n\}$ אזי

$$Tv_j \in \text{span}(v_1, \dots, v_j)$$

הואיל והמטריצה של T ביחס ל- $v_1, \dots, v_n$ משולשית עליונה. שכן $\text{span}(v_1, \dots, v_j) \subseteq \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ אם $j \leq k$ אנו רואים כי

$$Tv_j \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$$

לכל $j \in \{1, \dots, k\}$. לפיכך, $\text{span}(v_1, \dots, v_k)$ שמור תחת T , ובזאת הושלמה ההוכחה ש- (א) גורר את (ב).

כעת נניח ש- (ב) מתקיים; אזי $\text{span}(v_1, \dots, v_k)$ שמור תחת T לכל $k = 1, \dots, n$. בפרט, $Tv_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ לכל $k = 1, \dots, n$. לפיכך (ב) גורר את (ג).

כעת נניח ש- (ג) מתקיים; אזי $Tv_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ לכל $k = 1, \dots, n$. משמעות הדבר היא כי בביטוי של כל Tv_k כצירוף ליניארי של וקטורי הבסיס $v_1, \dots, v_n$, אנו זקוקים רק לווקטורים $v_1, \dots, v_k$. לכן כל האיברים תחת האלכסון של $\mathcal{M}(T)$ הם אפסים. לפיכך $\mathcal{M}(T)$ מטריצה משולשית עליונה, ובזאת הושלמה ההוכחה ש- (ג) גורר את (א).

הראינו כי (א) $\Leftarrow$ (ב) $\Leftarrow$ (ג) $\Leftarrow$ (א), מה שמראה כי התנאים (א), (ב), ו- (ג) שקולים.

המסקנה הבאה קובעת כי אם $T \in \mathcal{L}(V)$ וביחס לבסיס כלשהו של V יש לנו

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

אזי T מקיים משוואה פשוטה התלויה ב- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

5.40 משוואה שאופרטור עם מטריצה משולשית עליונה מקיים

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ול- V יש בסיס אשר ביחס אליו יש ל- T מטריצה משולשית עליונה שאיברי האלכסון הם $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. אזי

$$(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_n I) = 0.$$

הוכחה יהי $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V אשר ביחס אליו, ל- T יש מטריצה משולשית עליונה עם איברי אלכסון $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. אזי $Tv_1 = \lambda_1 v_1$, משמעות הדבר היא ש- $(T - \lambda_1 I)v_1 = 0$, מכאן נובע ש- $(T - \lambda_1 I) \dots (T - \lambda_m I)v_1 = 0$ עבור $m = 1, \dots, n$ (תוך הפעלת התכונה הקומוטטיבית של כל $T - \lambda_j I$ עם כל $T - \lambda_k I$). נשים לב כי $(T - \lambda_2 I)v_2 \in \text{span}(v_1)$. לפיכך $(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)v_2 = 0$ (לפי הפסקה הקודמת), מכאן נובע ש- $(T - \lambda_1 I) \dots (T - \lambda_m I)v_2 = 0$ עבור $m = 2, \dots, n$ (תוך הפעלת התכונה הקומוטטיבית של כל $T - \lambda_j I$ עם כל $T - \lambda_k I$). נשים לב כי $(T - \lambda_3 I)v_3 \in \text{span}(v_1, v_2)$. לפיכך, לפי הפסקה הקודמת, $(T - \lambda_1 I) \dots (T - \lambda_m I)v_3 = 0$, מכאן נובע ש- $(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)(T - \lambda_3 I)v_3 = 0$ עבור $m = 3, \dots, n$ (תוך הפעלת התכונה הקומוטטיבית של כל $T - \lambda_j I$ עם כל $T - \lambda_k I$). נמשיך את התבנית הזו ונראה ש- $(T - \lambda_1 I) \dots (T - \lambda_n I)v_k = 0$ לכל $k = 1, \dots, n$. לפיכך $(T - \lambda_1 I) \dots (T - \lambda_n I)$ הוא אופרטור האפס שכן הוא שווה 0 על כל וקטור בבסיס של V .

למרבה הצער לא קיימת שיטה לחישוב מדויק של ערכים עצמיים של אופרטור על פי המטריצה שלו. בכל זאת, אם התמזל מזלנו ומצאנו בסיס אשר ביחס אליו מטריצת האופרטור היא משולשית עליונה, אזי בעיית חישוב הערכים העצמיים של האופרטור הופכת לטריוויאלית, כפי שמראה המסקנה הבאה.

5.41 קביעת ערכים עצמיים על פי מטריצה משולשית עליונה

נניח של- $T \in \mathcal{L}(V)$ יש מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו של V . אזי הערכים העצמיים של T הם בדיוק איברי האלכסון של אותה מטריצה משולשית עליונה.

הוכחה נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V אשר ביחס אליו ל- T יש מטריצה משולשית עליונה

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

מאחר ש- $Tv_1 = \lambda_1 v_1$, אנו רואים ש- λ_1 ערך עצמי של T . נניח ש- $k \in \{2, \dots, n\}$. אזי $(T - \lambda_k I)v_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_{k-1})$. לפיכך $T - \lambda_k I$ מעתיק את $\text{span}(v_1, \dots, v_k)$ אל $\text{span}(v_1, \dots, v_{k-1})$. מאחר ש- $\dim \text{span}(v_1, \dots, v_k) = k$ וגם $\dim \text{span}(v_1, \dots, v_{k-1}) = k - 1$, מכאן נובע ש- $T - \lambda_k I$ מצומצם ל- $\text{span}(v_1, \dots, v_k)$ אינו חד-חד-ערכי (לפי 3.22). לפיכך, קיים $v \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ כך ש- $v \neq 0$ ו- $(T - \lambda_k I)v = 0$. לפיכך λ_k ערך עצמי של T . לכן הראינו כי כל איבר באלכסון המטריצה $\mathcal{M}(T)$ הוא ערך עצמי של T . להוכחה כי ל- T אין ערכים עצמיים אחרים, יהי q הפולינום המוגדר על ידי $q(z) = (z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_n)$. לכן $q(T) = 0$ (לפי 5.40). לכן q כפולת פולינום של הפולינום המינימלי של T (לפי 5.29). לפיכך כל שורש של הפולינום המינימלי של T הוא שורש של q . מאחר שהשורשים של הפולינום המינימלי של T הם הערכים העצמיים של T (לפי 5.27), מכאן נובע שכל ערך עצמי של T הוא שורש של q . לכן כל הערכים העצמיים של T כלולים ברשימה $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

5.42 דוגמה: ערכים עצמיים באמצעות מטריצה משולשית עליונה

נגדיר $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$ על ידי $T(x, y, z) = (2x + y, 5y + 3z, 8z)$. המטריצה של T ביחס לבסיס הסטנדרטי היא

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

ממסקנה 5.41 נובע שהערכים העצמיים של T הם 2, 5, ו-8.

הדוגמה הבאה ממחישה את 5.44: לאופרטור יש מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו אם-ורק-אם הפולינום המינימלי של האופרטור הוא מכפלה של פולינומים ממעלה 1.

5.43 דוגמה: השאלה אם ל- T יש מטריצה משולשית עליונה עשויה להיות תלויה ב- $\mathbb{F}$

נגדיר $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$ על ידי

$$T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (-z_2, z_1, 2z_1 + 3z_3, z_3 + 3z_4).$$

לפיכך, ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^4$, המטריצה של T היא

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

תוכלו להיעזר במחשב כדי לוודא שהפולינום המינימלי של T הוא הפולינום p המוגדר על ידי

$$p(z) = 9 - 6z + 10z^2 - 6z^3 + z^4.$$

תחילה נשקול את המקרה של $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. אזי הפולינום p מתפרק כך

$$p(z) = (z^2 + 1)(z - 3)(z - 3),$$

ללא אפשרות לפרק עוד את $z^2 + 1$ למכפלה של שני פולינומים ממעלה 1 עם מקדמים ממשיים. לפיכך 5.44 קובעת שלא קיים בסיס של $\mathbb{R}^4$ אשר ביחס אליו, ל- T יש מטריצה משולשית עליונה.

כעת נשקול את המקרה של $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. אזי הפולינום p מתפרק כך

$$p(z) = (z - i)(z + i)(z - 3)(z - 3),$$

כאשר כל הגורמים לעיל הם מהצורה $z - \lambda_k$. לפיכך 5.44 קובעת כי קיים בסיס של $\mathbb{C}^4$ אשר ביחס אליו, יש ל- T מטריצה משולשית עליונה. אכן, תוכלו לוודא כי ביחס לבסיס $(4 - 3i, -3 - 4i, -3 + i, 1), (4 + 3i, -3 + 4i, -3 - i, 1), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$ של $\mathbb{C}^4$, לאופרטור T יש מטריצה משולשית עליונה

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.44 תנאי הכרחי ומספיק לקיומה של מטריצה משולשית עליונה

נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי יש ל- T מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו של V אם ורק אם הפולינום המינימלי של T שווה ל- $(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$ עבור $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$ כלשהם.

הוכחה ראשית נניח כי יש ל- T מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו של V . יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ איברי האלכסון של אותה מטריצה. נגדיר פולינום $q \in \mathcal{P}(F)$ על ידי $q(z) = (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$.

אזי $q(T) = 0$, לפי 5.40. לכן q כפולת פולינום של הפולינום המינימלי של T , לפי 5.29. לפיכך הפולינום המינימלי של T שווה ל- $(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$ עבור $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$ כלשהם, עם $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$.

כדי להוכיח את הגרירה בכיוון השני, נניח כעת כי הפולינום המינימלי של T שווה ל- $(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$ עבור $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$. נוכיח באינדוקציה על m . כצעד ראשון, אם $m = 1$ אזי λ_1 הוא הפולינום המינימלי של T , מה שגורר כי $T = \lambda_1 I$ ומכאן שהמטריצה של T (ביחס לכל בסיס של V) היא משולשית עליונה.

כעת נניח ש- $m > 1$ והתוצאה הרצויה מתקיימת עבור כל מספר שלם חיובי הקטן מ- m . יהי

$$U = \text{range}(T - \lambda_m I).$$

אזי U שמור תחת T [זהו מקרה מיוחד של 5.18 עם $p(z) = z - \lambda_m$]. לפיכך $T|_U$ אופרטור מעל U .

אם $u \in U$, אזי $u = (T - \lambda_m I)v$ עבור $v \in V$ כלשהו, וגם

$$(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_{m-1} I)u = (T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_m I)v = 0.$$

לכן $(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_{m-1})$ כפולת פולינום של הפולינום המינימלי של $T|_U$, לפי 5.29. לפיכך הפולינום המינימלי של $T|_U$ הוא מכפלה של לכל היותר $m - 1$ גורמים מהצורה $z - \lambda_k$.

לפי הנחת האינדוקציה, קיים בסיס $u_1, \dots, u_M$ של U אשר ביחס אליו יש ל- $T|_U$ מטריצה משולשית עליונה. לפיכך, לכל $k \in \{1, \dots, M\}$ (בשימוש ב- 5.39)

$$5.45 \quad Tu_k = (T|_U)(u_k) \in \text{span}(u_1, \dots, u_k).$$

נשלים את $u_1, \dots, u_M$ לכדי בסיס $u_1, \dots, u_M, v_1, \dots, v_N$ של V . אם $k \in \{1, \dots, N\}$ אזי

$$Tv_k = (T - \lambda_m I)v_k + \lambda_m v_k.$$

מההגדרה של U אנו מסיקים כי $(T - \lambda_m I)v_k \in U = \text{span}(u_1, \dots, u_M)$. לפיכך מהמשוואה לעיל אנו רואים כי

$$5.46 \quad Tv_k \in \text{span}(u_1, \dots, u_M, v_1, \dots, v_k).$$

מ- 5.45 ו- 5.46, נסיק (תוך שימוש ב- 5.39) כי ל- T יש מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס $u_1, \dots, u_M, v_1, \dots, v_N$ של V , כפי שרצינו. ■

קבוצת המספרים $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ מהמסקנה לעיל שווה לקבוצת הערכים העצמיים של T (שכן קבוצת השורשים של הפולינום המינימלי של T שווה לקבוצת הערכים העצמיים של T , לפי 5.27), אף שיתכן שברשימה $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ במסקנה הקודמת יש איברים החוזרים על עצמם. בפרק ח אנו נשפר אפילו את המסקנה הנפלאה להלן; ראו 8.37 ו- 8.46.

5.47 אם $F = C$, אזי לכל אופרטור מעל V יש מטריצה משולשית עליונה

נניח ש- V מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי יש ל- T מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו של V .

הוכחה התוצאה הרצויה נובעת באופן מיידי מ- 5.44 ומהגרסה השנייה של המשפט היסודי של האלגברה (ראו 4.13).

להרחבת המסקנה לעיל עבור שני אופרטורים S ו- T כך ש-

$$ST = TS,$$

ראו 5.80. בנוסף, להרחבה ליותר משני אופרטורים, ראו תרגיל 9 (ב) ביחידה ה-5.

זְהִירוֹת: אם לאופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ יש מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס $v_1, \dots, v_n$ כלשהו של V , אזי הערכים העצמיים של T הם בדיוק האיברים באלכסון המטריצה $\mathcal{M}(T)$, כפי שהראינו ב- 5.41, ויתר על כן, v_1 הוא וקטור עצמי של T . אולם, $v_2, \dots, v_n$ אינם בהכרח וקטורים עצמיים של T . אכן וקטור בסיס v_k הוא וקטור עצמי של T אם ורק אם כל האיברים בעמודה ה- k^{th} של המטריצה של T הם 0, מלבד אולי האיבר ה- k^{th} .

יישום שיטת דירוג מטריצות על מטריצת האופרטור לא יניב לנו את רשימת הערכים העצמיים של האופרטור. בניגוד לכך, מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו מספקת לנו רשימה של כל הערכים העצמיים של האופרטור. עם זאת, לא קיימת שיטה לחישוב מדויק של מטריצה משולשית עליונה שכזו, זאת אף ש- 5.47 מבטיחה את קיומה אם $F = C$.

ייתכן שאתם זוכרים מקורס קודם כי כל מטריצה ניתנת לשינוי למטריצה בצורה הקרויה צורת מדרגות באמצעות פעולות אלמנטריות. דירוג מטריצה ריבועית מוביל למטריצה משולשית עליונה. אל תבלבלו את מטריצה משולשית עליונה זו עם המטריצה המשולשית העליונה של אופרטור ביחס לבסיס כלשהו, שאת קיומה מבטיחה 5.47 (אם $F = C$)—אין קשר בין מטריצות משולשיות עליונות אלו.

תרגילים ה-3

1 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם $T \in \mathcal{L}(V)$ ויש ל- T^2 מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו של V , אזי יש ל- T מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו של V .

2 נניח ש- A ו- B מטריצות משולשיות עליונות מאותו הגודל, עם $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ו- $\beta_1, \dots, \beta_n$ באלכסון B .

א. הראו ש- $A + B$ מטריצה משולשית עליונה עם $\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n$ כאיברי האלכסון.

ב. הראו ש- AB מטריצה משולשית עליונה עם $\alpha_1\beta_1, \dots, \alpha_n\beta_n$ כאיברי האלכסון.

בהוכחת 5.81 נעשה שימוש בתוצאות בתרגיל זה.

3 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ הפיך ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V אשר ביחס אליו המטריצה של T משולשית עליונה, עם $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ כאיברי האלכסון. הראו שהמטריצה של T^{-1} גם היא משולשית עליונה ביחס לבסיס $v_1, \dots, v_n$ עם

$$\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$$

איברי האלכסון.

4 הביאו דוגמה לאופרטור שהמטריצה שלו ביחס לבסיס כלשהו מכילה באלכסון רק אפסים, אך האופרטור הפיך.

תרגיל זה והתרגיל הבא מראים כי מסקנה 5.41 אינה תקפה ללא ההנחה כי נקודת המוצא היא קיומה של מטריצה משולשית עליונה.

5 הביאו דוגמה לאופרטור שהמטריצה שלו ביחס לבסיס כלשהו מכילה באלכסון רק איברים שאינם אפסים, אך האופרטור בלתי הפיך.

6 נניח ש- $V = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{C}$ מממד סופי, ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו שאם $k \in \{1, \dots, \dim V\}$, אזי יש ל- V תת־מרחב k -ממדי השמור תחת T .

7 נניח ש- V מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $v \in V$.

א. הוכיחו כי קיים פולינום מתוקן יחיד p_v מהמעלה הנמוכה ביותר כך ש- $p_v(T)v = 0$.

ב. הוכיחו שהפולינום המינימלי של T הוא כפולת פולינום של p_v .

8 נניח ש- V מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V)$, וקיים וקטור $v \in V$ השונה מאפס, כך ש- $T^2v + 2Tv = -2v$.

א. הוכיחו שאם $F = \mathbb{R}$, אזי לא קיים בסיס של V אשר ביחס אליו יש ל- T מטריצה משולשית עליונה.

ב. הוכיחו שאם $F = \mathbb{C}$ ו- A מטריצה משולשית עליונה השווה למטריצה של T ביחס לבסיס כלשהו של V , אזי $-1 + i$ או $-1 - i$ מופיע באלכסונה של A .

9 נניח ש- B מטריצה ריבועית עם איברים מרוכבים. הוכיחו שקיימת מטריצה ריבועית הפיכה A עם איברים מרוכבים כך ש- $A^{-1}BA$ מטריצה משולשית עליונה.

- 10** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V . הראו שהתנאים הבאים שקולים.
 א. המטריצה של T ביחס ל- $v_1, \dots, v_n$ היא מטריצה משולשית תחתונה.
 ב. $\text{span}(v_k, \dots, v_n)$ שמור תחת T לכל $k = 1, \dots, n$.
 ג. $Tv_k \in \text{span}(v_k, \dots, v_n)$ לכל $k = 1, \dots, n$.

מטריצה ריבועית נקראת **מטריצה משולשית תחתונה** אם כל איבריה מעל האלכסון הם 0.

- 11** נניח ש- $F = \mathbb{C}$ ו- V מממד סופי. הוכיחו שאם $T \in \mathcal{L}(V)$, אזי קיים בסיס של V אשר ביחס אליו יש ל- T מטריצה משולשית תחתונה.

- 12** נניח ש- V מממד סופי, יש ל- $T \in \mathcal{L}(V)$ מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו של V , ו- U תת-מרחב של V השמור תחת T .
 א. הוכיחו שיש ל- $T|_U$ מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו של U .
 ב. הוכיחו שיש לאופרטור המנה T/U מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו של V/U .

אופרטור המנה T/U הוגדר בתרגיל 38 ביחידה ה-1.

- 13** נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. נניח כי קיים תת-מרחב U של V השמור תחת T כך שיש ל- $T|_U$ מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו של U ובנוסף, יש ל- T/U מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו של V/U . הוכיחו שיש ל- T מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו של V .

- 14** נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו שיש ל- T מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו של V אם ורק אם יש לאופרטור הדואלי T' מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו של המרחב הדואלי V' .

4ה אופרטורים לכסינים

מטריצות אלכסוניות

5.48 הגדרה: מטריצה אלכסונית

מטריצה אלכסונית היא מטריצה ריבועית שכל איבריה אפסים מלבד אולי באלכסון.

5.49 דוגמה: מטריצה אלכסונית

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

היא מטריצה אלכסונית.

כל מטריצה אלכסונית היא משולשית עליונה. במטריצות אלכסוניות יש בדרך כלל הרבה יותר אפסים מאשר ברוב המטריצות המשולשיות העליונות באותו הגודל.

אם לאופרטור יש מטריצה אלכסונית ביחס לבסיס כלשהו, אזי האיברים באלכסון המטריצה הם בדיוק הערכים העצמיים של האופרטור; הדבר נובע מ- 5.41 (לחילופין מצאו הוכחה ישירה קלה יותר למטריצות אלכסוניות).

5.50 הגדרה: לכסין

אופרטור מעל V נקרא לכסין אם לאופרטור יש מטריצה אלכסונית ביחס לבסיס כלשהו של V .

5.51 דוגמה: ייתכן שלכסון ירוש בסיס אחר

נגדיר $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ על ידי

$$T(x, y) = (41x + 7y, -20x + 74y).$$

המטריצה של T ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$ היא

$$\begin{pmatrix} 41 & 7 \\ -20 & 74 \end{pmatrix},$$

שאינה מטריצה אלכסונית. אולם, T לכסין. ליתר דיוק, המטריצה של T ביחס לבסיס $(1, 4), (7, 5)$ היא

$$\begin{pmatrix} 69 & 0 \\ 0 & 46 \end{pmatrix}$$

מאחר ש- $T(1, 4) = (69, 276) = 69(1, 4)$ ו- $T(7, 5) = (322, 230) = 46(7, 5)$

עבור $\lambda \in F$, יהיה לנו נוח לתת שם וסימון לקבוצת הווקטורים שאותם האופרטור T מעתיק אל λ כפול הווקטור.

5.52 הגדרה: מרחב עצמי, $E(\lambda, T)$

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\lambda \in F$. המרחב העצמי של T השייך ל- λ הוא התת-מרחב $E(\lambda, T)$ של V המוגדר על ידי

$$E(\lambda, T) = \text{null}(T - \lambda I) = \{v \in V : Tv = \lambda v\}.$$

לכן $E(\lambda, T)$ הוא קבוצת כל הווקטורים העצמיים של T השייכים ל- λ , יחד עם וקטור ה-0.

עבור $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\lambda \in F$, הקבוצה $E(\lambda, T)$ היא תת-מרחב של V מאחר שמרחב האפס של כל העתקה ליניארית מעל V הוא תת-מרחב של V . מההגדרות נובע ש- λ ערך עצמי של T אם ורק אם $E(\lambda, T) \neq \{0\}$.

5.53 דוגמה: מרחבים עצמיים של אופרטור

נניח שמטריצת האופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ ביחס לבסיס v_1, v_2, v_3 של V היא המטריצה בדוגמה 5.49. אזי

$$E(8, T) = \text{span}(v_1), \quad E(5, T) = \text{span}(v_2, v_3).$$

אם λ ערך עצמי של אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$, אזי T מצומצם ל- $E(\lambda, T)$ הוא פשוט אופרטור הכפלה ב- λ .

5.54 סכום מרחבים עצמיים הוא סכום ישר

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ערכים עצמיים שונים של T . אזי

$$E(\lambda_1, T) + \dots + E(\lambda_m, T)$$

הוא סכום ישר. בנוסף, אם V מממד סופי, אזי

$$\dim E(\lambda_1, T) + \dots + \dim E(\lambda_m, T) \leq \dim V.$$

הוכחה כדי להראות כי $E(\lambda_1, T) + \dots + E(\lambda_m, T)$ סכום ישר, נניח ש-

$$v_1 + \dots + v_m = 0,$$

כאשר כל v_k ב- $E(\lambda_k, T)$. מאחר שווקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים בלתי תלויים ליניארית (לפי 5.11), מכאן נובע שכל v_k שווה 0. לפיכך סכום המרחבים העצמיים $E(\lambda_1, T) + \dots + E(\lambda_m, T)$ הוא סכום ישר (לפי 1.45), כפי שרצינו.

כעת נניח ש- V מממד סופי ונקבל

$$\begin{aligned} \dim E(\lambda_1, T) + \dots + \dim E(\lambda_m, T) &= \dim(E(\lambda_1, T) \oplus \dots \oplus E(\lambda_m, T)) \\ &\leq \dim V, \end{aligned}$$

כאשר השורה הראשונה נובעת מ- 3.94 והשורה השנייה מ- 2.37.

תנאים ללכסיונות

המאפיינים הבאים של אופרטור לכסין יהיו שימושיים.

5.55 תנאים שקולים ללכסיונות

נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ הערכים העצמיים השונים של T . אזי התנאים הבאים שקולים.

א. T לכסין.

ב. יש ל- V בסיס המורכב מווקטורים עצמיים של T .

ג. $V = E(\lambda_1, T) \oplus \dots \oplus E(\lambda_m, T)$

ד. $\dim V = \dim E(\lambda_1, T) + \dots + \dim E(\lambda_m, T)$

הוכחה לאופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ יש מטריצה אלכסונית

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ביחס לבסיס $v_1, \dots, v_n$ של V אם-ורק-אם $Tv_k = \lambda_k v_k$ לכל k . לפיכך (א) ו-(ב) שקולים.

נניח ש-(ב) מתקיים; לפיכך יש ל- V בסיס המורכב מווקטורים עצמיים של T . לכן כל וקטור ב- V הוא צירוף ליניארי של וקטורים עצמיים של T , מכאן נובע כי

$$V = E(\lambda_1, T) + \dots + E(\lambda_m, T).$$

כעת 5.54 מראה ש-(ג) מתקיים, וזו ההוכחה לכך ש-(ג) נגזר מ-(ב).

את זה ש-(ג) גורר את (ד) אנו מסיקים ישירות מ-3.94.

לבסוף, נניח ש-(ד) מתקיים; לפיכך

$$\dim V = \dim E(\lambda_1, T) + \dots + \dim E(\lambda_m, T). \quad 5.56$$

נבחר בסיס של כל $E(\lambda_k, T)$; נקבץ את כל הבסיסים הללו יחד ליצירת רשימת הווקטורים העצמיים $v_1, \dots, v_n$ של T , כאשר $n = \dim V$ (לפי 5.56). כדי להראות שרשימה זו בלתי תלויה ליניארית, נניח ש-

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0,$$

כאשר $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$. לכל $k = 1, \dots, m$, יהי u_k סכום כל המחוברים $a_j v_j$ כך ש- $v_j \in E(\lambda_k, T)$. לפיכך, כל u_k הוא ב- $E(\lambda_k, T)$, ובנוסף מתקיים

$$u_1 + \dots + u_m = 0.$$

מאחר שווקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים בלתי תלויים ליניארית (ראו 5.11), מכאן נובע שכל u_k שווה 0. מאחר שכל u_k הוא סכום המחוברים $a_j v_j$, כאשר ה- v_j נבחרו כבסיס של $E(\lambda_k, T)$, מכאן נובע שכל ה- a_j שווים 0. לפיכך $v_1, \dots, v_n$ בלתי תלויה ליניארית ולכן היא בסיס של V (לפי 2.38). לפיכך (ד) גורר את (ב), ובכך השלמנו את ההוכחה. ■

לתנאים נוספים השקולים ללכסיונות, ראו 5.62, תרגילים 5 ו-15 ביחידה זו, תרגיל 24 ביחידה 2, ותרגיל 15 ביחידה 1ח.

כפי שאנו כבר יודעים, לכל אופרטור מעל מרחב וקטורי ממומד סופי השונה מאפס יש ערך עצמי. אך לא לכל אופרטור מעל מרחב וקטורי ממומד סופי השונה מאפס יש מספיק וקטורים עצמיים כדי שיהיה לכסין, כפי שנראה בדוגמה הבאה.

5.57 דוגמה: אופרטור שאינו לכסין

נגדיר אופרטור $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$ על ידי $T(a, b, c) = (b, c, 0)$. המטריצה של T ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^3$ היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

שהיא מטריצה משולשית עליונה אך אינה מטריצה אלכסונית.

כפי שעליכם לוודא, 0 הוא הערך העצמי היחיד של T ובנוסף

$$E(0, T) = \{(a, 0, 0) \in \mathbb{F}^3 : a \in \mathbb{F}\}.$$

לכן התנאים (ב), (ג), ו- (ד) של 5.55 אינם מתקיימים (כמובן שמאחר שהתנאים הם שקולים, די היה בבדיקת אי התקיימותו של תנאי אחד בלבד). לפיכך תנאי (א) של 5.55 גם אינו מתקיים. לכן T אינו לכסין, בין אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ובין אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

המסקנה הבאה מראה שאם לאופרטור יש מספר ערכים עצמיים שונים השווה לממד התחום, אזי האופרטור לכסין.

5.58 כמות מספקת של ערכים עצמיים גוררת לכסינות

נניח ש- V ממומד סופי ומספר הערכים העצמיים השונים של $T \in \mathcal{L}(V)$ הוא $\dim V$. אזי T לכסין.

הוכחה נניח כי ל- T ערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \dots, \lambda_{\dim V}$. עבור כל k , יהי $v_k \in V$ וקטור עצמי השייך לערך העצמי λ_k . מאחר שווקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים הם בלתי תלויים ליניארית (ראו 5.11), $v_1, \dots, v_{\dim V}$ בלתי תלויה ליניארית. רשימה בלתי תלויה ליניארית של $\dim V$ וקטורים ב- V היא בסיס של V (ראו 2.38); לפיכך $v_1, \dots, v_{\dim V}$ בסיס של V . ביחס לבסיס זה המורכב מווקטורים עצמיים, יש ל- T מטריצה אלכסונית. ■

בפרקי ההמשך נכיר תנאים נוספים הגוררים כי אופרטורים מסוימים לכסינים. לדוגמה ראו משפט הפירוק הספקטרלי הממשי (7.29) ומשפט הפירוק הספקטרלי המרוכב (7.31).

המסקנה לעיל מציגה תנאי מספיק לכך שאופרטור יהיה לכסין. אולם תנאי זה אינו הכרחי. לדוגמה, לאופרטור T מעל $\mathbb{F}^3$ המוגדר על ידי $T(x, y, z) = (6x, 6y, 7z)$ יש רק שני ערכים עצמיים (6 ו- 7) ו- $\dim \mathbb{F}^3 = 3$, ובכל זאת T לכסין (לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^3$).

ליישום מרהיב של טכניקות אלו, ראו תרגיל 21, המראה איך ניתן להשתמש בלכסון כדי למצוא את הנוסחה המדויקת עבור האיבר ה- n^{th} של סדרת פיבונאצ'.

הדוגמה הבאה ממחישה את חשיבותו של הלכסון, שבו ניתן להשתמש לחישוב חזקות מסדר גבוה של אופרטורים, תוך שימוש במשוואה $T^k v = \lambda^k v$ אם v וקטור עצמי של T השייך לערך העצמי λ .

5.59 דוגמה: שימוש בלכסון לחישוב T^{100}

נגדיר $T \in \mathcal{L}(F^3)$ על ידי $T(x, y, z) = (2x + y, 5y + 3z, 8z)$. ביחס לבסיס הסטנדרטי, המטריצה של T היא

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

מטריצה זו היא מטריצה משולשית עליונה אך אינה מטריצה אלכסונית. לפי 5.41, הערכים העצמיים של T הם 2, 5 ו-8. מאחר ש- T אופרטור מעל מרחב וקטורי תלת-ממדי ויש ל- T שלושה ערכים עצמיים שונים, 5.58 מבטיח לנו כי קיים בסיס של F^3 אשר ביחס אליו יש ל- T מטריצה אלכסונית.

כדי למצוא בסיס זה, כל שעלינו לעשות הוא למצוא וקטור עצמי לכל ערך עצמי. במילים אחרות, עלינו למצוא פתרון השונה מאפס למשוואה

$$T(x, y, z) = \lambda(x, y, z)$$

עבור $\lambda = 2$, אחר-כך עבור $\lambda = 5$, ואז עבור $\lambda = 8$. פתרון משוואות פשוטות אלו מראה כי עבור $\lambda = 2$ יש לנו וקטור עצמי $(1, 0, 0)$, עבור $\lambda = 5$ יש לנו וקטור עצמי $(1, 3, 0)$, ועבור $\lambda = 8$ יש לנו וקטור עצמי $(1, 6, 6)$.

לפיכך $(1, 0, 0)$, $(1, 3, 0)$, $(1, 6, 6)$ בסיס של F^3 המורכב מהווקטורים העצמיים של T , וביחס לבסיס זה, המטריצה של T היא המטריצה האלכסונית

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

לחישוב $T^{100}(0, 0, 1)$, לדוגמה, נכתוב את $(0, 0, 1)$ כצירוף ליניארי של בסיס הווקטורים העצמיים שלנו:

$$(0, 0, 1) = \frac{1}{6}(1, 0, 0) - \frac{1}{3}(1, 3, 0) + \frac{1}{6}(1, 6, 6).$$

כעת נפעיל את T^{100} על שני אגפי המשוואה, ונקבל

$$\begin{aligned} T^{100}(0, 0, 1) &= \frac{1}{6}(T^{100}(1, 0, 0)) - \frac{1}{3}(T^{100}(1, 3, 0)) + \frac{1}{6}(T^{100}(1, 6, 6)) \\ &= \frac{1}{6}(2^{100}(1, 0, 0) - 2 \cdot 5^{100}(1, 3, 0) + 8^{100}(1, 6, 6)) \\ &= \frac{1}{6}(2^{100} - 2 \cdot 5^{100} + 8^{100}, 6 \cdot 8^{100} - 6 \cdot 5^{100}, 6 \cdot 8^{100}). \end{aligned}$$

ראינו לעיל כי לאופרטור T מעל מרחב וקטורי מממד סופי V יש מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו של V אס-ורק-אם הפולינום המינימלי של T שווה ל- $(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$ עבור $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F}$ כלשהם (ראו 5.44). כפי שצוין קודם (ראו 5.47), תנאי זה תמיד מתקיים אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

מסקנתנו הבאה 5.62 קובעת כי לאופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ יש מטריצה אלכסונית ביחס לבסיס כלשהו של V אס-ורק-אם הפולינום המינימלי של T שווה ל- $(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$ עבור $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F}$ שונים כלשהם. בטרם ננסח מסקנה זו באופן רשמי, נביא שתי דוגמאות לשימוש במסקנה זו.

5.60 דוגמה: לכסין, אך הערכים העצמיים אינם ידועים במדויק

נגדיר $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^5)$ על ידי

$$T(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = (-3z_5, z_1 + 6z_5, z_2, z_3, z_4).$$

המטריצה של T היא זו המוצגת בדוגמה 5.26, שם הראינו כי הפולינום המינימלי של T הוא $z^5 - 6z + 3$.

כפי שצוין בדוגמה 5.28, אין דרך לבטא במדויק אף אחד משורשי הפולינום, אך שיטות של אנליזה נומרית מראות לנו כי שורשי הפולינום הם המספרים הבאים בקירוב $-1.67, 0.51, 1.40, -0.12 + 1.59i, -0.12 - 1.59i$.

התוכנה שהפיקה קירובים אלו מדייקת מעבר לשלוש ספרות עשרוניות. לפיכך קירובים אלו טובים דיים להראות כי חמשת המספרים הללו שונים. הפולינום המינימלי של T שווה לפולינום מתוקן ממעלה חמישית עם שורשים אלו. כעת 5.62 מראה כי T לכסין.

5.61 דוגמה: הצגת מקרה שבו אופרטור אינו לכסין

נגדיר $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$ על ידי

$$T(z_1, z_2, z_3) = (6z_1 + 3z_2 + 4z_3, 6z_2 + 2z_3, 7z_3).$$

המטריצה של T ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^3$ היא

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

מטריצה זו היא מטריצה משולשית עליונה אך אינה מטריצה אלכסונית. האם ל- T יש מטריצה אלכסונית ביחס לבסיס אחר כלשהו של $\mathbb{F}^3$?

כדי לענות על שאלה זו, נמצא את הפולינום המינימלי של T . ראשית נשים לב כי הערכים העצמיים של T הם איברי אלכסון המטריצה (לפי 5.41). לפיכך שורשי הפולינום המינימלי של T הם 6, 7 (לפי 5.27 א). אלכסון מטריצה זו מורה לנו כי $(T - 6I)^2(T - 7I) = 0$ (לפי 5.40). מעלת הפולינום המינימלי של T היא לכל היותר 3 (לפי 5.22). בחיבור כל הנתונים הללו נקבל כי הפולינום המינימלי של T הוא או $(z - 6)^2(z - 7)$ או $(z - 6)(z - 7)$.

חישוב פשוט מראה כי $(T - 6I)(T - 7I) \neq 0$. לפיכך הפולינום המינימלי של T הוא $(z - 6)^2(z - 7)$.

כעת 5.62 מראה כי T אינו לכסין.

נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי T לכסין אם ורק אם הפולינום המינימלי של T שווה ל- $(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$ עבור רשימת מספרים שונים $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$.

הוכחה ראשית נניח כי T לכסין. לפיכך קיים בסיס $v_1, \dots, v_n$ של V המורכב מהווקטורים העצמיים של T . יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ הערכים העצמיים השונים של T . אזי לכל v_j , קיים λ_k שעבורו $(T - \lambda_k I)v_j = 0$. לפיכך

$$(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_m I)v_j = 0,$$

מכאן נובע כי הפולינום המינימלי של T שווה ל- $(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$.

להוכחת הגרירה בכיוון ההפוך, נניח כעת כי הפולינום המינימלי של T שווה ל- $(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$ עבור רשימת מספרים שונים $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$. לפיכך

$$(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_m I) = 0. \quad 5.63$$

נוכיח כי T לכסין באינדוקציה על m . נבדוק תחילה עבור $m = 1$. נקבל $T - \lambda_1 I = 0$, משמעות הדבר היא ש- T כפולת סקלר של אופרטור הזהות, ומכאן ש- T לכסין.

כעת נניח ש- $m > 1$ והתוצאה הרצויה מתקיימת לכל ערך הקטן מ- m . התת-מרחב $\text{range}(T - \lambda_m I)$ שמור תחת T [זהו מקרה פרטי של 5.18 עבור $p(z) = z - \lambda_m$]. לפיכך T מצומצם ל- $\text{range}(T - \lambda_m I)$ הוא אופרטור מעל $\text{range}(T - \lambda_m I)$.

אם $u \in \text{range}(T - \lambda_m I)$, אזי $u = (T - \lambda_m I)v$ עבור $v \in V$ כלשהו, ומ-5.63 נובע

$$(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_{m-1} I)u = (T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_m I)v = 0. \quad 5.64$$

לכן $(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_{m-1})$ הוא כפולת פולינום של הפולינום המינימלי של T המצומצם ל- $\text{range}(T - \lambda_m I)$ [לפי 5.29]. לפיכך, לפי הנחת האינדוקציה, קיים בסיס של $\text{range}(T - \lambda_m I)$ המורכב מהווקטורים העצמיים של T .

נניח ש- $u \in \text{range}(T - \lambda_m I) \cap \text{null}(T - \lambda_m I)$. אזי $Tu = \lambda_m u$. בנוסף מ-5.64 נובע

$$\begin{aligned} 0 &= (T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_{m-1} I)u \\ &= (\lambda_m - \lambda_1) \cdots (\lambda_m - \lambda_{m-1})u. \end{aligned}$$

מאחר ש- $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ערכים עצמיים שונים, מהמשוואה לעיל נובע כי $u = 0$. לכן $\text{range}(T - \lambda_m I) \cap \text{null}(T - \lambda_m I) = \{0\}$.

לפיכך $\text{range}(T - \lambda_m I) + \text{null}(T - \lambda_m I)$ הוא סכום ישר (לפי 1.46) שממדו $\dim V$ (לפי 3.94 ו-3.21). לכן $\text{range}(T - \lambda_m I) \oplus \text{null}(T - \lambda_m I) = V$. כל וקטור השונה מאפס ב- $\text{null}(T - \lambda_m I)$ הוא וקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ_m . קודם לכן בהוכחה זו ראינו שקיים בסיס של $\text{range}(T - \lambda_m I)$ המורכב מהווקטורים העצמיים של T . צירוף בסיס זה לבסיס של $\text{null}(T - \lambda_m I)$ ייתן בסיס של V המורכב מהווקטורים העצמיים של T . המטריצה של T ביחס לבסיס זה היא מטריצה אלכסונית, כפי שרצינו. ■

לא קיימת נוסחת שורשים לפולינומים ממעלה 5 או יותר. בכל זאת, נוכל להשתמש במסקנה הקודמת כדי לקבוע האם אופרטור מעל מרחב וקטורי מרוכב לכסין, זאת אפילו מבלי למצוא קירובים לשורשי הפולינום המינימלי—ראו תרגיל 15.

המסקנה הבאה תשמש ככלי מרכזי להוכחת מסקנה הנוגעת ללכסון שני אופרטורים בו זמנית; ראו 5.76. שימו לב כיצד השימוש באפיון של אופרטורים לכסינים במונחים של פולינום מינימלי (ראו 5.62) מוביל להוכחה קצרה של המסקנה הבאה.

5.65 צמצום אופרטור לכסין לתת-מרחב שמור

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ לכסין ו- U תת-מרחב של V השמור תחת T . אזי $T|_U$ אופרטור לכסין מעל U .

הוכחה מאחר ש- T לכסין, הפולינום המינימלי של T שווה ל- $(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$ עבור רשימה של מספרים שונים כלשהם $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F}$ (לפי 5.62). הפולינום המינימלי של T הוא כפולת פולינום של הפולינום המינימלי של $T|_U$ (לפי 5.31). לכן הפולינום המינימלי של $T|_U$ הוא מהצורה הנדרשת על ידי 5.62, מה שמראה כי $T|_U$ לכסין. ■

משפט עיגולי גרשגורן

5.66 הגדרה: עיגולי גרשגורן

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V . נסמן ב- A את המטריצה של T ביחס לבסיס זה. עיגולי גרשגורן של T ביחס לבסיס $v_1, \dots, v_n$ הם הקבוצות מהצורה

$$\left\{ z \in \mathbb{F} : |z - A_{j,j}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |A_{j,k}| \right\},$$

כאשר $j \in \{1, \dots, n\}$.

מאחר שישנן n אפשרויות עבור j בהגדרה לעיל, ל- T יש n עיגולי גרשגורן. אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, אזי לכל $j \in \{1, \dots, n\}$, עיגול גרשגורן המתאים הוא עיגול סגור ב- $\mathbb{C}$ שמרכזו $A_{j,j}$, שהוא האיבר ה- j^{th} באלכסון של A . הרדיוס של עיגול סגור זה הוא סכום הערכים המוחלטים של איברי שורה j של A , מלבד איבר האלכסון. אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, אזי עיגולי גרשגורן הם קטעים סגורים ב- $\mathbb{R}$.

במקרה המיוחד שבו המטריצה הריבועית לעיל A היא מטריצה אלכסונית, כל עיגול גרשגורן הוא נקודה יחידה שהיא איבר אלכסון של A (וכל ערך עצמי של T הוא אחת מהנקודות הללו, כפי שנדרש במסקנה הבאה). אחת התוצאות מהמסקנה הבאה היא שאם האיברים שאינם איברי אלכסון של A קטנים, אזי כל ערך עצמי של T קרוב לאיבר אלכסון כלשהו של A .

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V . אזי כל ערך עצמי של T מוכל בעיגול גרשגורן כלשהו של T ביחס לבסיס $v_1, \dots, v_n$.

הוכחה נניח ש- $\lambda \in F$ ערך עצמי של T . יהי $w \in V$ וקטור עצמי השייך ל- λ . קיימים $c_1, \dots, c_n \in F$ כך ש-

$$5.68 \quad w = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n.$$

נסמן ב- A את המטריצה של T ביחס לבסיס $v_1, \dots, v_n$. הפעלת T על שני אגפי המשוואה נותנת

$$\begin{aligned} 5.69 \quad \lambda w &= \sum_{k=1}^n c_k T v_k \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \sum_{j=1}^n A_{j,k} v_j \\ 5.70 \quad &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n A_{j,k} c_k \right) v_j. \end{aligned}$$

יהי $j \in \{1, \dots, n\}$ כך ש-

$$|c_j| = \max\{|c_1|, \dots, |c_n|\}.$$

לפי 5.68, אנו רואים שהמקדם של v_j באגף השמאלי של 5.69 שווה ל- λc_j , שהוא חייב להיות שווה למקדם של v_j באגף הימני של 5.70. במילים אחרות,

$$\lambda c_j = \sum_{k=1}^n A_{j,k} c_k.$$

נחסיר $A_{j,j} c_j$ משני אגפי המשוואה לעיל ואז נחלק את שני אגפי המשוואה ב- c_j ונקבל

$$\begin{aligned} |\lambda - A_{j,j}| &= \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n A_{j,k} \frac{c_k}{c_j} \right| \\ &\leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |A_{j,k}|. \end{aligned}$$

לפיכך λ נמצא בעיגול גרשגורן ה- j^{th} ביחס לבסיס $v_1, \dots, v_n$.

משפט עיגולי גרשגורן קרוי על שמו של סמיון ארנובין' גרשגורן, שפרסם מסקנה זו בשנת 1931.

בתרגיל 22 ישנו יישום נחמד של משפט עיגולי גרשגורן.

תרגיל 23 קובע כי ניתן לשנות את הגדרת הרדיוס של כל עיגול גרשגורן כך שיהיה סכום הערכים המוחלטים של איברי העמודה המתאימה (במקום איברי השורה), מלבד איבר האלכסון, והמשפט לעיל עדיין מתקיים.

תרגילים 4ה

- 1 נניח ש- V מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$.
 - א. הוכיחו שאם $T^4 = I$, אזי T לכסין.
 - ב. הוכיחו שאם $T^4 = T$, אזי T לכסין.
 - ג. הביאו דוגמה לאופרטור $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ כך ש- $T^4 = T^2$ ו- T אינו לכסין.
- 2 נניח שיש ל- $T \in \mathcal{L}(V)$ מטריצה אלכסונית A ביחס לבסיס כלשהו של V . הוכיחו שאם $\lambda \in \mathbb{F}$, אזי λ מופיע באלכסון של A בדיוק $\dim E(\lambda, T)$ פעמים.
- 3 נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו שאם האופרטור T לכסין, אזי $V = \text{null } T \oplus \text{range } T$.
- 4 נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים.
 - א. $V = \text{null } T \oplus \text{range } T$
 - ב. $V = \text{null } T + \text{range } T$
 - ג. $\text{null } T \cap \text{range } T = \{0\}$
- 5 נניח ש- V מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו ש- T לכסין אם ורק אם

$$V = \text{null}(T - \lambda I) \oplus \text{range}(T - \lambda I)$$
 לכל $\lambda \in \mathbb{C}$.
- 6 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^5)$ ו- $\dim E(8, T) = 4$. הוכיחו ש- $T - 2I$ או $T - 6I$ הפיך.
- 7 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ הפיך. הוכיחו ש-

$$E(\lambda, T) = E\left(\frac{1}{\lambda}, T^{-1}\right)$$
 לכל $\lambda \in \mathbb{F}$ עם $\lambda \neq 0$.
- 8 נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. נסמן ב- $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ את הערכים העצמיים השונים שאינם אפס של T . הוכיחו ש-

$$\dim E(\lambda_1, T) + \dots + \dim E(\lambda_m, T) \leq \dim \text{range } T.$$
- 9 נניח ש- $R, T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$ שלכל אחד מהם 2, 6, 7 הם ערכים עצמיים. הוכיחו שקיים אופרטור הפיך $S \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$ כך ש- $R = S^{-1}TS$.
- 10 מצאו $R, T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$ כך שלכל אחד מ- R ו- T המספרים 2, 6, 7 הם ערכים עצמיים, אין ל- R ול- T ערכים עצמיים נוספים, ולא קיים אופרטור הפיך $S \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$ כך ש- $R = S^{-1}TS$.

11 מצאו $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ כך ש-6 ו-7 ערכים עצמיים של T וכך שאין ל- T מטריצה אלכסונית ביחס לאף בסיס של $\mathbb{C}^3$.

12 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ כך ש-6 ו-7 ערכים עצמיים של T . בנוסף, נניח שאין ל- T מטריצה אלכסונית ביחס לאף בסיס של $\mathbb{C}^3$. הוכיחו שקיים $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ כך ש-

$$T(z_1, z_2, z_3) = (6 + 8z_1, 7 + 8z_2, 13 + 8z_3).$$

13 נניח ש- A מטריצה אלכסונית עם איברים שונים באלכסון ו- B מטריצה בגודל זהה ל- A . הראו ש- $AB = BA$ אם ורק אם B מטריצה אלכסונית.

14 א. הביאו דוגמה למרחב וקטורי מרוכב מממד סופי ואופרטור T מעל אותו מרחב וקטורי כך ש- T^2 לכסין אבל T אינו לכסין.

ב. נניח ש- $F = \mathbb{C}$, k מספר שלם חיובי, ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ הפיך. הוכיחו ש- T^k לכסין אם ורק אם T לכסין.

15 נניח ש- V מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V)$, ו- p הפולינום המינימלי של T . הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים.

א. T לכסין.

ב. לא קיים $\lambda \in \mathbb{C}$ כך ש- p הוא כפולת פולינום של $(z - \lambda)^2$.

ג. ל- p ולנגזרתו p' אין שורשים משותפים.

ד. המחלק המשותף המרבי של p ו- p' הוא הפולינום הקבוע 1.

המחלק המשותף המרבי של p ו- p' הוא הפולינוס המתוקן q מהפעלה הגבוהה ביותר כך ש- p ו- p' שניהם כפולת פולינום של q . בעזרת האלגוריתם האוקלידי לפולינומים (חפשו מידע לגביו) נוכל למצוא בזריזות את המחלק המשותף המרבי של שני פולינומים, ללא צורך במידע על שורשי הפולינומים. לפיכך השקילות בין (א) ו-(ד) לעיל מלמדת אותנו כי נוכל לקבוע האם T לכסין בלי שיהיה בידינו מידע הנוגע לשורשיו של p .

16 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ לכסין. יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ הערכים העצמיים השונים של T . הוכיחו שתת-מרחב U של V שמור תחת T אם ורק אם קיימים תתי-מרחב $U_1, \dots, U_m$ של V כך ש- $U_k \subseteq E(\lambda_k, T)$ לכל k ו- $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$.

17 נניח ש- V מממד סופי. הוכיחו שיש ל- $\mathcal{L}(V)$ בסיס המורכב מאופרטורים לכסינים.

18 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ לכסין ו- U תת-מרחב של V השמור תחת T . הוכיחו שאופרטור המנה T/U אופרטור לכסין מעל V/U .
אופרטור הפנה T/U הוגדר בתרגיל 38 ביחידה ה-4.

19 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם $T \in \mathcal{L}(V)$ וקיים תת-מרחב U של V השמור תחת T כך ש- $T|_U = T/U$ ו- T/U שניהם לכסינים, אזי T לכסין.
ראו תרגיל 13 ביחידה 3 לקביעה דומה עבור מטריצות משולשיות עליונות.

20 נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו ש- T לכסין אם-ורק אם האופרטור הדואלי T' לכסין.

21 סדרת פיבונאצ'י $F_0, F_1, F_2, \dots$ מוגדרת על ידי

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad \text{עבור } n \geq 2.$$

הגדירו $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ על ידי $T(x, y) = (y, x + y)$.

א. הראו ש- $T^n(0, 1) = (F_n, F_{n+1})$ לכל מספר שלם אי-שלילי n .

ב. מצאו את הערכים העצמיים של T .

ג. מצאו בסיס של $\mathbb{R}^2$ המורכב מווקטורים עצמיים של T .

ד. השתמשו בפתרון (ג) לחישוב $T^n(0, 1)$. הגיעו למסקנה כי

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

לכל מספר שלם אי-שלילי n .

ה. השתמשו ב- (ד) כדי להסיק שאם n מספר שלם אי-שלילי, אזי מספר פיבונאצ'י F_n הוא המספר השלם הקרוב ביותר ל-

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

כל F_n הוא מספר שלם אי-שלילי, למרות שהאגף הימני של הנוסחה ב- (ד) אינו נראה כמו מספר שלם. המספר

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

נקרא **יחס הזהב**.

22 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- A מטריצה $n \times n$ שהיא המטריצה של T ביחס לבסיס כלשהו של V . הוכיחו שאם

$$|A_{j,j}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |A_{j,k}|$$

לכל $j \in \{1, \dots, n\}$, אזי T הפיך.

תרגיל זה קובע שאם איברי אלכסון המטריצה של T גדולים ביחס לאיברים שאינם באלכסון, אזי T הפיך.

23 נניח שאנו משנים את הגדרת עיגולי גרשגורן כך שהרדיוס של העיגול ה- k^{th} הוא סכום הערכים המוחלטים של איברי העמודה (במקום איברי השורה) k של A , מלבד איבר האלכסון. הראו שלמרות שינוי זה משפט עיגולי גרשגורן (5.67) עדיין מתקיים.

5ה אופרטורים מתחלפים

5.71 הגדרה: חילוף

- שני אופרטורים S ו- T מעל אותו מרחב וקטורי מתחלפים אם $ST = TS$.
- שתי מטריצות ריבועיות A ו- B מאותו הגודל מתחלפות אם $AB = BA$.

לדוגמה, אם I אופרטור הזהות מעל V ו- $\lambda \in F$, אזי λI מתחלף עם כל אופרטור מעל V .

כדוגמה נוספת, אם T אופרטור אזי T^2 ו- T^3 מתחלפים. בהכללה רחבה יותר, אם $p, q \in \mathcal{P}(F)$, אזי $p(T)$ ו- $q(T)$ מתחלפים [ראו 5.17(ב)].

5.72 דוגמה: אופרטורי נגזרת חלקית מתחלפים

נניח ש- m מספר שלם אי-שלילי. נסמן ב- $\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ את המרחב הווקטורי המרוכב של פולינומים (עם מקדמים ב- $\mathbb{C}$) בשני משתנים שמעלתם m לכל היותר, יחד עם הפעולות הרגילות של חיבור וכפל בסקלר של פונקציות מרוכבות. לפיכך, האיברים ב- $\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ הם פונקציות p מ- $\mathbb{C}^2$ אל $\mathbb{C}$ מהצורה

$$p(w, z) = \sum_{j+k \leq m} a_{j,k} w^j z^k, \quad \text{כאשר האינדקסים } j \text{ ו- } k \text{ מקבלים את כל הערכים השלמים האי-שליליים כך ש- } j+k \leq m.$$

כל $a_{j,k}$ הוא ב- $\mathbb{C}$, ו- $w^j z^k$ מסמנת את הפונקציה מעל $\mathbb{C}^2$ המוגדרת על ידי $(w, z) \mapsto w^j z^k$.

נגדיר אופרטורים $D_w, D_z \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}))$ באופן הבא

$$D_w p = \frac{\partial p}{\partial w} = \sum_{j+k \leq m} j a_{j,k} w^{j-1} z^k \quad \text{וגם} \quad D_z p = \frac{\partial p}{\partial z} = \sum_{j+k \leq m} k a_{j,k} w^j z^{k-1},$$

כאשר p הוא כמוגדר ב-5.73. האופרטורים D_w ו- D_z נקראים אופרטורי נגזרת חלקית מאחר שכל אחד מהאופרטורים הללו גוזר ביחס לאחד המשתנים תוך התייחסות למשתנה השני כקבוע.

האופרטורים D_w ו- D_z מתחלפים שכן אם p הוא כמוגדר ב-5.73, אזי

$$(D_w D_z) p = \sum_{j+k \leq m} j k a_{j,k} w^{j-1} z^{k-1} = (D_z D_w) p.$$

המשוואה $D_w D_z = D_z D_w$ מעל $\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ ממחישה מסקנה כללית יותר שסדר הפעולות בגזירה חלקית אינו משפיע על התוצאה עבור פונקציות נאותות.

מטריצות מתחלפות הן תופעה חריגה. להמחשה, ישנם 214,358,881 זוגות סדורים של מטריצות 2×2 שכל איבריהן מספרים שלמים בקטע $[-5, 5]$. רק כ-0.3% מהזוגות הסדורים של המטריצות הללו מתחלפים.

כל 214,358,881 (מספר השווה ל- 11^8) הזוגות הסדורים של המטריצות 2×2 בטווח האמור נבדקו באמצעות מחשב והתוצאה הראתה כי רק 674,609 מהזוגות הסדורים הללו מתחלפים.

המסקנה הבאה מראה ששני אופרטורים מתחלפים אם-ורק-אם המטריצות שלהם (ביחס לאותו הבסיס) מתחלפות.

5.74 אופרטורים מתחלפים מותאמים למטריצות מתחלפות

נניח ש- $S, T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V . אזי S ו- T מתחלפים אם-ורק-אם $\mathcal{M}(S, (v_1, \dots, v_n))$ ו- $\mathcal{M}(T, (v_1, \dots, v_n))$ מתחלפות.

הוכחה מתקיים

$$\begin{aligned} ST = TS &\iff S \text{ ו-} T \text{ מתחלפים} \\ \mathcal{M}(ST) = \mathcal{M}(TS) &\iff \\ \mathcal{M}(S)\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(S) &\iff \\ \mathcal{M}(T) \text{ ו-} \mathcal{M}(S) \text{ מתחלפות,} &\iff \end{aligned}$$

כפי שרצינו.

המסקנה הבאה מראה שאם שני אופרטורים מתחלפים, אזי כל מרחב עצמי של אופרטור אחד שמור תחת האופרטור השני. מסקנה זו, שבה נשתמש מספר פעמים, היא אחת הסיבות המרכזיות לכך שזוג אופרטורים מתחלפים נוח יותר לעבודה מאשר זוג אופרטורים שאינו מתחלף.

5.75 מרחב עצמי שמור תחת אופרטור מתחלף

נניח ש- $S, T \in \mathcal{L}(V)$ מתחלפים ו- $\lambda \in \mathbb{F}$. אזי $E(\lambda, S)$ שמור תחת T .

הוכחה נניח ש- $v \in E(\lambda, S)$. אזי

$$S(Tv) = (ST)v = (TS)v = T(Sv) = T(\lambda v) = \lambda Tv.$$

המשוואה לעיל מראה ש- $Tv \in E(\lambda, S)$. לפיכך $E(\lambda, S)$ שמור תחת T .

נניח שישנם שני אופרטורים, שכל אחד מהם לכסי. אם ברצוננו לבצע חישובים המערבים את שני האופרטורים (לדוגמה, חישוב המערב את סכומם), אזי נרצה ששני האופרטורים יהיו לכסינים ביחס לאותו הבסיס, מה שלפי המסקנה הבאה אפשרי כאשר שני האופרטורים מתחלפים.

5.76 לכסיונות בו-זמנית $\iff$ קומוטטיביות

לשני אופרטורים לכסינים מעל אותו מרחב וקטורי יש מטריצות אלכסוניות ביחס לאותו בסיס אם-ורק-אם שני האופרטורים מתחלפים.

הוכחה ראשית נניח כי ל- $S, T \in \mathcal{L}(V)$ יש מטריצות אלכסוניות ביחס לאותו בסיס. מכפלת שתי מטריצות אלכסוניות באותו הגודל היא מטריצה אלכסונית הנוצרת כתוצאה מהכפלת איברי האלכסונים של המטריצות בהתאמה. לפיכך כל שתי מטריצות אלכסוניות מאותו הגודל מתחלפות. לפיכך S ו- T מתחלפים, לפי 5.74.

להוכחה בכיוון השני, נניח כעת ש- $S, T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטורים לכסינים מתחלפים. נסמן ב- $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ את הערכים העצמיים השונים של S . מאחר ש- S לכסין, (5.55 ג) מראה ש-

$$V = E(\lambda_1, S) \oplus \dots \oplus E(\lambda_m, S).$$

לכל $k = 1, \dots, m$, התת-מרחב $E(\lambda_k, S)$ שמור תחת T (לפי (5.75)). מאחר ש- T לכסין, (5.65) גורר ש- $T|_{E(\lambda_k, S)}$ לכסין לכל k . לכן לכל $k = 1, \dots, m$, קיים בסיס של $E(\lambda_k, S)$ המורכב מהווקטורים העצמיים של T . איסוף כל הבסיסים הללו ייתן לנו בסיס של V (לפי (5.77)), כאשר כל וקטור בבסיס זה הוא וקטור עצמי של שני האופרטורים S ו- T . לפיכך ל- S ו- T יש מטריצות אלכסוניות ביחס לבסיס זה, כפי שרצינו. ■

ראו תרגיל 2 להרחבת מסקנה זו מעבר לשני אופרטורים.

נניח ש- V מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי השונה מאפס. אזי לכל אופרטור מעל V יש וקטור עצמי (ראו (5.19)). המסקנה הבאה מראה כי אם שני אופרטורים מעל V מתחלפים, אזי קיים וקטור ב- V שהוא וקטור עצמי המשותף לשני האופרטורים (אך ייתכן כי לשני האופרטורים המתחלפים לא יהיה ערך עצמי משותף). להרחבת המסקנה הבאה מעבר לשני אופרטורים, ראו תרגיל 9 (א).

5.78 וקטור עצמי משותף לאופרטורים מתחלפים

לכל זוג אופרטורים מתחלפים מעל מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי השונה מאפס יש וקטור עצמי משותף.

הוכחה נניח ש- V מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי השונה מאפס ו- $S, T \in \mathcal{L}(V)$ מתחלפים. יהי λ ערך עצמי של S (לפי (5.19) ל- S בהחלט יש ערך עצמי). לפיכך $E(\lambda, S) \neq \{0\}$. בנוסף, $E(\lambda, S)$ שמור תחת T (לפי (5.75)). לפיכך, ל- $T|_{E(\lambda, S)}$ יש וקטור עצמי (שימוש נוסף ב- (5.19)), שהוא וקטור עצמי של שני האופרטורים S ו- T , ובכך השלמנו את ההוכחה. ■

5.79 דוגמה: וקטור עצמי משותף לאופרטורי נגזרת חלקית

יהי $\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ כבדוגמה (5.72) ויהיו $D_w, D_z \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}))$ האופרטורים של נגזרות חלקיות המתחלפים בדוגמה ההיא. כפי שתוכלו לוודא, 0 הוא הערך העצמי היחיד של כל אחד מהאופרטורים הללו. בנוסף

$$E(0, D_w) = \left\{ \sum_{k=0}^m a_k z^k : a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C} \right\},$$

$$E(0, D_z) = \left\{ \sum_{j=0}^m c_j w^j : c_0, \dots, c_m \in \mathbb{C} \right\}.$$

החיתוך של שני מרחבים עצמיים אלו הוא קבוצת הווקטורים העצמיים המשותפים לשני האופרטורים. מאחר ש- $E(0, D_w) \cap E(0, D_z)$ הוא קבוצת הפונקציות הקבועות, אנו רואים כי ל- D_w ו- D_z יש אכן וקטור עצמי משותף, כמובטח על ידי (5.78).

המסקנה הבאה מרחיבה את 5.47 (קיום בסיס היוצר מטריצה משולשית עליונה) לשני אופרטורים מתחלפים.

5.80 לאופרטורים מתחלפים יש מטריצות משולשיות עליונות ב־זמנית

נניח ש־ V מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי ו־ S, T אופרטורים מתחלפים מעל V . אזי קיים בסיס של V אשר ביחס אליו לשני האופרטורים S ו־ T יש מטריצות משולשיות עליונות.

הוכחה יהי $n = \dim V$. נוכיח באמצעות אינדוקציה על n . אם $n = 1$ התוצאה הרצויה מתקיימת, שכן כל המטריצות 1×1 משולשיות עליונות. כעת נניח ש־ $n > 1$ והתוצאה הרצויה מתקיימת עבור כל המרחבים הווקטוריים המרוכבים מממד $n - 1$.

יהי v_1 וקטור עצמי כלשהו המשותף ל־ S ו־ T (לפי 5.78). לכן $sv_1 \in \text{span}(v_1)$ ו־ $tv_1 \in \text{span}(v_1)$. יהי W תת־מרחב של V כך ש־

$$V = \text{span}(v_1) \oplus W;$$

ראו 2.33 לקיומו של W . נגדיר העתקה ליניארית $P: V \rightarrow W$ על ידי

$$P(av_1 + w) = w$$

לכל $a \in \mathbb{C}$ ולכל $w \in W$. נגדיר $\hat{S}, \hat{T} \in \mathcal{L}(W)$ על ידי

$$\hat{S}w = P(Sw) \quad \text{וגם} \quad \hat{T}w = P(Tw)$$

לכל $w \in W$. להחלת הנחת האינדוקציה שלנו על $\hat{S}$ ו־ $\hat{T}$, עלינו להראות תחילה כי שני אופרטורים אלו מעל W מתחלפים. לצורך כך, נניח ש־ $w \in W$. אזי קיים $a \in \mathbb{C}$ כך ש־

$$(\hat{S}\hat{T})w = \hat{S}(P(Tw)) = \hat{S}(Tw - av_1) = P(S(Tw - av_1)) = P((ST)w),$$

כאשר השוויון האחרון מתקיים מאחר ש־ v_1 הוא וקטור עצמי של S ו־ $Pv_1 = 0$. באופן דומה,

$$(\hat{T}\hat{S})w = P((TS)w).$$

מאחר שהאופרטורים S ו־ T מתחלפים, משתי המשוואות האחרונות אנו רואים כי $(\hat{S}\hat{T})w = (\hat{T}\hat{S})w$. לכן $\hat{S}$ ו־ $\hat{T}$ מתחלפים.

לפיכך אנו יכולים להשתמש בהנחת האינדוקציה כדי לקבוע כי קיים בסיס $v_2, \dots, v_n$ של W כך שיש ל־ $\hat{S}$ ו־ $\hat{T}$ מטריצות משולשיות עליונות ביחס לבסיס זה. הרשימה $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V .

אם $k \in \{2, \dots, n\}$, אזי קיימים $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ כך ש־

$$Sv_k = a_kv_1 + \hat{S}v_k \quad \text{וגם} \quad Tv_k = b_kv_1 + \hat{T}v_k.$$

מאחר שיש ל־ $\hat{S}$ ו־ $\hat{T}$ מטריצות משולשיות עליונות ביחס לבסיס $v_2, \dots, v_n$, אנו יודעים כי $\hat{S}v_k \in \text{span}(v_2, \dots, v_k)$ ו־ $\hat{T}v_k \in \text{span}(v_2, \dots, v_k)$. לכן מהמשוואות לעיל נובע כי

$$Sv_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_k) \quad \text{וגם} \quad Tv_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_k).$$

לפיכך יש ל־ S ו־ T מטריצות משולשיות עליונות ביחס ל־ $v_1, \dots, v_n$, כפי שרצינו. ■

תרגיל 9(ב) מרחיב מסקנה זו מעבר לשני אופרטורים.

באופן כללי, לא ניתן לקבוע את הערכים העצמיים של סכום או מכפלת שני אופרטורים באמצעות הערכים העצמיים של שני האופרטורים. בכל זאת, המסקנה להלן מראה שקורה משהו נחמד כאשר שני אופרטורים מתחלפים.

5.81 ערכים עצמיים של סכום ומכפלת אופרטורים מתחלפים

נניח ש- V מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי ו- S, T אופרטורים מתחלפים מעל V . אזי

- כל ערך עצמי של $S + T$ הוא ערך עצמי של S ועוד ערך עצמי של T ,
- כל ערך עצמי של ST הוא ערך עצמי של S כפול ערך עצמי של T .

הוכחה קיים בסיס של V אשר ביחס אליו לשני האופרטורים S ו- T יש מטריצות משולשיות עליונות (לפי 5.80). ביחס לבסיס זה,

$$M(ST) = M(S)M(T), \quad \text{וגם} \quad M(S + T) = M(S) + M(T)$$

כפי שנקבע ב- 3.35 ו- 3.43.

מהגדרת פעולת החיבור בין מטריצות אנו רואים שכל איבר באלכסון $M(S + T)$ שווה לסכום האיברים המתאימים באלכסוני $M(S)$ ו- $M(T)$. באופן דומה, מאחר ש- $M(S)$ ו- $M(T)$ מטריצות משולשיות עליונות, מהגדרת פעולת כפל מטריצות אנו רואים שכל איבר באלכסון $M(ST)$ שווה למכפלת האיברים המתאימים באלכסוני $M(S)$ ו- $M(T)$. יתר על כן, $M(S + T)$ ו- $M(ST)$ מטריצות משולשיות עליונות (ראו תרגיל 2 ביחידה 3).

כל איבר באלכסונה של $M(S)$ הוא ערך עצמי של S , וכל איבר באלכסונה של $M(T)$ הוא ערך עצמי של T (לפי 5.41). כל ערך עצמי של $S + T$ הוא על האלכסון של $M(S + T)$, וכל ערך עצמי של ST הוא על האלכסון של $M(ST)$ (קביעות אלו נובעות מ- 5.41). מחיבור כל הנתונים הללו, אנו מסיקים כי כל ערך עצמי של $S + T$ הוא ערך עצמי של S ועוד ערך עצמי של T , וכל ערך עצמי של ST הוא ערך עצמי של S כפול ערך עצמי של T .

תרגילים 5ה

1 הביאו דוגמה של שני אופרטורים מתחלפים S, T מעל F^4 כך שקיים תת-מרחב של F^4 השמור תחת S אבל לא תחת T וקיים תת-מרחב של F^4 השמור תחת T אבל לא תחת S .

2 נניח ש- $\mathcal{E}$ תת-קבוצה של $\mathcal{L}(V)$ וכל איבר של $\mathcal{E}$ לכסיני. הוכיחו שקיים בסיס של V אשר ביחס אליו לכל איבר של $\mathcal{E}$ יש מטריצה אלכסונית אס-ורק-אם כל זוג איברים של $\mathcal{E}$ מתחלף.

תרגיל זה מרחיב את 5.76, העוסק במקרה שבו $\mathcal{E}$ מכיל רק שני איברים. לצורך תרגיל זה, $\mathcal{E}$ עשוי להכיל כל מספר של איברים, וייתכן אף ש- $\mathcal{E}$ קבוצה אינסופית.

3 נניח ש- $S, T \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $ST = TS$. נניח ש- $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$.

א. הוכיחו ש- $\text{null } p(S)$ שמור תחת T .

ב. הוכיחו ש- $\text{range } p(S)$ שמור תחת T .

ראו 5.18 למקרה המיוחד $S = T$.

4 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם A מטריצה אלכסונית ו- B מטריצה משולשית עליונה באותו הגודל כשל A , אזי A ו- B מתחלפות.

5 הוכיחו שזוג אופרטורים מעל מרחב וקטורי מממד סופי מתחלף אם-ורק אם האופרטורים הדואליים שלהם מתחלפים.

ראו 3.118 להגדרת אופרטור דואלי.

6 נניח ש- V מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי השונה מאפס ו- $S, T \in \mathcal{L}(V)$ מתחלפים. הוכיחו שקיימים $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ כך ש-

$$\text{range}(S - \alpha I) + \text{range}(T - \lambda I) \neq V.$$

7 נניח ש- V מרחב וקטורי מרוכב, $S \in \mathcal{L}(V)$ לכסין, ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ מתחלף עם S . הוכיחו שקיים בסיס של V כך שיש ל- S מטריצה אלכסונית ביחס לבסיס זה ויש ל- T מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס זה.

8 נניח ש- $m = 3$ בדוגמה 5.72 ו- D_w, D_z אופרטורי הנגזרת החלקית המתחלפים מעל $\mathcal{P}_3(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ מאותה הדוגמה. מצאו בסיס של $\mathcal{P}_3(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ אשר ביחס אליו יש לכל אחד מ- D_w ו- D_z מטריצה משולשית עליונה.

9 נניח ש- V מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי השונה מאפס. נניח ש- $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{L}(V)$ כך ש- S ו- T מתחלפים לכל $S, T \in \mathcal{E}$.

א. הוכיחו שיש וקטור ב- V שהוא וקטור עצמי של כל איבר ב- $\mathcal{E}$.

ב. הוכיחו שקיים בסיס של V אשר ביחס אליו לכל איבר ב- $\mathcal{E}$ יש מטריצה משולשית עליונה.

תרגיל זה מרחיב את 5.78 ו- 5.80, העוסקים במקרה שבו $\mathcal{E}$ מכיל רק שני איברים. לצורך תרגיל זה, $\mathcal{E}$ עשוי להכיל כל מספר של איברים, וייתכן אף ש- $\mathcal{E}$ קבוצה אינסופית.

10 הביאו דוגמה של שני אופרטורים מתחלפים S, T מעל מרחב וקטורי ממשי מממד סופי כך שיש ל- $S + T$ ערך עצמי שאינו שווה לערך עצמי של S ועוד ערך עצמי של T ויש ל- ST ערך עצמי שאינו שווה לערך עצמי של S כפול ערך עצמי של T . תרגיל זה מראה כי 5.81 לא מתקיים מעל מרחב וקטורי ממשי.

פרק 1

מרחבי מכפלה פנימית

בתהליך יצירת ההגדרה של מרחב וקטורי, הכללנו את המבנה הליניארי (פעולות החיבור והכפל בסקלר) של $\mathbb{R}^2$ ו- $\mathbb{R}^3$. התעלמנו מתכונות גאומטריות דוגמת המושגים אורך וזווית. רעיונות אלו מוטמעים במושג מכפלות פנימיות, שאותו נחקור בפרק זה. כל מכפלה פנימית משרה נורמה, שעליה אפשר לחשוב כאורך. הנורמה מקיימת תכונות מפתח דוגמת משפט פיתגורס, אי-שוויון המשולש, כלל המקבילית, ואי-שוויון קושי-שוורץ.

המושג וקטורים מאונכים בגאומטריה האוקלידית מקבל שם חדש, וקטורים אורתוגונליים, בהקשר של מרחב מכפלה פנימית. אנו נראה כי בסיסים אורתונורמליים שימושיים להפליא במרחבי מכפלה פנימית. תהליך גרס-שמידט בונה בסיסים כאלו. הפרק מסתיים בשילוב כל הכלים הללו יחד לפתרון בעיות מעורר.

הנחות המוצא לפרק זה

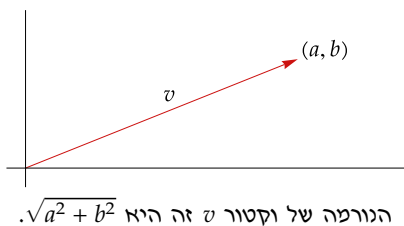
- F מסמן $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.
- V ו- W מסמנים מרחבים וקטוריים מעל F .



הספרייה על שם ג'ורג' פיבודי, כעת חלק מאוניברסיטת ג'ון הופקינס, נפתחה בזמן שג'יימס סילבסטר (1814–1897) היה הפרופסור הראשון למתמטיקה באוניברסיטה. בפרסומיו של סילבסטר מופיע השימוש הראשון במילה **מטריצה** במתמטיקה.

11 מכפלות פנימיות ונורמות

מכפלות פנימיות



כמוטיבציה למושג המכפלה הפנימית, חשבו על וקטורים ב- $\mathbf{R}^2$ ו- $\mathbf{R}^3$ כחיצים שנקודת מוצאם היא בראשית הצירים. לאורך של וקטור v ב- $\mathbf{R}^2$ או ב- $\mathbf{R}^3$ אנו קוראים הנורמה של v שאותה אנו מסמנים ב- $\|v\|$. לפיכך עבור $v = (a, b) \in \mathbf{R}^2$ נקבל

$$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

באופן דומה, אם $v = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ אזי $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. אף שאין באפשרותנו לצייר תמונות בממדים גבוהים יותר, ההכללה ל- $\mathbf{R}^n$ היא פשוטה: אנו מגדירים את הנורמה של $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ על ידי

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

הנורמה אינה ליניארית מעל $\mathbf{R}^n$. כדי להזריק ליניאריות לתוך הדיון נציג את המכפלה הסקלרית.

6.1 הגדרה: מכפלה סקלרית

עבור $x, y \in \mathbf{R}^n$, המכפלה הסקלרית של x ו- y , מסומנת על ידי $x \cdot y$, מוגדרת על ידי

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

$$\text{כאשר } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ ו- } y = (y_1, \dots, y_n).$$

אם אנו חושבים על וקטור כנקודה במקום כעל חץ, אזי הפרשנות ל- $\|x\|$ צריכה להיות המרחק בראשית הצירים אל הנקודה x .

המכפלה הסקלרית של שני וקטורים ב- $\mathbf{R}^n$ היא מספר, לא וקטור. נשים לב כי $x \cdot x = \|x\|^2$ לכל $x \in \mathbf{R}^n$. בנוסף, למכפלה הסקלרית מעל $\mathbf{R}^n$ התכונות הבאות.

- $x \cdot x \geq 0$ לכל $x \in \mathbf{R}^n$.
- $x \cdot x = 0$ אם ורק אם $x = 0$.
- עבור $y \in \mathbf{R}^n$, מקובע, ההעתקה מ- $\mathbf{R}^n$ אל $\mathbf{R}$ השולחת $x \in \mathbf{R}^n$ אל $x \cdot y$ היא ליניארית.
- $x \cdot y = y \cdot x$ לכל $x, y \in \mathbf{R}^n$.

מכפלה פנימית היא הכללה של מכפלה סקלרית. בנקודה זו ייתכן שאתם מתפתים לנחש כי מכפלה פנימית מוגדרת באמצעות הפשטה של מאפייני המכפלה הסקלרית שתיארנו בפסקה הקודמת. עבור מרחבים וקטוריים ממשיים, ניחוש זה נכון. אולם, כדי שנוכל לנסח הגדרה שתהיה שימושית עבור שני המרחבים הווקטוריים, הממשי והמרוכב, עלינו לבחון את המקרה המרוכב טרם ניגש לניסוח ההגדרה.

נזכיר כי אם $\lambda = a + bi$, כאשר $a, b \in \mathbf{R}$,

- הערך המוחלט של λ , מסומן ב- $|\lambda|$, מוגדר על ידי $|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- הצמוד המרוכב של λ , מסומן ב- $\bar{\lambda}$, מוגדר על ידי $\bar{\lambda} = a - bi$;
- $|\lambda|^2 = \lambda \bar{\lambda}$.

ראו פרק 4 עבור ההגדרות והמאפיינים הבסיסיים של ערך מוחלט וצמוד מרוכב. עבור $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$, אנו מגדירים את הנורמה של z על ידי

$$\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}.$$

הערכים המוחלטים נדרשים מאחר שאנו מעוניינים ש- $\|z\|$ יהיה מספר אי-שלילי. נשים לב כי

$$\|z\|^2 = z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_n \bar{z}_n.$$

אנו רוצים לחשוב על $\|z\|^2$ כמכפלה פנימית של z עם עצמו, בדומה למה שעשינו ב- $\mathbf{R}^n$. המשוואה לעיל מרמזת לפיכך שהמכפלה הפנימית של הווקטור $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbf{C}^n$ עם z צריכה להיות שווה ל-

$$w_1 \bar{z}_1 + \dots + w_n \bar{z}_n.$$

אם תפקידיהם של w ו- z היו מתחלפים, הביטוי לעיל היה מוחלף בצמוד המרוכב שלו. לפיכך עלינו לצפות שהמכפלה הפנימית של w עם z שווה לצמוד המרוכב של המכפלה הפנימית של z עם w . עם מוטיבציה זו, אנו מוכנים כעת לגשת ולהגדיר מכפלה פנימית מעל V , מרחב וקטורי ממשי או מרוכב.

הערה אחת בנוגע לסימון שבו אנו עושים שימוש בהגדרה הבאה:

- עבור $\lambda \in \mathbf{C}$, הסימון $\lambda \geq 0$ משמעותו ש- λ מספר ממשי ואי-שלילי.

6.2 הגדרה: מכפלה פנימית

מכפלה פנימית מעל V היא פונקציה המעתיקה כל זוג סדור (u, v) של איברים ב- V למספר $\langle u, v \rangle \in F$ ומקיימת את התכונות הבאות.

חיוביות

$$\langle v, v \rangle \geq 0 \text{ לכל } v \in V.$$

ודאות

$$\langle v, v \rangle = 0 \text{ אם ורק אם } v = 0.$$

אדיטיביות ברכיב הראשון

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \text{ לכל } u, v, w \in V.$$

הומוגניות ברכיב הראשון

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \text{ לכל } \lambda \in F \text{ ולכל } u, v \in V.$$

סימטריית צמוד (הרמיטיות)

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \text{ לכל } u, v \in V.$$

רוב המתמטיקאים מגזירים מכפלות פנימיות כמובא לעיל, אך פיזיקאים רבים משתמשים בהגדרה הדורשת הומוגניות ברכיב השני במקום הרכיב הראשון.

כל מספר ממשי שווה לצמוד המרוכב שלו. לפיכך אם u ו v עוסקים במרחב וקטורי ממשי, אזי בתנאי האחרון של הגדרת מכפלה פנימית לעיל, נוכל לוותר על הצמוד המרוכב ופשוט לקבוע ש- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ לכל $u, v \in V$.

6.3 דוגמה: מכפלות פנימיות

א. המכפלה הפנימית האוקלידית מעל F^n מוגדרת על ידי

$$\langle (w_1, \dots, w_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle = w_1 \bar{z}_1 + \dots + w_n \bar{z}_n$$

לכל $(w_1, \dots, w_n), (z_1, \dots, z_n) \in F^n$.

ב. אם $c_1, \dots, c_n$ מספרים חיוביים, אזי מכפלה פנימית יכולה להיות מוגדרת מעל F^n על ידי

$$\langle (w_1, \dots, w_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle = c_1 w_1 \bar{z}_1 + \dots + c_n w_n \bar{z}_n$$

לכל $(w_1, \dots, w_n), (z_1, \dots, z_n) \in F^n$.

ג. מכפלה פנימית יכולה להיות מוגדרת מעל המרחב הווקטורי של הפונקציות הרציפות הממשיות מעל הקטע $[-1, 1]$ על ידי

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f g$$

לכל f, g פונקציות רציפות ממשיות מעל $[-1, 1]$.

ד. מכפלה פנימית יכולה להיות מוגדרת מעל $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ על ידי

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + \int_{-1}^1 p' q'$$

לכל $p, q \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$.

ה. מכפלה פנימית יכולה להיות מוגדרת מעל $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ על ידי

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x} dx$$

לכל $p, q \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$.

6.4 הגדרה: מרחב מכפלה פנימית

מרחב מכפלה פנימית הוא מרחב וקטורי V בצירוף מכפלה פנימית מעל V .

הדוגמה החשובה ביותר למרחב מכפלה פנימית היא F^n בצירוף המכפלה הפנימית האוקלידית המובאת בסעיף (א) בדוגמה לעיל. כאשר מתייחסים ל- F^n כמרחב מכפלה פנימית, עליכם להניח כי המכפלה הפנימית היא המכפלה הפנימית האוקלידית, אלא אם כן צוין במפורש אחרת.

כדי שלא נצטרך לחזור שוב ושוב על ההנחות ש- V ו- W מרחבי מכפלה פנימית, אנו מניחים כעת את ההנחה הבאה.

6.5 סימון: V, W

עד לסוף פרק זה, ולאורכו של הפרק הבא, V ו- W מייצגים מרחבי מכפלה פנימית מעל F .

נשים לב לעיוות הלשוני הקל שביצענו. מרחב מכפלה פנימית הוא מרחב וקטורי בצירוף מכפלה פנימית מעל אותו מרחב וקטורי. כאשר אנו אומרים שמרחב וקטורי V הוא מרחב מכפלה פנימית, אנו לוקחים בחשבון שמכפלה פנימית מעל V אורבת לה בקרבת מקום או שזהות המכפלה ברורה מההקשר (או שזוהי המכפלה הפנימית האוקלידית במקרה שהמרחב הווקטורי הוא F^n).

6.6 מאפיינים בסיסיים של מכפלה פנימית

- א. לכל $v \in V$ מקובע, הפונקציה המעתיקה $u \in V$ אל $\langle u, v \rangle$ היא העתקה ליניארית מ- V אל F .
- ב. $\langle 0, v \rangle = 0$ לכל $v \in V$.
- ג. $\langle v, 0 \rangle = 0$ לכל $v \in V$.
- ד. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ לכל $u, v, w \in V$.
- ה. $\langle u, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle$ לכל $\lambda \in F$ ולכל $u, v \in V$.

הוכחה

- א. עבור $v \in V$, הליניאריות של $u \mapsto \langle u, v \rangle$ נובעת מהתנאים לאדיטיביות והומוגניות ברכיב הראשון בהגדרת מכפלה פנימית.
- ב. כל העתקה ליניארית מעתיקה 0 אל 0. לפיכך (ב) נובע מ- (א).
- ג. אם $v \in V$, אזי מתכונת סימטריית הצמוד (הרמיטיות) בהגדרת מכפלה פנימית יחד עם סעיף (ב) נקבל ש- $\overline{\langle v, 0 \rangle} = \overline{\langle 0, v \rangle} = \overline{0} = 0$.
- ד. נניח ש- $u, v, w \in V$. אזי

$$\begin{aligned} \langle u, v + w \rangle &= \overline{\langle v + w, u \rangle} \\ &= \overline{\langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle} \\ &= \overline{\langle v, u \rangle} + \overline{\langle w, u \rangle} \\ &= \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle. \end{aligned}$$

- ה. נניח ש- $\lambda \in F$ ו- $u, v \in V$. אזי

$$\begin{aligned} \langle u, \lambda v \rangle &= \overline{\langle \lambda v, u \rangle} \\ &= \overline{\lambda \langle v, u \rangle} \\ &= \bar{\lambda} \overline{\langle v, u \rangle} \\ &= \bar{\lambda} \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$



נורמות

המוטיבציה שלנו להגדרת מכפלות פנימיות נבעה במקורה מהנורמות של הווקטורים מעל $\mathbf{R}^2$ ו- $\mathbf{R}^3$. כעת נראה כי כל מכפלה פנימית קובעת נורמה.

6.7 הגדרה: נורמה, $\|v\|$

עבור $v \in V$, הנורמה של v , מסומנת ב- $\|v\|$, מוגדרת על ידי

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

6.8 דוגמה: נורמות

א. אם $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{F}^n$ (בצירוף המכפלה הפנימית האוקלידית), אזי

$$\|(z_1, \dots, z_n)\| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}.$$

ב. עבור f במרחב הווקטורי של פונקציות רציפות ממשיות מעל $[-1, 1]$ ובצירוף מכפלה פנימית הנתונה ב-6.3(ג), נקבל

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-1}^1 f^2}.$$

6.9 מאפיינים בסיסיים של הנורמה

נניח ש- $v \in V$.

א. $\|v\| = 0$ אם ורק אם $v = 0$.

ב. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ לכל $\lambda \in \mathbf{F}$.

הוכחה

א. התוצאה הרצויה מתקיימת מאחר ש- $\langle v, v \rangle = 0$ אם ורק אם $v = 0$.

ב. נניח ש- $\lambda \in \mathbf{F}$. אזי

$$\begin{aligned} \|\lambda v\|^2 &= \langle \lambda v, \lambda v \rangle \\ &= \lambda \langle v, \lambda v \rangle \\ &= \lambda \overline{\lambda} \langle v, v \rangle \\ &= |\lambda|^2 \|v\|^2. \end{aligned}$$

הוצאת שורש כעת נותנת לנו את השוויון המבוקש.

ההוכחה של סעיף (ב) במסקנה לעיל ממחישה עיקרון כללי: עבודה עם ריבועי נורמות בדרך כלל קלה יותר מעבודה ישירה עם הנורמות.

כעת אנו מגיעים להגדרה מכריעה.

6.10 הגדרה: אורתוגונלי

שני וקטורים $u, v \in V$ נקראים אורתוגונליים אם $\langle u, v \rangle = 0$.

המילה **אורתוגונלי** מגיעה מהמילה היוונית **אורתוגונוס**, שמשמעותה ישר-זווית.

בהגדרה לעיל, אין חשיבות לסדר שני הווקטורים, מאחר ש- $\langle u, v \rangle = 0$ אם ורק אם $\langle v, u \rangle = 0$. במקום לומר ש- u ו- v אורתוגונליים, לעיתים נאמר ש- u אורתוגונלי ל- v .

תרגיל 15 מבקש מכם להוכיח כי אם u, v וקטורים השונים מאפס ב- $\mathbb{R}^2$, אזי

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \theta,$$

כאשר θ היא הזווית בין u ל- v (כשחושבים על u ו- v כחיצים שנקודת מוצאם בראשית הצירים). לפיכך שני וקטורים השונים מאפס ב- $\mathbb{R}^2$ אורתוגונליים (ביחס למכפלה הפנימית האוקלידית) אם ורק אם קוסינוס הזווית ביניהם שווה 0, תוצאה המתקבלת אם ורק אם הווקטורים אנכיים במובן הרגיל של גאומטריית המישור. לפיכך אפשר לחשוב על המילה אורתוגונלי כמילה מהודרת שמשמעותה אנכי. אנו פותחים את לימוד האורתוגונליות עם מסקנה קלה.

6.11 אורתוגונליות ו- 0

א. 0 אורתוגונלי לכל וקטור ב- V .

ב. 0 הוא הווקטור היחיד ב- V האורתוגונלי לעצמו.

הוכחה

א. נזכיר כי ב- 6.6 (ב) נקבע כי $\langle 0, v \rangle = 0$ לכל $v \in V$.

ב. אם $v \in V$ ו- $\langle v, v \rangle = 0$, אזי $v = 0$ (לפי הגדרת מכפלה פנימית).

עבור המקרה הפרטי $V = \mathbb{R}^2$, המסקנה הבאה הייתה ידועה כבר לפני למעלה מ- 3,500 שנה בבבל העתיקה ולאחר מכן התגלתה מחדש והוכחה לפני למעלה מ- 2,500 שנה ביוון העתיקה. כמובן שההוכחה להלן אינה ההוכחה המקורית.

6.12 משפט פיתגורס

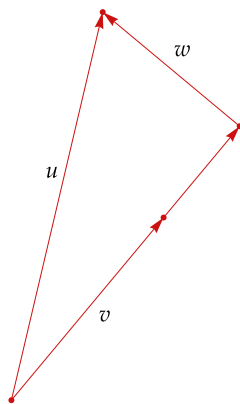
נניח ש- $u, v \in V$. אם u ו- v אורתוגונליים, אזי

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

הוכחה נניח ש- $\langle u, v \rangle = 0$. אזי

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2. \end{aligned}$$

נניח ש- $u, v \in V$, עם $v \neq 0$. ברצוננו לבטא את u ככפולת סקלר של v ועוד וקטור w אורתוגונלי ל- v , כפי שמוצע בתמונה להלן.



פירוק אורתוגונלי:

u מבוטא ככפולת סקלר של v ועוד וקטור אורתוגונלי ל- v .

לגילוי הנוסחה כיצד ניתן לבטא את u ככפולת סקלר של v ועוד וקטור אורתוגונלי ל- v , יהי $c \in F$ סקלר. אזי

$$u = cv + (u - cv).$$

לפיכך עלינו לבחור c כך ש- v אורתוגונלי ל- $(u - cv)$. לכן, אנו מעוניינים ב-

$$0 = \langle u - cv, v \rangle = \langle u, v \rangle - c\|v\|^2.$$

המשוואה לעיל מורה לנו כי עלינו לבחור את c כ- $\langle u, v \rangle / \|v\|^2$. בחירה זו של c מאפשרת לנו לכתוב את המשוואה הבאה

$$u = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v + \left(u - \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v \right).$$

כפי שעליכם לוודא, המשוואה המוצגת כאן מבטאת את u ככפולת סקלר של v ועוד וקטור אורתוגונלי ל- v באופן מפורש. לפיכך הוכחנו את מסקנת המפתח הבאה.

6.13 פירוק אורתוגונלי

נניח ש- $u, v \in V$, עם $v \neq 0$. נגדיר $c = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$ ו- $w = u - cv$. אזי

$$\langle w, v \rangle = 0 \quad \text{וגם} \quad u = cv + w.$$

הפירוק האורתוגונלי 6.13 ישמש אותנו בהוכחת אי-שוויון קושי-שוורץ, שהוא המסקנה הבאה שלנו והוא אחד מהאי-שוויונות החשובים ביותר במתמטיקה.

6.14 אי-שוויון קושי-שוורץ

נניח ש- $u, v \in V$. אזי

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

אי-שוויון זה הוא שוויון אם-ורק-אם אחד מבין u ו- v הוא כפולת סקלר של האחר.

הוכחה אם $v = 0$, אזי שני אגפי האי-שוויון המבוקש שווים 0. לפיכך נוכל להניח ש- $v \neq 0$. נתבונן בפירוק האורתוגונלי

$$u = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v + w$$

שקיבלנו ב-6.13, כאשר w אורתוגונלי ל- v . לפי משפט פיתגורס,

$$\|u\|^2 = \left\| \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v \right\|^2 + \|w\|^2$$

$$= \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2} + \|w\|^2$$

$$\geq \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2}.$$

כעת נכפיל את שני אגפי האי-שוויון ב- $\|v\|^2$ ולאחר מכן נוציא שורש ריבועי ונקבל את האי-שוויון המבוקש.

אוגוסטין-לואי קושי (1789–1857) הוכיח את 6.16 (א) בשנת 1821. בשנת 1859, תלמידו של קושי ויקטור בונקוֹבֶזְקִי (1804–1889) הוכיח את הגרסה האינטגרלית של האי-שוויון בדומה למופיע ב-6.16 (ב). מספר עשורים מאוחר יותר, תגליות דומות של הרמן שוורץ (1843–1921) זכו לפרסום רב יותר והובילו להתבססות השם של אי-שוויון זה.

ההוכחה בפסקה למעלה מראה לנו כי אי-שוויון קושי-שוורץ הוא שוויון אם-ורק-אם 6.15 שוויון. הדבר קורה אם-ורק-אם $w = 0$. אבל כאמור לעיל, $w = 0$ אם-ורק-אם u כפולת סקלר של v (ראו 6.13). לפיכך אי-שוויון קושי-שוורץ הוא שוויון אם-ורק-אם u כפולת סקלר של v או v כפולת סקלר של u (או שניהם; הניסוח נבחר כדי לכסות מקרים שבהם אחד משני הווקטורים u או v שווה 0).

6.16 דוגמה: אי-שוויון קושי-שוורץ

א. אם $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ אזי

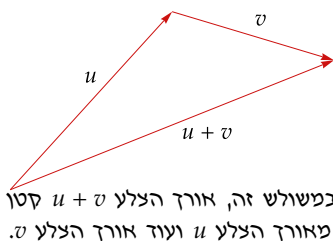
$$(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2),$$

כפי שנובע מיישום אי-שוויון קושי-שוורץ על הווקטורים $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, בשימוש במכפלה הפנימית האוקלידית הרגילה.

ב. אם f, g פונקציות רציפות ממשיות מעל $[-1, 1]$, אזי

$$\left| \int_{-1}^1 fg \right|^2 \leq \left(\int_{-1}^1 f^2 \right) \left(\int_{-1}^1 g^2 \right),$$

כפי שנובע מיישום אי-שוויון קושי-שוורץ על דוגמה 6.3(ג).



המסקנה הבאה נקראת אי-שוויון המשולש. הפרשנות הגאומטרית של מסקנה זו היא שאורך כל צלע במשולש נתון קטן מסכום האורכים של שתי הצלעות האחרות.

נשים לב כי מאי-שוויון המשולש נובע כי הקו השבור הקצר ביותר בין שתי נקודות הוא קטע ישר יחיד המחבר ביניהן (קו שבור הוא קו הבנוי מסדרה של קטעים ישרים המחוברים זה לזה בנקודות הקצה).

6.17 אי-שוויון המשולש

נניח ש- $u, v \in V$. אזי

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

האי-שוויון הזה הוא שוויון אס-ורק-אם אחד מבין u ו- v הוא כפולת מספר ממשי אי-שלילי של האחר.

הוכחה מתקיים

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle} \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle u, v \rangle \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|\langle u, v \rangle| \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2, \end{aligned}$$

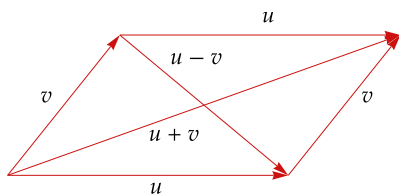
כאשר 6.19 נובע מאי-שוויון קושי-שוורץ (6.14). בהוצאת שורשים לשני אגפי האי-שוויון לעיל נקבל את האי-שוויון המבוקש.

ההוכחה לעיל מראה כי אי-שוויון המשולש הוא שוויון אס-ורק-אם יש לנו שוויון ב- 6.18 וב- 6.19. לפיכך באי-שוויון המשולש מתקיים שוויון אס-ורק-אם

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\|. \quad 6.20$$

אם אחד מ- u, v כפולת מספר ממשי אי-שלילי של האחר, אזי 6.20 מתקיים. בכיוון ההפוך, נניח ש- 6.20 מתקיים. אזי מהתנאי לשוויון באי-שוויון קושי-שוורץ (6.14) נובע שאחד מבין u, v הוא כפולת סקלר של האחר. סקלר זה חייב להיות ממשי אי-שלילי לפי 6.20, ובזאת הושלמה ההוכחה.

לאי-שוויון המשולש ההפוך, ראו תרגיל 20.



אלכסוני מקבילית זו הם $u + v$ ו- $u - v$.

המסקנה הבאה נקראת כלל המקבילית לאור הפרשנות הגאומטרית המוענקת לה: בכל מקבילית, סכום ריבועי אורכי האלכסונים שווה לסכום ריבועי אורכי ארבע הצלעות. נשים לב כי ההוכחה המובאת כאן פשוטה וישירה יותר מזו הנפוצה בגאומטריה אוקלידית.

6.21 כלל המקבילית

נניח ש- $u, v \in V$. אזי

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

הוכחה מתקיים

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle + \langle u - v, u - v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle \\ &\quad + \|u\|^2 + \|v\|^2 - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle \\ &= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2), \end{aligned}$$

כפי שרצינו.

תרגילים 11

1 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם $v_1, \dots, v_m \in V$ אזי

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \langle v_j, v_k \rangle \geq 0.$$

2 נניח ש- $S \in \mathcal{L}(V)$. נגדיר $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ על ידי

$$\langle u, v \rangle_1 = \langle Su, Sv \rangle$$

לכל $u, v \in V$. הראו ש- $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ מכפלה פנימית מעל V אם ורק אם S חד-חד-ערכי.

3 א. הראו שהפונקציה המעתיקה זוג סדור $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ של איברי $\mathbb{R}^2$ אל $\mathbb{R}^2$ אינה מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}^2$.

ב. הראו שהפונקציה המעתיקה זוג סדור $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$ של איברי $\mathbb{R}^3$ אל $\mathbb{R}^3$ אינה מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}^3$.

4 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור כך ש- $\|Tv\| \leq \|v\|$ לכל $v \in V$. הוכיחו ש- $T - \sqrt{2}I$ חד-חד-ערכי.

5 נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ממשי.

א. הראו ש- $\|u\|^2 - \|v\|^2 = \langle u+v, u-v \rangle$ לכל $u, v \in V$.

ב. הראו שאם ל- $u, v \in V$ אותה נורמה, אזי $u+v$ אורתוגונלי ל- $u-v$.

ג. השתמשו בסעיף (ב) כדי להראות כי אלכסוני המעוין אנכיים זה לזה.

6 נניח ש- $u, v \in V$. הוכיחו ש- $\|u\| \leq \|u+av\|$ לכל $a \in \mathbb{F}$ ו- $\langle u, v \rangle = 0$.

7 נניח ש- $u, v \in V$. הוכיחו ש- $\|au+bv\| = \|bu+av\|$ לכל $a, b \in \mathbb{R}$ אם ורק אם $\|u\| = \|v\|$.

8 נניח ש- $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$ ו- $a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 \leq 1$. הוכיחו ש- $a + b + c + 4x + 9y \leq 10$.

9 נניח ש- $u, v \in V$ ו- $\|u\| = \|v\| = 1$ ו- $\langle u, v \rangle = 1$. הוכיחו ש- $u = v$.

10 נניח ש- $u, v \in V$ ו- $\|u\| \leq 1$ ו- $\|v\| \leq 1$. הוכיחו ש- $|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{1 - \|u\|^2} \sqrt{1 - \|v\|^2}$.

11 מצאו וקטורים $u, v \in \mathbb{R}^2$ כך שהווקטור u כפולת סקלר של $(1, 3)$, הווקטור v אורתוגונלי ל- $(1, 3)$, והווקטור $u + v = (1, 2)$.

12 נניח ש- a, b, c, d מספרים חיוביים.

א. הוכיחו ש- $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \geq 16$.

ב. עבור אילו מספרים חיוביים a, b, c, d האי-שוויון לעיל הוא שוויון?

13 הראו שריבוע של ממוצע הוא קטן או שווה לממוצע הריבועים. ביתר דיוק, הראו כי אם $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, אזי ריבוע הממוצע של $a_1, \dots, a_n$ הוא קטן או שווה לממוצע של $a_1^2, \dots, a_n^2$.

14 נניח ש- $v \in V$ ו- $v \neq 0$. הוכיחו ש- $v/\|v\|$ הוא האיבר היחיד של ספירת היחידה של V הקרוב ביותר ל- v . ביתר דיוק, הוכיחו כי אם $u \in V$ ו- $\|u\| = 1$, אזי

$$\left\|v - \frac{v}{\|v\|}\right\| \leq \|v - u\|,$$

עם שוויון רק במקרה ש- $u = v/\|v\|$.

15 נניח ש- u, v וקטורים השונים מאפס ב- $\mathbb{R}^2$. הוכיחו ש-

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \theta,$$

כאשר θ היא הזווית בין u ל- v (כשחושבים על u ו- v כחיצים שנקודת מוצאם בראשית הצירים).

רמז: השתמשו במשפט הקוסינוסים על המשולש הנוצר על ידי u, v ו- $u-v$.

16 הזווית בין שני וקטורים (כשחושבים עליהם כחיצים שמוצאם בראשית הצירים) ב- $\mathbb{R}^2$ או $\mathbb{R}^3$ ניתנת להגדרה באופן גאומטרי. אך הגאומטריה אינה ברורה באותה מידה ב- $\mathbb{R}^n$ כאשר $n > 3$. לפיכך הזווית בין שני וקטורים השונים מאפס $x, y \in \mathbb{R}^n$ מוגדרת כ-

$$\arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|},$$

כאשר המוטיבציה להגדרה זו נובעת מתרגיל 15. הסבירו מדוע אנו זקוקים לאי־שוויון קושי־שוורץ כדי להראות שהגדרה זו הגיונית.

17 הוכיחו כי

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n k a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{k} \right)$$

מתקיים לכל המספרים הממשיים $a_1, \dots, a_n$ ו- $b_1, \dots, b_n$.

18 א. נניח ש- $f: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ רציפה. הראו שמתקיים

$$\left(\int_1^\infty f \right)^2 \leq \int_1^\infty x^2 (f(x))^2 dx.$$

ב. עבור אילו פונקציות רציפות $f: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ האי־שוויון ב- (א) הוא שוויון ששני אגפיו סופיים?

19 נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי אם λ ערך עצמי של T , אזי

$$|\lambda|^2 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |\mathcal{M}(T)_{j,k}|^2,$$

כאשר $\mathcal{M}(T)_{j,k}$ מסמן את האיבר בשורה j , עמודה k של המטריצה של T ביחס לבסיס $v_1, \dots, v_n$.

20 הוכיחו שאם $u, v \in V$, אזי $\|u - v\| \leq \left| \|u\| - \|v\| \right|$.

האי־שוויון לעיל נקרא **אי־שוויון המשולש ההפוך**. עבור אי־שוויון המשולש ההפוך כאשר $V = \mathbb{C}$, ראו תרגיל 2 בפרק 7.

21 נניח ש- $u, v \in V$ וקטורים כך ש-

$$\|u\| = 3, \quad \|u + v\| = 4, \quad \|u - v\| = 6.$$

לאיזה מספר שווה $\|v\|$?

22 הראו שאם $u, v \in V$, אזי

$$\|u + v\| \|u - v\| \leq \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

23 נניח ש- $v_1, \dots, v_m \in V$ וקטורים כך ש- $\|v_k\| \leq 1$ לכל $k = 1, \dots, m$. הראו שקיימים $a_1, \dots, a_m \in \{1, -1\}$ כך ש-

$$\|a_1 v_1 + \dots + a_m v_m\| \leq \sqrt{m}.$$

24 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם $\| \cdot \|$ היא הנורמה המשויכת למכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}^2$, אזי קיים $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ כך ש- $\|(x, y)\| \neq \max\{|x|, |y|\}$.

25 נניח ש- $p > 0$. הוכיחו שקיימת מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}^2$ כך שהנורמה המשויכת אליה נתונה על ידי

$$\|(x, y)\| = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$$

לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ אם-ורק אם $p = 2$.

26 נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ממשי. הוכיחו ש-

$$\langle u, v \rangle = \frac{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2}{4}$$

לכל $u, v \in V$.

27 נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית מרוכב. הוכיחו ש-

$$\langle u, v \rangle = \frac{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + \|u + iv\|^2 - \|u - iv\|^2}{4}$$

לכל $u, v \in V$.

28 נורמה מעל מרחב וקטורי U היא פונקציה

$$\|\cdot\|: U \rightarrow [0, \infty)$$

כך ש- $\|u\| = 0$ אם-ורק אם $u = 0$ לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $u \in U$ ו- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ לכל $u, v \in U$. הוכיחו שנורמה המקיימת את כלל המקבילית מוצאה במכפלה פנימית (במילים אחרות, הראו שאם $\|\cdot\|$ נורמה מעל U המקיימת את כלל המקבילית, אזי קיימת מכפלה פנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$ מעל U כך ש- $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$ לכל $u \in U$).

29 נניח ש- $V_1, \dots, V_m$ מרחבי מכפלה פנימית. הראו כי המשוואה

$$\langle (u_1, \dots, u_m), (v_1, \dots, v_m) \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle + \dots + \langle u_m, v_m \rangle$$

מגדירה מכפלה פנימית מעל $V_1 \times \dots \times V_m$.

בניסוי לעיל באגף הימני, לכל $k = 1, \dots, m$, המכפלה הפנימית $\langle u_k, v_k \rangle$ מציינת את המכפלה הפנימית מעל V_k . ייתכן שלכל אחד מהמרחבים $V_1, \dots, V_m$ יש מכפלה פנימית שונה, למרות השימוש בסימון זהה לכל המכפלות.

30 נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ממשי. עבור $u, v, w, x \in V$ הגדירו

$$\langle u + iv, w + ix \rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, w \rangle + \langle v, x \rangle + (\langle v, w \rangle - \langle u, x \rangle)i.$$

א. הראו ש- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ אכן הופכת את $V_{\mathbb{C}}$ למרחב מכפלה פנימית מרוכב.

ב. הראו שאם $u, v \in V$ אזי

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, v \rangle \quad \text{וגם} \quad \|u + iv\|_{\mathbb{C}}^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

ראו תרגיל 8 ביחידה 2 עבור הגדרת מירכוב $V_{\mathbb{C}}$.

31 נניח ש- $u, v, w \in V$. הוכיחו ש-

$$\|w - \frac{1}{2}(u + v)\|^2 = \frac{\|w - u\|^2 + \|w - v\|^2}{2} - \frac{\|u - v\|^2}{4}.$$

32 נניח ש- E תת-קבוצה של V עם התכונה ש- $u, v \in E$ גורר ש- $\frac{1}{2}(u + v) \in E$. יהי $w \in V$. הראו שקיימת לכל היותר נקודה אחת ב- E הקרובה ביותר ל- w . במילים אחרות, הראו שיש לכל היותר $u \in E$ אחד כך ש-

$$\|w - u\| \leq \|w - x\|$$

לכל $x \in E$.

33 נניח ש- f, g פונקציות גזירות מ- $\mathbb{R}$ אל $\mathbb{R}^n$.

א. הראו ש-

$$\langle f(t), g(t) \rangle' = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle.$$

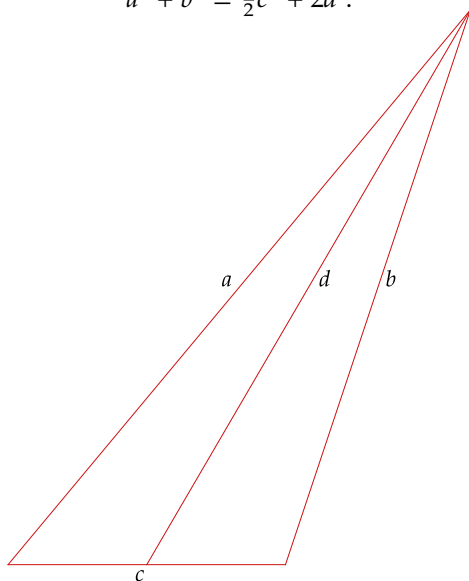
ב. נניח ש- c מספר חיובי ו- $\|f(t)\| = c$ לכל $t \in \mathbb{R}$. הראו ש- $\langle f'(t), f(t) \rangle = 0$ לכל $t \in \mathbb{R}$.

ג. העניקו פרשנות גאומטרית לתוצאה בסעיף (ב) במונחים של הווקטור המשיק לעקום המונח על ספירה ב- $\mathbb{R}^n$ שמרכזה בראשית הצירים.

פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ נקראת גזירה אם קיימות פונקציות גזירות $f_1, \dots, f_n$ מ- $\mathbb{R}$ אל $\mathbb{R}$ כך ש- $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ לכל $t \in \mathbb{R}$. בנוסף, לכל $t \in \mathbb{R}$ הגזרת $f'(t) = (f_1'(t), \dots, f_n'(t))$ על ידי

34 השתמשו במכפלה פנימית כדי להוכיח את משפט התיכון (נקרא גם משפט אפולוניוס): במשולש שאורך צלעותיו a, b ו- c , יהי d אורך הקטע מנקודת האמצע של הצלע שאורכה c אל הקודקוד שממול. אזי

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2d^2.$$



35 נִקְבַּע מספר שלם חיובי n . הלפליסיון Δp של פונקציה ממשית הגזירה פעמיים p מעל $\mathbf{R}^n$ הוא הפונקציה מעל $\mathbf{R}^n$ המוגדרת על ידי

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 p}{\partial x_n^2}.$$

הפונקציה p נקראת הרמונית אם $\Delta p = 0$. פולינום מעל $\mathbf{R}^n$ הוא צירוף ליניארי (עם מקדמים ב- $\mathbf{R}$) של פונקציות מהצורה $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, כאשר $m_1, \dots, m_n$ מספרים שלמים אי-שליליים. נניח ש- q פולינום מעל $\mathbf{R}^n$. הוכיחו שקיים פולינום הרמוני p מעל $\mathbf{R}^n$ כך ש- $p(x) = q(x)$ לכל $x \in \mathbf{R}^n$ עם $\|x\| = 1$.

העובדה היחידה הנוגעת לפונקציות הרמוניות שעליכם לדעת לצורך תרגיל זה היא שאם p פונקציה הרמונית מעל $\mathbf{R}^n$ ו- $p(x) = 0$ לכל $x \in \mathbf{R}^n$ עם $\|x\| = 1$, אזי $p = 0$.

רמז: נניחוש סביר יהיה כי הפולינום ההרמוני הרצוי p הוא בצורה $q + (1 - \|x\|^2)r$ עבור פולינום r כלשהו. הוכיחו שקיים פולינום r מעל $\mathbf{R}^n$ כך ש- $q + (1 - \|x\|^2)r$ הרמוני באמצעות הגדרת אופרטור T מעל מרחב וקטורי מתאים על ידי

$$Tr = \Delta((1 - \|x\|^2)r)$$

והראו ש- T חד-חד-ערכי ולכן על.

במרחב של מכפלה פנימית
שני וקטורים נפגשים בדממה,
וערבה המחלט של התבנית
לא יעלה על כפל נורמה בנורמה.

ההוכחה: פרוק אורתוגונלי –
רכיב מקביל ורכיב שניצב;
משפט פיתגורס, צעד פורמלי,
ואי-השיוון כבר מעצב.

ומתי השיוון מתקיים?
רק אם זה כפל סקלרי של זה:
הרכיב הנצב אז מתעלם,
וכל הספור על קו אחד נחזה.

מכאן – קוסינוס של זווית מגדר,
כי הנחס בין מינוס אחת לאחת נשאר.

–קלוד (Table 5)

קלט: Shakespearean sonnet on Cauchy–Schwarz inequality in Hebrew

21 בסיסים אורתונורמליים

רשימות אורתונורמליות ותהליך גרס-שמידט

6.22 הגדרה: אורתונורמלי

- רשימת וקטורים נקראת אורתונורמלית אם הנורמה של כל וקטור ברשימה היא 1 וכל וקטור אורתוגונלי לכל שאר הווקטורים ברשימה.
- במילים אחרות, רשימת וקטורים $e_1, \dots, e_m$ ב- V היא אורתונורמלית אם

$$\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } j = k, \\ 0 & \text{if } j \neq k \end{cases}$$

לכל $j, k \in \{1, \dots, m\}$

6.23 דוגמה: רשימות אורתונורמליות

- א. הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$ הוא רשימה אורתונורמלית.
- ב. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ היא רשימה אורתונורמלית ב- $\mathbb{F}^3$.
- ג. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ היא רשימה אורתונורמלית ב- $\mathbb{F}^3$.
- ד. נניח ש- n מספר שלם חיובי. אזי כפי שתרגיל 4 מבקש ממכם לוודא, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ היא רשימה אורתונורמלית של וקטורים ב- $C[-\pi, \pi]$, המרחב הווקטורי של פונקציות רציפות ממשיות מעל $[-\pi, \pi]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg$.
- השימוש ברשימה אורתונורמלית זו נפוץ בבניית מודלים לתופעות מחזוריות דוגמת גאות ושפל.
- ה. נניח שאנו הופכים את $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ למרחב מכפלה פנימית בשימוש במכפלה הפנימית הנתונה על ידי

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 pq$$

- לכל $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. הבסיס הסטנדרטי $1, x, x^2$ של $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ אינו אורתונורמלי, שכן הנורמה של הווקטורים ברשימה זו שונה מ-1. כאשר נחלק כל וקטור בנורמה שלו נקבל את הרשימה $1/\sqrt{2}, \sqrt{3/2}x, \sqrt{5/2}x^2$, שבה הנורמה של כל וקטור היא 1, והווקטור השני אורתוגונלי לווקטורים הראשון והשלישי. אולם, הווקטורים הראשון והשלישי אינם אורתוגונליים. לפיכך רשימה זו אינה אורתונורמלית. בקרוב נראה כיצד לבנות רשימה אורתונורמלית מתוך הבסיס הסטנדרטי $1, x, x^2$ (ראו דוגמה 6.34).

רשימות אורתונורמליות הן נוחות לעבודה באופן מיוחד, כפי שממחישה המסקנה הבאה.

6.24 נורמה של צירוף ליניארי אורתונורמלי

נניח ש- $e_1, \dots, e_m$ רשימת וקטורים אורתונורמלית ב- V . אזי

$$\|a_1 e_1 + \dots + a_m e_m\|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_m|^2$$

לכל $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$.

הוכחה מאחר שהנורמה של כל וקטור e_k היא 1, מסקנה זו נובעת מיישום חוזר ונשנה של משפט פיתגורס (6.12).

ממסקנה זו נובעת התוצאה הישירה החשובה הבאה.

6.25 רשימות אורתונורמליות בלתי תלויות ליניאריות

כל רשימה אורתונורמלית של וקטורים היא בלתי תלויה ליניארית.

הוכחה נניח ש- $e_1, \dots, e_m$ רשימה אורתונורמלית של וקטורים ב- V ו- $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$a_1 e_1 + \dots + a_m e_m = 0.$$

אזי $|a_1|^2 + \dots + |a_m|^2 = 0$ (לפי 6.24), משמעות הדבר היא שכל ה- a_k הם 0. לפיכך $e_1, \dots, e_m$ בלתי תלויה ליניארית.

כעת אנו מגיעים לאי-שוויון בעל חשיבות רבה.

6.26 אי-שוויון בֶּזֶל

נניח ש- $e_1, \dots, e_m$ רשימה אורתונורמלית של וקטורים ב- V . אם $v \in V$ אזי

$$|\langle v, e_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, e_m \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

הוכחה נניח ש- $v \in V$. אזי

$$v = \underbrace{\langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_m \rangle e_m}_u + \underbrace{v - \langle v, e_1 \rangle e_1 - \dots - \langle v, e_m \rangle e_m}_w.$$

יהיו u ו- w מוגדרים באופן המוצג במשוואה לעיל. אם $k \in \{1, \dots, m\}$ אזי $\langle w, e_k \rangle = \langle v, e_k \rangle - \langle v, e_k \rangle \langle e_k, e_k \rangle = 0$. מכאן נובע ש- $\langle w, u \rangle = 0$. כעת נסיק כי על פי משפט פיתגורס

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$$

$$\geq \|u\|^2$$

$$= |\langle v, e_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, e_m \rangle|^2,$$

כאשר השורה האחרונה נובעת מ-6.24.

ההגדרה הבאה מציגה את אחד המושגים השימושיים ביותר בחקר מרחבי מכפלה פנימית.

6.27 הגדרה: בסיס אורתונורמלי

בסיס אורתונורמלי של V הוא רשימה אורתונורמלית של וקטורים ב- V שהיא גם בסיס של V .

לדוגמה, הבסיס הסטנדרטי הוא בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$.

6.28 רשימות אורתונורמליות באורך המתאים הן בסיסים אורתונורמליים

נניח ש- V מממד סופי. אזי כל רשימה אורתונורמלית של וקטורים ב- V שאורכה $\dim V$ היא בסיס אורתונורמלי של V .

הוכחה לפי 6.25, כל רשימה אורתונורמלית של וקטורים ב- V היא בלתי תלויה ליניארית. לפיכך כל רשימה שכזו באורך המתאים היא בסיס—ראו 2.38. ■

6.29 דוגמה: בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^4$

כפי שצוין לעיל, הבסיס הסטנדרטי הוא בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^4$. כעת נראה ש-
 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
 גם הוא בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^4$.

מתקיים

$$\left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\| = \sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}} = 1.$$

באופן דומה, הנורמה של שלושת הווקטורים האחרים ברשימה היא 1.

נשים לב לכך ש-

$$\left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

באופן דומה, המכפלה הפנימית של כל שני וקטורים שונים ברשימה לעיל שווה 0.

לפיכך הרשימה לעיל אורתונורמלית. מכיוון שיש בידינו רשימה אורתונורמלית בת ארבעה איברים במרחב וקטורי ארבע-ממדי $\mathbb{F}^4$, רשימה זו היא בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^4$ (לפי 6.28).

באופן כללי, בהינתן בסיס $e_1, \dots, e_n$ של V ווקטור $v \in V$, אנו יודעים כי קיימת בחירה כלשהי של סקלרים $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n.$$

חישוב הערכים $a_1, \dots, a_n$ כך שיקיימו את המשוואה לעיל יכול להיות תהליך חישוב ארוך עבור בסיס שרירותי של V . אולם, המסקנה הבאה מראה כי עבור בסיס אורתונורמלי מדובר בפעולה קלה—כל שעלינו לעשות הוא לחשב $a_k = \langle v, e_k \rangle$.

הנוסחה להלן עבור $\|v\|$ נקראת שוויון פֶּרְסֶבֶל. היא פורסמה בשנת 1799 בהקשר של טור פורייה.

נשים לב כיצד המסקנה הבאה הופכת את התנהגות כל מרחב מכפלה פנימית n -ממדי לדומה לזו של F^n , כאשר את תפקיד הקואורדינטות של וקטור ב- F^n ממלאים $\langle v, e_1 \rangle, \dots, \langle v, e_n \rangle$.

6.30 ביטוי וקטור כצירוף ליניארי של בסיס אורתונורמלי

נניח ש- $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V ו- $u, v \in V$. אזי

א. $v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n$

ב. $\|v\|^2 = |\langle v, e_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, e_n \rangle|^2$

ג. $\langle u, v \rangle = \langle u, e_1 \rangle \overline{\langle v, e_1 \rangle} + \dots + \langle u, e_n \rangle \overline{\langle v, e_n \rangle}$

הוכחה מאחר ש- $e_1, \dots, e_n$ בסיס של V , קיימים סקלרים $a_1, \dots, a_n$ כך ש-

$$v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n.$$

מאחר ש- $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי, בחישוב המכפלה הפנימית של שני אגפי המשוואה עם e_k נקבל $\langle v, e_k \rangle = a_k$ (א) לפיכך (א) מתקיים.

כעת (ב) נובע ישירות מ- (א) ו- 6.24.

נחשב את המכפלה הפנימית של u עם כל אגף של (א) ואז נקבל את (ג) בהפעלת הליניאריות של הצמוד על הרכיב השני של המכפלה הפנימית [6.6 (ד) ו- 6.6 (ה)]. ■

6.31 דוגמה: מציאת מקדמים לצירוף ליניארי

נניח שעלינו לבטא את הווקטור $(1, 2, 4, 7) \in F^4$ כצירוף ליניארי של הבסיס האורתונורמלי

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

של F^4 מדוגמה 6.29. במקום לפתור מערכת של ארבע משוואות ליניאריות בארבעה נעלמים, כפי שהיה עלינו לעשות אלמלא היינו עובדים עם בסיס אורתונורמלי, אנו פשוט מחשבים ארבע מכפלות פנימיות ומשתמשים ב- 6.30 (א) ונקבל כי $(1, 2, 4, 7)$ שווה ל-

$$7\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

כעת כשאנו מבינים את התועלת של בסיסים אורתונורמליים, איך אנו מוצאים אותם? לדוגמה, האם יש ל- $\mathcal{P}_m(\mathbf{R})$ בצירוף המכפלה הפנימית המופיעה ב- 6.3 (ג) בסיס אורתונורמלי? המסקנה הבאה תוביל אותנו אל התשובות לשאלות אלו.

יִרְגוּ פֶּזְרֶסוּ גֶרֶס (1850–1916) ו- אֶרְהַרְד שְׁמִידֶט (1876–1959) תרמו לפופולריות של אלגוריתם זה לבניית רשימות אורתונורמליות.

האלגוריתם שבו משתמשים בהוכחה להלן נקרא תהליך גרס-שמידט. הוא מעניק שיטה להפיכת רשימה בלתי תלויה ליניארית לרשימה אורתונורמלית עם פריסה זהה לרשימה המקורית.

נניח ש- $v_1, \dots, v_m$ רשימה בלתי תלויה ליניארית של וקטורים ב- V . יהי $f_1 = v_1$. עבור $k = 2, \dots, m$, נגדיר f_k באופן אינדוקטיבי על ידי

$$f_k = v_k - \frac{\langle v_k, f_1 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \dots - \frac{\langle v_k, f_{k-1} \rangle}{\|f_{k-1}\|^2} f_{k-1}.$$

כל $k = 1, \dots, m$, יהי $e_k = \frac{f_k}{\|f_k\|}$. אזי $e_1, \dots, e_m$ רשימה אורתונורמלית של וקטורים ב- V כך ש-

$$\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$$

כל $k = 1, \dots, m$.

הוכחה נראה באינדוקציה על k כי התוצאה הרצויה מתקיימת. נתחיל בבדיקה עבור $k = 1$: נשים לב כי מאחר ש- $e_1 = f_1/\|f_1\|$, קיבלנו ש- $\|e_1\| = 1$; בנוסף, $\text{span}(v_1) = \text{span}(e_1)$ שכן e_1 כפולה השונה מאפס של v_1 .

נניח ש- $1 < k \leq m$ והרשימה $e_1, \dots, e_{k-1}$ שנוצרה על ידי 6.32 היא רשימה אורתונורמלית כך ש-

$$6.33 \quad \text{span}(v_1, \dots, v_{k-1}) = \text{span}(e_1, \dots, e_{k-1}).$$

מאחר ש- $v_1, \dots, v_m$ בלתי תלויה ליניארית, הרי ש- $v_k \notin \text{span}(v_1, \dots, v_{k-1})$. לפיכך $v_k \notin \text{span}(e_1, \dots, e_{k-1}) = \text{span}(f_1, \dots, f_{k-1})$ מה שגורר ש- $f_k \neq 0$. לכן איננו מבצעים חלוקה ב-0 בהגדרת e_k הנתונה ב-6.32. חלוקת וקטור בנורמה שלו מפיקה וקטור חדש עם נורמה 1; לפיכך $\|e_k\| = 1$.

יהי $j \in \{1, \dots, k-1\}$ אזי

$$\begin{aligned} \langle e_k, e_j \rangle &= \frac{1}{\|f_k\| \|f_j\|} \langle f_k, f_j \rangle \\ &= \frac{1}{\|f_k\| \|f_j\|} \left\langle v_k - \frac{\langle v_k, f_1 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \dots - \frac{\langle v_k, f_{k-1} \rangle}{\|f_{k-1}\|^2} f_{k-1}, f_j \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|f_k\| \|f_j\|} (\langle v_k, f_j \rangle - \langle v_k, f_j \rangle) \\ &= 0. \end{aligned}$$

לפיכך $e_1, \dots, e_k$ היא רשימה אורתונורמלית.

מהגדרת e_k הנתונה ב-6.32, אנו רואים ש- $v_k \in \text{span}(e_1, \dots, e_k)$. שילוב נתון זה עם 6.33 מראה לנו ש-

$$\text{span}(v_1, \dots, v_k) \subseteq \text{span}(e_1, \dots, e_k).$$

שתי הרשימות לעיל בלתי תלויות ליניארית (רשימת ה- v ים לפי ההנחה, ורשימת ה- e ים בזכות האורתונורמליות ו-6.25). לפיכך ממד שני תתי-המרחב לעיל הוא k , ולכן הם שווים, ובכך השלמנו את צעד האינדוקציה ולפיכך את ההוכחה. ■

6.34 דוגמה: בסיס אורתונורמלי של $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$

נניח שאנו הופכים את $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ למרחב מכפלה פנימית בשימוש במכפלה הפנימית הבאה

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 pq$$

לכל $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$. אנו יודעים כי $1, x, x^2$ בסיס של $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$, אבל אינו בסיס אורתונורמלי. אנו נמצא בסיס אורתונורמלי של $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ באמצעות יישום תהליך גרס-שמידט, עם $v_1 = 1, v_2 = x$ ו- $v_3 = x^2$.

נתחיל בכך שניקח $f_1 = v_1 = 1$. לפיכך $\|f_1\|^2 = \int_{-1}^1 1 = 2$. לכן הנוסחה ב- 6.32 אומרת לנו ש-

$$f_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, f_1 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\|f_1\|^2} = x,$$

כאשר השוויון האחרון מתקיים מאחר ש- $\langle x, 1 \rangle = \int_{-1}^1 t dt = 0$.

הנוסחה לעיל עבור f_2 גוררת ש- $\|f_2\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$. כעת הנוסחה ב- 6.32 אומרת לנו ש-

$$f_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, f_1 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \frac{\langle v_3, f_2 \rangle}{\|f_2\|^2} f_2 = x^2 - \frac{1}{2} \langle x^2, 1 \rangle - \frac{3}{2} \langle x^2, x \rangle x = x^2 - \frac{1}{3}.$$

הנוסחה לעיל עבור f_3 גוררת ש-

$$\|f_3\|^2 = \int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \int_{-1}^1 \left(t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}\right) dt = \frac{8}{45}.$$

כעת, חלוקת כל אחד מהווקטורים f_1, f_2, f_3 בנורמה שלו תיתן את הרשימה האורתונורמלית

$$\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

ברשימה האורתונורמלית לעיל יש שלושה איברים, שזהו הממד של $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$. לכן רשימה אורתונורמלית זו היא בסיס אורתונורמלי של $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$. [לפי 6.28].

כעת ביכולתנו לענות על שאלת קיומם של בסיסים אורתונורמליים.

6.35 קיומו של בסיס אורתונורמלי

לכל מרחב מכפלה פנימית מממד סופי יש בסיס אורתונורמלי.

הוכחה נניח ש- V מממד סופי. נבחר בסיס של V . ניישם את תהליך גרס-שמידט (6.32) על הבסיס הנבחר, וכתוצאה מכך נקבל רשימה אורתונורמלית שאורכה הוא $\dim V$. לפי 6.28, רשימה אורתונורמלית זו היא בסיס אורתונורמלי של V . ■

לפעמים נצטרך לדעת שלא זו בלבד שקיים בסיס אורתונורמלי, אלא שכל רשימה אורתונורמלית ניתנת להשלמה לבסיס אורתונורמלי. התוצאה הישירה הבאה של תהליך גרס-שמידט מראה כי השלמה כזו תמיד אפשרית.

6.36 כל רשימה אורתונורמלית ניתנת להשלמה לבסיס אורתונורמלי

נניח ש- V מממד סופי. אזי ניתן להשלים כל רשימה אורתונורמלית של וקטורים ב- V לכדי בסיס אורתונורמלי של V .

הוכחה נניח ש- $e_1, \dots, e_m$ היא רשימה אורתונורמלית של וקטורים ב- V . אזי $e_1, \dots, e_m$ בלתי תלויה ליניארית (לפי 6.25). לכן רשימה זו ניתנת להשלמה לכדי בסיס $e_1, \dots, e_m, v_1, \dots, v_n$ של V (ראו 2.32). כעת ניישם את תהליך גרס-שמידט (6.32) על $e_1, \dots, e_m, v_1, \dots, v_n$ ונקבל כתוצאה את הרשימה האורתונורמלית

$$e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_n;$$

במקרה זה, הנוסחה שניתנת על ידי תהליך גרס-שמידט תשאיר את m הווקטורים הראשונים ללא שינוי מאחר שהם כבר אורתונורמליים. הרשימה לעיל היא בסיס אורתונורמלי של V לפי 6.28.

נזכיר כי מטריצה נקראת משולשית עליונה אם היא נראית כך:

$$\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix},$$

כאשר ה-0 במטריצה לעיל מציין שכל האיברים תחת האלכסון שווים 0, והכוכביות משמשות לסמן את האיברים על האלכסון ומעליו.

בפרק האחרון, סיפקנו תנאי הכרחי ומספיק לכך שלאופרטור תהיה מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס כלשהו (ראו 5.44). כעת כשאנו עוסקים במרחבי מכפלה פנימית, נרצה לדעת האם קיים בסיס אורתונורמלי אשר ביחס אליו יש לנו מטריצה משולשית עליונה. המסקנה הבאה מראה כי התנאי הנדרש שתהיה לאופרטור מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס אורתונורמלי כלשהו הוא תנאי זהה לזה הנדרש עבור מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס שרירותי.

6.37 מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס אורתונורמלי כלשהו

נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי יש ל- T מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס אורתונורמלי כלשהו של V אם ורק אם הפולינום המינימלי של T שווה ל- $(z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_m)$ עבור $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ כלשהם ב- F .

הוכחה נניח שיש ל- T מטריצה משולשית עליונה ביחס ל- $v_1, \dots, v_n$ בסיס כלשהו של V . לפיכך $\text{span}(v_1, \dots, v_k)$ שמור תחת T לכל $k = 1, \dots, n$ (ראו 5.39). יישום תהליך גרס-שמידט על $v_1, \dots, v_n$ מניב בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ של V מאחר ש-

$$\text{span}(e_1, \dots, e_k) = \text{span}(v_1, \dots, v_k)$$

לכל k (ראו 6.32), אנו מסיקים כי $\text{span}(e_1, \dots, e_k)$ שמור תחת T לכל $k = 1, \dots, n$. לפיכך, לפי 5.39, יש ל- T מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס האורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$. כעת השתמשו ב-5.44 להשלמת ההוכחה.

ישי שור (1875–1941) פרסם הוכחה למסקנה הבאה בשנת 1909.

עבור מרחבים וקטוריים מרוכבים המסקנה הבאה היא יישום חשוב של המסקנה הקודמת. ראו תרגיל 20 לגרסה של משפט הפירוק של שור הניתנת ליישום על מספר אופרטורים בז'זמנית.

6.38 משפט הפירוק של שור

לכל אופרטור מעל מרחב מכפלה פנימית מרוכב מממד סופי יש מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס אורתונורמלי כלשהו.

הוכחה מסקנה זו נובעת באופן ישיר מהמשפט היסודי של האלגברה בגרסתו השנייה (4.13) וממסקנה 6.37.

פונקציונלים ליניאריים מעל מרחבי מכפלה פנימית

מאחר שלהעתקות ליניאריות אל שדה הסקלרים F יש תפקיד מיוחד, הגדרנו עבורן שם מיוחד כמו גם עבור המרחב הווקטורי שלהן ביחידה 6. ההגדרות הללו מובאות כאן שוב למקרה שדילגתם על יחידה 6.

6.39 הגדרה: פונקציונל ליניארי, מרחב דואלי, V'

- פונקציונל ליניארי מעל V הוא העתקה ליניארית מ- V אל F .
- המרחב הדואלי של V , המסומן ב- V' , הוא המרחב הווקטורי של כל הפונקציונלים הליניאריים מעל V . במילים אחרות, $V' = \mathcal{L}(V, F)$.

6.40 דוגמה: פונקציונל ליניארי מעל F^3

הפונקציה $\varphi: F^3 \rightarrow F$ המוגדרת על ידי

$$\varphi(z_1, z_2, z_3) = 2z_1 - 5z_2 + z_3$$

היא פונקציונל ליניארי מעל F^3 . נוכל לכתוב את הפונקציונל הליניארי הזה בצורה

$$\varphi(z) = \langle z, w \rangle$$

לכל $z \in F^3$, כאשר $w = (2, -5, 1)$.

6.41 דוגמה: פונקציונל ליניארי מעל $\mathcal{P}_5(\mathbf{R})$

הפונקציה $\varphi: \mathcal{P}_5(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ המוגדרת על ידי

$$\varphi(p) = \int_{-1}^1 p(t)(\cos(\pi t)) dt$$

היא פונקציונל ליניארי מעל $\mathcal{P}_5(\mathbf{R})$.

המסקנה הבאה נקראת על שמו של פרידריך ריס (1880–1956), אשר הוכיח מספר משפטים בראשית המאה העשרים הזומים מאוד למסקנה זו.

אם $v \in V$, אזי ההעתקה השולחת את u אל $\langle u, v \rangle$ היא פונקציונל ליניארי מעל V . המסקנה הבאה קובעת כי כל פונקציונל ליניארי מעל V הוא מהצורה הזו. לדוגמה, ניקח $v = (2, -5, 1)$ בדוגמה 6.40.

נניח שאנו הופכים את המרחב הווקטורי $\mathcal{P}_5(\mathbf{R})$ למרחב מכפלה פנימית על ידי כך שנגדיר $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 pq$. נגדיר את φ כדוגמה 6.41. אין הדבר מובן מאליה כי קיים $q \in \mathcal{P}_5(\mathbf{R})$ כך ש-

$$\int_{-1}^1 p(t)(\cos(\pi t)) dt = \langle p, q \rangle$$

לכל $p \in \mathcal{P}_5(\mathbf{R})$ [לא ניתן להגדיר $q(t) = \cos(\pi t)$ מאחר שבחירה זו של q אינה איבר של $\mathcal{P}_5(\mathbf{R})$]. המסקנה הבאה מלמדת אותנו תוצאה מפתיעה במידת מה: אכן קיים פולינום $q \in \mathcal{P}_5(\mathbf{R})$ כך שהמשוואה לעיל מתקיימת לכל $p \in \mathcal{P}_5(\mathbf{R})$.

6.42 משפט ההצגה של ריס

נניח ש- V מממד סופי ו- φ פונקציונל ליניארי מעל V . אזי קיים וקטור יחיד $v \in V$ כך ש-

$$\varphi(u) = \langle u, v \rangle$$

לכל $u \in V$.

הוכחה תחילה נראה שאכן קיים וקטור $v \in V$ כך ש- $\varphi(u) = \langle u, v \rangle$ לכל $u \in V$. יהי $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V . אזי

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \varphi(\langle u, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle u, e_n \rangle e_n) \\ &= \langle u, e_1 \rangle \varphi(e_1) + \dots + \langle u, e_n \rangle \varphi(e_n) \\ &= \langle u, \overline{\varphi(e_1)} e_1 + \dots + \overline{\varphi(e_n)} e_n \rangle \end{aligned}$$

לכל $u \in V$, כאשר השוויון הראשון נובע מ-6.30א). לפיכך בהגדרת

$$v = \overline{\varphi(e_1)} e_1 + \dots + \overline{\varphi(e_n)} e_n, \quad \text{נקבל } \varphi(u) = \langle u, v \rangle \text{ לכל } u \in V, \text{ כפי שרצינו.}$$

כעת נוכיח כי רק וקטור אחד $v \in V$ מקיים את התכונה הרצויה. נניח ש- $v_1, v_2 \in V$ הם כך ש-

$$\varphi(u) = \langle u, v_1 \rangle = \langle u, v_2 \rangle$$

לכל $u \in V$. אזי

$$0 = \langle u, v_1 \rangle - \langle u, v_2 \rangle = \langle u, v_1 - v_2 \rangle$$

לכל $u \in V$. בחירת $u = v_1 - v_2$ מראה לנו ש- $v_1 - v_2 = 0$. לפיכך $v_1 = v_2$, ובזאת הושלמה הוכחת חלק היחידות של המסקנה.

6.44 דוגמה: חישוב המכפלה את משפט ההצגה של ריס

נניח שאנו רוצים למצוא פולינום $q \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ כך ש-

$$\int_{-1}^1 p(t)(\cos(\pi t)) dt = \int_{-1}^1 pq$$

6.45 לכל פולינום $p \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$. לשם כך, נהפוך את $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ למרחב מכפלה פנימית על ידי כך שנגדיר את $\langle p, q \rangle$ כאגף הימני של המשוואה לעיל עבור $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$. נשים לב כי האגף השמאלי של המשוואה לעיל אינו שווה למכפלה הפנימית ב- $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ של p והפונקציה $\cos(\pi t) \mapsto t$ שכן הפונקציה האחרונה אינה פולינום.

נגדיר פונקציונל ליניארי φ מעל $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ על ידי

$$\varphi(p) = \int_{-1}^1 p(t)(\cos(\pi t)) dt$$

לכל $p \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$. כעת נשתמש בבסיס האורתונורמלי מדוגמה 6.34 וניישם עליו את נוסחה 6.43 מההוכחה של משפט ההצגה של ריס כדי לראות שאכן אם $p \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$, אזי $\varphi(p) = \langle p, q \rangle$ כאשר

$$q(x) = \left(\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{2}} \cos(\pi t) dt \right) \sqrt{\frac{1}{2}} + \left(\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}} t \cos(\pi t) dt \right) \sqrt{\frac{3}{2}} x + \left(\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{45}{8}} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right) \cos(\pi t) dt \right) \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right).$$

מעט חשבון אינפיניטסימלי המיושם על המשוואה מראה לנו כי

$$q(x) = \frac{15}{2\pi^2} (1 - 3x^2).$$

אותו התהליך מראה שאם ברצוננו למצוא $q \in \mathcal{P}_5(\mathbf{R})$ כך ש- 6.45 מתקיים לכל $p \in \mathcal{P}_5(\mathbf{R})$, אזי עלינו לבחור

$$q(x) = \frac{105}{8\pi^4} \left((27 - 2\pi^2) + (24\pi^2 - 270)x^2 + (315 - 30\pi^2)x^4 \right).$$

נניח ש- V מממד סופי ו- φ פונקציונל ליניארי מעל V . אזי 6.43 מעניקה לנו את הנוסחה לוקטור v המקיים

$$\varphi(u) = \langle u, v \rangle$$

לכל $u \in V$. ליתר דיוק, קיבלנו

$$v = \overline{\varphi(e_1)}e_1 + \cdots + \overline{\varphi(e_n)}e_n.$$

האגף הימני של המשוואה לעיל נראה תלוי בבסיס האורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ כמו גם ב- φ . אולם, 6.42 קובעת ש- v נקבע באופן יחיד על ידי φ . לפיכך האגף הימני של המשוואה לעיל נותר בעינו ללא תלות בזהות הבסיס האורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ של V שנבחר.

לשתי הוכחות נוספות למשפט ההצגה של ריס, ראו 6.58 ובנוסף תרגיל 13 ביחידה 31.

1 נניח ש- $e_1, \dots, e_m$ רשימת וקטורים ב- V כך ש-

$$\|a_1 e_1 + \dots + a_m e_m\|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_m|^2$$

לכל $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$. הראו ש- $e_1, \dots, e_m$ רשימה אורתונורמלית.

תרגיל זה מספק את הכיוון ההפוך של התוצאה ב-6.24.

2 א. נניח ש- $\theta \in \mathbb{R}$. הראו ששתי הרשימות

$$(\cos \theta, \sin \theta), (-\sin \theta, \cos \theta) \quad \text{ו-} \quad (\cos \theta, \sin \theta), (\sin \theta, -\cos \theta)$$

בסיסים אורתונורמליים של $\mathbb{R}^2$.

ב. הראו שכל בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^2$ הוא מהצורה הנתונה על ידי אחת משתי האפשרויות בסעיף (א).

3 נניח ש- $e_1, \dots, e_m$ רשימה אורתונורמלית ב- V ו- $v \in V$. הוכיחו ש-

$$\|v\|^2 = |\langle v, e_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, e_m \rangle|^2 \iff v \in \text{span}(e_1, \dots, e_m).$$

4 נניח ש- n מספר שלם חיובי. הוכיחו ש-

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

רשימה אורתונורמלית של וקטורים ב- $C[-\pi, \pi]$, המרחב הווקטורי של פונקציות רציפות ממשיות מעל $[-\pi, \pi]$ עם מכפלה פנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg.$$

רמז: העזרו בנוסחאות הבאות.

$$(\sin x)(\cos y) = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$$

$$(\sin x)(\sin y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$(\cos x)(\cos y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

5 נניח ש- $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. לכל מספר שלם אי-שלילי k , הגדירו

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \text{וגם} \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

הוכיחו ש-

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

האי-שוויון לעיל הוא למעשה שוויון לכל הפונקציות הרציפות $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$. אולם, להוכיח כי אי-שוויון זה הוא למעשה שוויון ידרוש שימוש בטכניקות טור פורייה החורגות מתחומי של ספר זה.

6 נניח ש- $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V .

א. הוכיחו שאם $v_1, \dots, v_n$ וקטורים ב- V כך ש-

$$\|e_k - v_k\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

לכל k , אזי $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V .

ב. הראו שקיימים $v_1, \dots, v_n \in V$ כך ש-

$$\|e_k - v_k\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

לכל k , אבל אינה בלתי תלויה ליניארית.

תרגיל זה קובע בסעיף (א) כי בסיס אורתונורמלי ששובש במידה זעירה הוא עדיין בסיס. לאחר מכן סעיף (ב) מראה שהמספר $1/\sqrt{n}$ באגף הימני של האי-שוויון בסעיף (א) אינו יכול להיות גבוה יותר.

7 נניח שיש ל- $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס $(1, 1, 2), (1, 1, 1), (1, 0, 0)$. מצאו בסיס אורתונורמלי של $\mathbf{R}^3$ אשר ביחס אליו יש ל- T מטריצה משולשית עליונה.

8 הפכו את $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ למרחב מכפלה פנימית באמצעות הגדרת $\langle p, q \rangle = \int_0^1 pq$ לכל $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$.

א. הפעילו את תהליך גרס-שמידט על הבסיס $1, x, x^2$ ליצירת בסיס אורתונורמלי של $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$.

ב. לאופרטור הגזירה (האופרטור המעתיק p אל p') מעל $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ יש מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס $1, x, x^2$, שהוא אינו בסיס אורתונורמלי. מצאו את המטריצה של אופרטור הגזירה מעל $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ ביחס לבסיס האורתונורמלי שיצרנו בסעיף (א) וודאו כי זו אכן מטריצה משולשית עליונה, כמצופה מההוכחה של 6.37.

9 נניח ש- $e_1, \dots, e_m$ הוא תוצאת הפעלת תהליך גרס-שמידט על רשימה בלתי תלויה ליניארית $v_1, \dots, v_m$ ב- V . הוכיחו ש- $\langle v_k, e_k \rangle > 0$ לכל $k = 1, \dots, m$.

10 נניח ש- $v_1, \dots, v_m$ רשימה בלתי תלויה ליניארית ב- V . הסבירו מדוע הרשימה האורתונורמלית הנוצרת באמצעות הנוסחאות של תהליך גרס-שמידט (6.32) היא הרשימה האורתונורמלית היחידה $e_1, \dots, e_m$ ב- V כך ש- $\langle v_k, e_k \rangle > 0$ ו- $\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$ לכל $k = 1, \dots, m$. בהוכחה של 7.58 אנו מבצעים שימוש במסקנה של תרגיל זה.

11 מצאו פולינום $q \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ כך ש- $p(\frac{1}{2}) = \int_0^1 pq$ לכל $p \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$.

12 מצאו פולינום $q \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ כך ש-

$$\int_0^1 p(x) \cos(\pi x) dx = \int_0^1 pq$$

לכל $p \in \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$.

13 הראו שרשימה $v_1, \dots, v_m$ של וקטורים ב- V היא תלויה ליניארית אם-ורק-אם נוסחת גרס-שמידט ב-6.32 מפיקה $f_k = 0$ עבור $k \in \{1, \dots, m\}$ כלשהו. תרגיל זה מספק חלופה לשיטת החילוץ של גאוס לדירוג מטריצות לקביעה האם רשימת וקטורים במרחב מכילה פנימית תלויה ליניארית.

14 נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ממשי ו- $v_1, \dots, v_m$ רשימה בלתי תלויה ליניארית של וקטורים ב- V . הוכיחו כי קיימות בדיוק 2^m רשימות אורתונורמליות $e_1, \dots, e_m$ של וקטורים ב- V כך ש-

$$\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k) \quad \text{לכל } k \in \{1, \dots, m\}$$

15 נניח ש- $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ ו- $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ הן מכפלות פנימיות מעל V כך ש- $\langle u, v \rangle_1 = 0$ אם-ורק-אם $\langle u, v \rangle_2 = 0$. הוכיחו שקיים מספר חיובי c כך ש- $\langle u, v \rangle_1 = c \langle u, v \rangle_2$ לכל $u, v \in V$.

תרגיל זה מראה שאם לשתי מכפלות פנימיות אותם זוגות של וקטורים אורתוגונליים, אזי כל אחת מהמכפלות הפנימיות היא כפולת סקלר של המכפלה הפנימית האחרת.

16 נניח ש- V מממד סופי. נניח ש- $\langle \cdot, \cdot \rangle_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_2$ מכפלות פנימיות מעל V עם הנורמות $\|\cdot\|_1$ ו- $\|\cdot\|_2$ בהתאמה. הוכיחו שקיים מספר חיובי c כך ש- $\|v\|_1 \leq c\|v\|_2$ לכל $v \in V$.

17 נניח ש- $F = \mathbb{C}$ ו- V מממד סופי. הוכיחו שאם T הוא אופרטור מעל V כך ש- 1 הוא הערך העצמי היחיד של T ו- $\|Tv\| \leq \|v\|$ לכל $v \in V$, אזי T הוא אופרטור הזהות.

18 נניח ש- $u_1, \dots, u_m$ רשימה בלתי תלויה ליניארית ב- V . הראו שקיים $v \in V$ כך ש- $\langle u_k, v \rangle = 1$ לכל $k \in \{1, \dots, m\}$.

19 נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V . הוכיחו שקיים בסיס $u_1, \dots, u_n$ של V כך ש-

$$\langle v_j, u_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq k, \\ 1 & \text{if } j = k. \end{cases}$$

20 נניח ש- $F = \mathbb{C}$, V מממד סופי, ו- $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{L}(V)$ כך ש- $ST = TS$

לכל $S, T \in \mathcal{E}$. הוכיחו שקיים בסיס אורתונורמלי של V אשר ביחס אליו לכל איבר ב- $\mathcal{E}$ יש מטריצה משולשית עליונה.

תרגיל זה פוזק את תרגיל 9(ב) ביחידה 5 (בהקשר של מרחבי מכפלה פנימית) בכך שקובע כי את הבסיס בתרגיל ההוא אפשר לבחור שיהיה אורתונורמלי.

21 נניח ש- $F = \mathbb{C}$, ו- V מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V)$, והערך המוחלט של כל אחד מהערכים העצמיים של T קטן מ-1. יהי $\epsilon > 0$. הוכיחו שקיים מספר שלם חיובי m כך ש- $\|T^m v\| \leq \epsilon \|v\|$ לכל $v \in V$.

- 22 נניח ש- $C[-1, 1]$ הוא המרחב הווקטורי של פונקציות ממשיות רציפות מעל הקטע $[-1, 1]$ עם מכפלה פנימית המוגדרת על ידי

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg$$

לכל $f, g \in C[-1, 1]$. יהי φ הפונקציונל הליניארי מעל $C[-1, 1]$ המוגדר על ידי $\varphi(f) = f(0)$. הראו שלא קיים $g \in C[-1, 1]$ כך ש-

$$\varphi(f) = \langle f, g \rangle$$

לכל $f \in C[-1, 1]$.

תרגיל זה מראה כי משפט ההצגה של ריס (6.42) אינו מתקיים מעל מרחב וקטורי מממד אינסופי ללא הנחות נוספות בנוגע ל- V ו- φ .

- 23 לכל $u, v \in V$, הגדירו $d(u, v) = \|u - v\|$

א. הראו ש- d היא מטריקה מעל V .

ב. הראו שאם V מממד סופי, אזי d מטריקה שלמה מעל V (כלומר, כל סדרת קושי היא סדרה מתכנסת).

ג. הראו שכל תת-מרחב מממד סופי של V הוא תת-קבוצה סגורה של V (ביחס למטריקה d).

תרגיל זה דורש היכרות עם מרחבים מטריים.

אורתוגונליות בבית המשפט העליון

פרופסור למשפטים ריצ'רד פרידמן מייצג תיק בפני בית המשפט העליון של ארה"ב בשנת 2010:

מר פרידמן: אני סבור שהעניין ההוא, הוא לחלוטין אורתוגונלי לסוגיה הנדונה מאחר שהמדינה כבר מכירה ב-

נשיא בית המשפט העליון השופט רוברטס: סליחה. לחלוטין מה?

מר פרידמן: אורתוגונלי. זווית ישרה. לא קשור. לא רלוונטי.

נשיא בית המשפט העליון השופט רוברטס: אההם.

השופט סקליה: מה היה שם התואר הזה? אהבתי אותו.

מר פרידמן: אורתוגונלי.

נשיא בית המשפט העליון השופט רוברטס: אורתוגונלי.

מר פרידמן: נכון, נכון.

השופט סקליה: אורתוגונלי, הו הו. (צחוק).

השופט קנדי: ידעתי שהתיק הזה הולך להיות בעייתי. (צחוק).

31 משלימים אורתוגונליים ובעיות מזעור

משלימים אורתוגונליים

6.46 הגדרה: משלים אורתוגונלי, $U^\perp$

אם U תת-קבוצה של V , אזי המשלים האורתוגונלי של U , המסומן על ידי $U^\perp$, הוא קבוצת כל הווקטורים ב- V האורתוגונליים לכל וקטור ב- U :
 $U^\perp = \{v \in V : \langle u, v \rangle = 0 \text{ לכל } u \in U\}.$

המשלים האורתוגונלי $U^\perp$ תלוי ב- V כמו גם ב- U . אולם, מרחב המכפלה הפנימית V אמור תמיד להיות ברור מההקשר, ולפיכך הוא מושמט מהסימון.

6.47 דוגמה: משלימים אורתוגונליים

- אם $V = \mathbb{R}^3$ ו- U תת-קבוצה של V המורכבת מהנקודה היחידה $(2, 3, 5)$, אזי $U^\perp$ הוא המישור $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 5z = 0\}$.
- אם $V = \mathbb{R}^3$ ו- U הוא המישור $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 5z = 0\}$, אזי $U^\perp$ הוא הישר $\{(2t, 3t, 5t) : t \in \mathbb{R}\}$.
- באופן כללי, אם U מישור ב- $\mathbb{R}^3$ העובר דרך ראשית הצירים, אזי $U^\perp$ הוא הישר העובר דרך ראשית הצירים ומאונך ל- U .
- אם U ישר ב- $\mathbb{R}^3$ העובר דרך ראשית הצירים, אזי $U^\perp$ הוא המישור העובר דרך ראשית הצירים ומאונך ל- U .
- אם $V = \mathbb{F}^5$ ו- $U = \{(a, b, 0, 0, 0) \in \mathbb{F}^5 : a, b \in \mathbb{F}\}$, אזי $U^\perp = \{(0, 0, x, y, z) \in \mathbb{F}^5 : x, y, z \in \mathbb{F}\}$.
- אם $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_n$ בסיס אורתונורמלי של V , אזי $(\text{span}(e_1, \dots, e_m))^\perp = \text{span}(f_1, \dots, f_n)$.

נפתח במספר השלכות ישירות הנובעות מההגדרה.

6.48 תכונות של משלים אורתוגונלי

- אם U תת-קבוצה של V , אזי $U^\perp$ תת-מרחב של V .
- $\{0\}^\perp = V$.
- $V^\perp = \{0\}$.
- אם U תת-קבוצה של V , אזי $U \cap U^\perp \subseteq \{0\}$.
- אם G ו- H תתי-קבוצה של V ו- $G \subseteq H$, אזי $H^\perp \subseteq G^\perp$.

א. נניח ש- U תת-קבוצה של V . אזי $\langle u, 0 \rangle = 0$ לכל $u \in U$; לפיכך $0 \in U^\perp$.

נניח ש- $v, w \in U^\perp$. אם $u \in U$, אזי

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle = 0 + 0 = 0.$$

לפיכך $v + w \in U^\perp$, מה שמראה ש- $U^\perp$ סגור תחת פעולת החיבור.

באופן דומה, נניח ש- $\lambda \in F$ ו- $v \in U^\perp$. אם $u \in U$, אזי

$$\langle u, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle = \bar{\lambda} \cdot 0 = 0.$$

לפיכך $\lambda v \in U^\perp$, מה שמראה ש- $U^\perp$ סגור תחת פעולת כפל בסקלר. לפיכך $U^\perp$ תת-מרחב של V .

ב. נניח ש- $v \in V$. אזי $\langle 0, v \rangle = 0$, מה שגורר ש- $v \in \{0\}^\perp$. לפיכך $V = \{0\}^\perp$.

ג. נניח ש- $v \in V^\perp$. אזי $\langle v, v \rangle = 0$, מה שגורר ש- $v = 0$. לפיכך $V^\perp = \{0\}$.

ד. נניח ש- U תת-קבוצה של V ו- $u \in U \cap U^\perp$. אזי $\langle u, u \rangle = 0$, מה שגורר ש- $u = 0$. לפיכך $U \cap U^\perp \subseteq \{0\}$.

ה. נניח ש- G ו- H תתי-קבוצה של V ו- $G \subseteq H$. נניח ש- $v \in H^\perp$. אזי $\langle u, v \rangle = 0$ לכל $u \in H$, מה שגורר ש- $\langle u, v \rangle = 0$ לכל $u \in G$. לכן $v \in G^\perp$. לפיכך $H^\perp \subseteq G^\perp$. ■

נזכיר שאם U ו- W תתי-מרחב של V , אזי V הוא הסכום הישר של U ו- W (נכתוב $V = U \oplus W$) אם כל איבר של V ניתן לכתיבה באופן יחיד כווקטור ב- U ועוד וקטור ב- W (ראו 1.41). יתר על כן, הדבר קורה אם-ורק אם $V = U + W$ ו- $U \cap W = \{0\}$ (ראו 1.46).

המסקנה הבאה מראה כי כל תת-מרחב מממד סופי של V מוביל לפירוק טבעי של V באמצעות סכום ישר. ראו תרגיל 16 לדוגמה הממחישה כי המסקנה להלן יכולה להיכשל ללא ההנחה כי התת-מרחב U מממד סופי.

6.49 סכום ישר של תת-מרחב והמשלים האורתוגונלי שלו

נניח ש- U תת-מרחב של V מממד סופי. אזי $V = U \oplus U^\perp$.

הוכחה תחילה נראה כי

$$V = U + U^\perp.$$

לצורך כך, נניח ש- $v \in V$. יהי $e_1, \dots, e_m$ בסיס אורתונורמלי של U . נרצה לכתוב את v כסכום של וקטור ב- U ווקטור אורתוגונלי ל- U .

מתקיים

$$6.50 \quad v = \underbrace{\langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_m \rangle e_m}_u + \underbrace{v - \langle v, e_1 \rangle e_1 - \dots - \langle v, e_m \rangle e_m}_w.$$

יהיו u ו- w מוגדרים כפי שמופיע במשוואה לעיל (כפי שעשינו בהוכחת 6.26). מאחר שכל $e_k \in U$, אנו רואים כי $u \in U$. מאחר ש- $e_1, \dots, e_m$ רשימת וקטורים אורתונורמלית, לכל $k = 1, \dots, m$ נקבל

$$\langle w, e_k \rangle = \langle v, e_k \rangle - \langle v, e_k \rangle$$

$$= 0.$$

לפיכך w אורתוגונלי לכל וקטור ב- $\text{span}(e_1, \dots, e_m)$, מה שמראה ש- $w \in U^\perp$. לכן כתבנו $v = u + w$, כאשר $u \in U$ ו- $w \in U^\perp$, ובכך השלמנו את ההוכחה לכך ש- $V = U + U^\perp$.

מ-6.48 (ד), אנו יודעים ש- $U \cap U^\perp = \{0\}$. כעת המשוואה $V = U + U^\perp$ גוררת ש- $V = U \oplus U^\perp$ (ראו 1.46).

כעת נוכל לראות איך ניתן לחשב את $\dim U^\perp$ מתוך $\dim U$.

6.51 ממד של משלימים אורתוגונלי

נניח ש- V מממד סופי ו- U תת-מרחב של V . אזי $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$.

הוכחה הנוסחה עבור $\dim U^\perp$ נובעת ישירות מ-6.49 ו-3.94.

המסקנה הבאה היא תוצאה חשובה של 6.49.

6.52 משלימים אורתוגונלי של המשלימים האורתוגונלי

נניח ש- U תת-מרחב של V מממד סופי. אזי $U = (U^\perp)^\perp$.

הוכחה תחילה נראה כי

$$6.53 \quad U \subseteq (U^\perp)^\perp.$$

לצורך כך, נניח ש- $u \in U$. אזי $\langle u, w \rangle = 0$ לכל $w \in U^\perp$ (לפי הגדרת $U^\perp$). מאחר ש- u אורתוגונלי לכל וקטור ב- $U^\perp$, הרי ש- $u \in (U^\perp)^\perp$, ובכך הושלמה הוכחת 6.53. להוכחת ההכלה בכיוון השני, נניח ש- $v \in (U^\perp)^\perp$. לפי 6.49, נוכל לכתוב $v = u + w$, כאשר $u \in U$ ו- $w \in U^\perp$. מתקיים $w = v - u \in U^\perp$. מאחר ש- $v \in (U^\perp)^\perp$ ו- $w \in U^\perp$, לפי 6.53, $u = v - w \in (U^\perp)^\perp \cap U^\perp$. לפיכך $u \in (U^\perp)^\perp \cap U^\perp$. מה שגורר ש- $v - u = 0$ [לפי 6.48 (ד)], מה שגורר ש- $v = u$, מה שגורר ש- $v \in U$. לפיכך $(U^\perp)^\perp \subseteq U$; נתון זה יחד עם 6.53 משלים את ההוכחה.

תרגיל 16 (א) מראה כי המסקנה להלן אינה נכונה ללא ההנחה כי U מממד סופי.

נניח ש- U תת-מרחב של V ואנו מעוניינים להראות כי $U = V$ במצבים מסוימים, הדרך הקלה ביותר לעשות זאת היא להראות כי הווקטור היחידי האורתוגונלי ל- U הוא וקטור ה-0, ואז להשתמש במסקנה להלן. לדוגמה, המסקנה להלן שימושית עבור תרגיל 4.

$$U^\perp = \{0\} \iff U = V \quad 6.54 \quad (\text{עבור } U \text{ תת-מרחב של } V \text{ מממד סופי})$$

נניח ש- U תת-מרחב של V מממד סופי. אזי

$$U^\perp = \{0\} \iff U = V.$$

הוכחה תחילה נניח ש- $U^\perp = \{0\}$. מכאן, לפי 6.52, $U = (U^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = V$, כפי שרצינו.

בכיוון ההפוך, אם $U = V$, אזי $U^\perp = V^\perp = \{0\}$ לפי 6.48 (ג).

כעת אנו מגדירים אופרטור P_U לכל תת-מרחב U של V מממד סופי.

6.55 הגדרה: היטל אורתוגונלי, P_U

נניח ש- U תת-מרחב של V מממד סופי. ההיטל האורתוגונלי של v על U הוא האופרטור $P_U \in \mathcal{L}(V)$ המוגדר על ידי: לכל $v \in V$, נכתוב $v = u + w$, כאשר $u \in U$ ו- $w \in U^\perp$ ואז נגדיר $P_U v = u$.

הפירוק באמצעות סכום ישר $V = U \oplus U^\perp$ שקיבלנו ב-6.49 מראה שכל $v \in V$ יכול להיכתב באופן יחיד בצורה $v = u + w$ עם $u \in U$ ו- $w \in U^\perp$. לפיכך $P_U v$ מוגדר היטב. ראו את השרטוט המצורף להוכחה של 6.61 לתמונה המתארת את $P_U v$ שעליכם לנצור בתודעתכם.

6.56 דוגמה: היטל אורתוגונלי על תת-מרחב חד-ממדי

נניח ש- $u \in V$ עם $u \neq 0$ ו- U תת-מרחב חד-ממדי של V המוגדר על ידי $U = \text{span}(u)$. אם $v \in V$, אזי

$$v = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u + \left(v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u \right),$$

כאשר הביטוי הראשון באגף הימני הוא ב- $\text{span}(u)$ (ולפיכך ב- U) והביטוי השני באגף הימני הוא אורתוגונלי ל- u (ולפיכך ב- $U^\perp$). לפיכך $P_U v$ שווה לביטוי הראשון באגף הימני. במילים אחרות, בידינו הנוסחה

$$P_U v = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

לכל $v \in V$.

הנוסחה לעיל הופכת ל- $P_U u = u$ אם $v = u$ והופכת ל- $P_U v = 0$ אם $v \in \{u\}^\perp$. משוואות אלו הן מקרים פרטיים של (ב) ו- (ג) במסקנה הבאה.

6.57 מאפיינים של ההיטל האורתוגונלי P_U

נניח ש- U תת-מרחב של V מממד סופי. אזי

א. $P_U \in \mathcal{L}(V)$.

ב. $P_U u = u$ לכל $u \in U$.

ג. $P_U w = 0$ לכל $w \in U^\perp$.

ד. $\text{range } P_U = U$.

ה. $\text{null } P_U = U^\perp$.

ו. $P_U v \in U$ לכל $v \in V$.

ז. $P_U^2 = P_U$.

ח. $\|P_U v\| \leq \|v\|$ לכל $v \in V$.

ט. אם $e_1, \dots, e_m$ בסיס אורתונורמלי של U ו- $v \in V$, אזי

$$P_U v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_m \rangle e_m.$$

הוכחה

א. כדי להראות ש- P_U העתקה ליניארית מעל V , נניח ש- $v_1, v_2 \in V$. נכתוב

$$v_1 = u_1 + w_1 \quad \text{וגם} \quad v_2 = u_2 + w_2$$

עם $u_1, u_2 \in U$ ו- $w_1, w_2 \in U^\perp$. לפיכך $P_U v_1 = u_1$ ו- $P_U v_2 = u_2$. כעת

$$v_1 + v_2 = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2),$$

כאשר $u_1 + u_2 \in U$ ו- $w_1 + w_2 \in U^\perp$. לפיכך

$$P_U(v_1 + v_2) = u_1 + u_2 = P_U v_1 + P_U v_2.$$

באופן דומה, נניח ש- $\lambda \in \mathbb{F}$ ו- $v \in V$. נכתוב $v = u + w$, כאשר $u \in U$ ו- $w \in U^\perp$. אזי $\lambda v = \lambda u + \lambda w$ עם $\lambda u \in U$ ו- $\lambda w \in U^\perp$. לפיכך

$$P_U(\lambda v) = \lambda u = \lambda P_U v.$$

לכן P_U העתקה ליניארית מ- V אל V .

ב. נניח ש- $u \in U$. נוכל לכתוב $u = u + 0$, כאשר $u \in U$ ו- $0 \in U^\perp$. לפיכך

$$P_U u = u$$

ג. נניח ש- $w \in U^\perp$. נוכל לכתוב $w = 0 + w$, כאשר $0 \in U$ ו- $w \in U^\perp$. לפיכך

$$P_U w = 0$$

ד. ההגדרה של P_U גוררת ש- $\text{range } P_U \subseteq U$. יתר על כן, (ב) גוררת ש- $U \subseteq \text{range } P_U$. לפיכך $\text{range } P_U = U$.

ה. ההכלה $U^\perp \subseteq \text{null } P_U$ נובעת מ- (ג). להוכחת ההכלה בכיוון ההפוך, נשים לב כי

אם $v \in \text{null } P_U$ אזי הפירוק שקיבלנו על ידי 6.49 חייב להיות $v = 0 + v$, כאשר

$$0 \in U \quad \text{ו-} \quad v \in U^\perp \quad \text{לפיכך} \quad v \in \text{null } P_U.$$

ו. אם $v \in V$ ו- $w \in U^\perp$ עם $v = u + w$ אזי $v - P_U v = v - u = w \in U^\perp$.

ז. אם $v \in V$ ו- $w \in U^\perp$ עם $v = u + w$ אזי $(P_U^2)v = P_U(P_U v) = P_U u = u = P_U v$.

ח. אם $v \in V$ ו- $w \in U^\perp$ עם $v = u + w$ אזי $\|P_U v\|^2 = \|u\|^2 \leq \|u\|^2 + \|w\|^2 = \|v\|^2$,
כאשר השוויון האחרון מגיע ממשפט פיתגורס.

ט. הנוסחה עבור $P_U v$ נובעת ממשוואה 6.50 בהוכחה של 6.49.

ביחידה הקודמת הוכחנו את משפט ההצגה של ריס (6.42), אשר חלקו העיקרי קובע כי כל פונקציונל ליניארי מעל מרחב מכפלה פנימית מממד סופי נתון על ידי המכפלה הפנימית עם וקטור קבוע כלשהו. היכרות עם הוכחה שונה לעיתים קרובות מספקת תובנות חדשות. לפיכך נציג כעת הוכחה נוספת לחלקו העיקרי של משפט ההצגה של ריס תוך שימוש במשלימים אורתוגונליים במקום בבסיסים אורתונורמליים כפי שעשינו בהוכחה הקודמת.

הניסוח מחדש של משפט ההצגה של ריס המובא להלן מספק זיהוי של V עם V' . אנו נוכיח רק את חלק ה"על" של המסקנה להלן מאחר שחלק ה"חד-חד-ערכית" השגרתי יותר ניתן להוכחה כמו ב- 6.42.

אינטואיציה מאחורי הוכחה זו: אם $v \in V$, $\varphi \in V'$ ו- $\varphi(u) = \langle u, v \rangle$ לכל $u \in V$, אזי $v \in (\text{null } \varphi)^\perp$. אולם, $v \in (\text{null } \varphi)^\perp$ אולי, אבל $\varphi = 0$, כפי שנובע מ- 6.51 ו- 3.21. לפיכך נוכל לקבל את v בבחירת כל איבר השונה מאפס ב- $(\text{null } \varphi)^\perp$ ואז הכפלתו בסקלר המתאים, כפי שמבוצע בהוכחה להלן.

6.58 משפט ההצגה של ריס, היבט חדש

נניח ש- V מממד סופי. לכל $v \in V$, נגדיר $\varphi_v \in V'$ על ידי $\varphi_v(u) = \langle u, v \rangle$ לכל $u \in V$. אזי $v \mapsto \varphi_v$ היא פונקציה חד-חד-ערכית מ- V על V' .

זיהוי: הפונקציה $v \mapsto \varphi_v$ היא העתקה ליניארית מ- V אל V' אם $F = \mathbb{R}$. אולם, פונקציה זו אינה ליניארית אם $F = \mathbb{C}$ שכן $\varphi_{\lambda v} = \bar{\lambda} \varphi_v$ אם $\lambda \in \mathbb{C}$.

הוכחה כדי להראות ש- $v \mapsto \varphi_v$ על, נניח ש- $\varphi \in V'$, אם $\varphi = 0$, אזי $\varphi = \varphi_0$. לפיכך נניח ש- $\varphi \neq 0$. לכן $\text{null } \varphi \neq V$, מה שגורר ש- $\{\text{null } \varphi\}^\perp \neq \{0\}$ (לפי 6.49 עם $U = \text{null } \varphi$).

יהי $w \in (\text{null } \varphi)^\perp$ כך ש- $w \neq 0$. נגדיר

$$v = \frac{\varphi(w)}{\|w\|^2} w.$$

אזי $v \in (\text{null } \varphi)^\perp$. בנוסף, $v \neq 0$ (מאחר ש- $w \notin \text{null } \varphi$).

חישוב הנורמה של שני האגפים של 6.59 נותן לנו

$$\|v\| = \frac{|\varphi(w)|}{\|w\|}. \quad 6.60$$

הפעלת φ על שני האגפים של 6.59 ואז שימוש ב- 6.60 נותנים לנו

$$\varphi(v) = \frac{|\varphi(w)|^2}{\|w\|^2} = \|v\|^2.$$

קעת נניח ש- $u \in V$. בשימוש במשוואה לעיל, נקבל

$$u = \left(u - \frac{\varphi(u)}{\varphi(v)} v \right) + \frac{\varphi(u)}{\|v\|^2} v.$$

הביטוי הראשון בסוגריים לעיל הוא ב- $\text{null } \varphi$ ולכן הוא אורתוגונלי ל- v . לפיכך חישוב מכפלה פנימית של שני אגפי המשוואה לעיל עם v מראה ש-

$$\langle u, v \rangle = \frac{\varphi(u)}{\|v\|^2} \langle v, v \rangle = \varphi(u).$$

לפיכך $\varphi = \varphi_v$ מה שמראה כי $v \mapsto \varphi_v$ על, כפי שרצינו.

ראו תרגיל 13 להוכחה נוספת למשפט ההצגה של ריס.

בעיות מזעור

הפשוטות הראויה לציון של הפתרון לבעיית מזעור זו הובילה ליישומים חשובים רבים של מרחבי מכפלה פנימית מחוץ לגבולות המתמטיקה העיונית.

הבעיה להלן עולה לעיתים קרובות: בהינתן תת-מרחב U של V ונקודה $v \in V$, מצאו נקודה $u \in U$ כך ש- $\|v - u\|$ קטן ככל האפשר. המסקנה הבאה מראה כי $u = P_U v$ הוא הפתרון היחיד לבעיית המזעור הזו.

6.61 מזעור מרחק לתת-מרחב

נניח ש- U תת-מרחב של V מממד סופי, $v \in V$, ו- $u \in U$. אזי

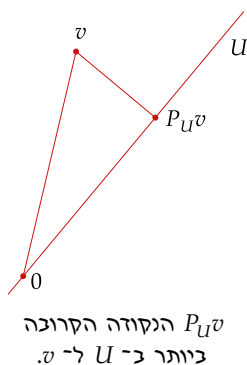
$$\|v - P_U v\| \leq \|v - u\|.$$

יתר על כן, האי-שוויון לעיל הוא שוויון אם ורק אם $u = P_U v$.

הוכחה מתקיים

6.62

$$\begin{aligned} \|v - P_U v\|^2 &\leq \|v - P_U v\|^2 + \|P_U v - u\|^2 \\ &= \|(v - P_U v) + (P_U v - u)\|^2 \\ &= \|v - u\|^2, \end{aligned}$$



כאשר השורה הראשונה לעיל מתקיימת מאחר ש- $0 \leq \|P_U v - u\|^2$, השורה השנייה לעיל נובעת ממשפט פיתגורס [הניתן ליישום מאחר ש- $v - P_U v \in U^\perp$ לפי 6.57(ו)], והשורה השלישית מתקיימת על ידי אלגברה פשוטה. הוצאת שורשים מעניקה לנו את התוצאה המבוקשת.

האי-שוויון שהוכחנו לעיל הוא שוויון אס-ורק-אם 6.62 שוויון, שקורה אס-ורק-אם $\|P_U v - u\| = 0$, שקורה אס-ורק-אם $u = P_U v$.

המסקנה האחרונה משולבת לעיתים קרובות עם נוסחה 6.57(ט) לחישוב פתרונות מפורשים לבעיות מזעור, כמובא בדוגמה להלן.

6.63 דוגמה: שימוש באלגברה ליניארית לחישוב קירובים עבור הפונקציה סינוס

נניח שאנו מעוניינים למצוא פולינום u עם מקדמים ממשיים שמעלתו לכל היותר 5 שמספק את הקירוב הטוב ביותר האפשרי לפונקציית הסינוס מעל הקטע $[-\pi, \pi]$, במובן ש-

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x - u(x)|^2 dx$$

קטן ככל האפשר.

נסמן ב- $C[-\pi, \pi]$ את מרחב המכפלה הפנימית הממשי של פונקציות ממשיות רציפות מעל $[-\pi, \pi]$ עם מכפלה פנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg. \quad 6.64$$

נגדיר את $v \in C[-\pi, \pi]$ להיות הפונקציה המוגדרת על ידי $v(x) = \sin x$. נסמן ב- U את התת-מרחב של $C[-\pi, \pi]$ המורכב מהפולינומים עם מקדמים ממשיים שמעלתם 5 לכל היותר. כעת, נוכל לנסח מחדש את הבעיה שלנו באופן הבא:

קטן ככל האפשר $\|v - u\|$ כך ש- $u \in U$ מצאו.

תוכנת מחשב המסוגלת לחשב אינטגרציה תהיה שימושית כאן.

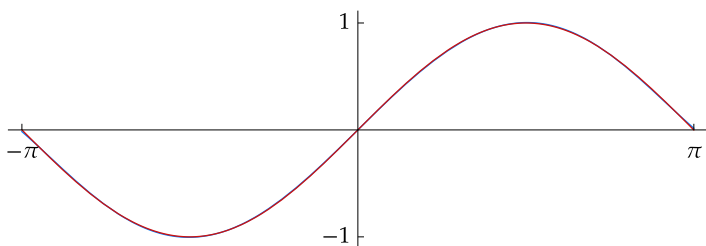
לחישוב הפתרון לבעיית הקירוב שלנו, תחילה ניישם את תהליך גרס-שמידט (בשימוש במכפלה הפנימית שנתונה ב-6.64)

על הבסיס $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$ של U , להפקת בסיס אורתונורמלי $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ של U . בשלב זה, תוך שימוש חוזר במכפלה הפנימית הנתונה ב-6.64, נחשב את $P_U v$ תוך שימוש ב-6.57(ט) (עם $m = 6$). ביצוע חישוב זה מראה ש- $P_U v$ היא הפונקציה u המוגדרת על ידי

$$u(x) = 0.987862x - 0.155271x^3 + 0.00564312x^5, \quad 6.65$$

כאשר ה- π ים המופיעים בנוסחה המדויקת הוחלפו בקירוב עשרוני טוב. לפי 6.61, הפולינום u הוא הקירוב הטוב ביותר לפונקציית הסינוס מעל הקטע $[-\pi, \pi]$ תוך שימוש בפולינומים שמעלתם 5 לכל היותר ("הקירוב הטוב ביותר" המוזכר כאן הוא במובן של מזעור $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x - u(x)|^2 dx$).

כדי להיווכח עד כמה טוב הקירוב הזה, האיור הבא מציג את הגרפים של פונקציית הסינוס ושל הקירוב שלנו u הנתונה על ידי 6.65 מעל הקטע $[-\pi, \pi]$.



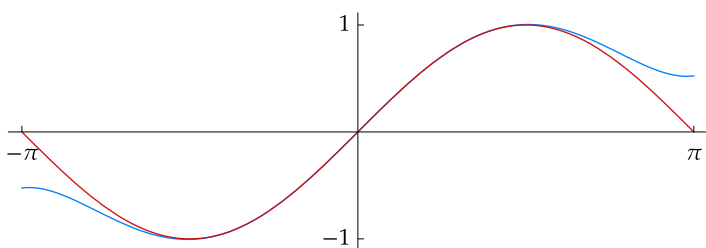
גרפים מעל $[-\pi, \pi]$ של פונקציית הסינוס (אדום) והקירוב מפעלה חמישית הטוב ביותר שלה u (כחול) מ- 6.65.

הקירוב 6.65 שלנו הוא מדויק כל כך עד שהגרפים כמעט זהים—עינינו עשויות לראות גרף אחד בלבד! הגרף האדום מונח כמעט במדויק מעל הגרף הכחול. אם אתם צופים בכך באמצעות מכשיר אלקטרוני, הגדילו את תצוגת התמונה לעיל ב-400% ליד π או $-\pi$ כדי לחזות בפער קטן בין שני הגרפים.

קירוב ידוע ומוכר אחר לפונקציית הסינוס באמצעות פולינום ממעלה 5 מתקבל מפולינום טיילור p המוגדר על ידי

$$p(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}. \quad 6.66$$

כדי להיווכח עד כמה טוב קירוב זה, האיור הבא מציג את הגרפים של פונקציית הסינוס ושל פולינום טיילור p מעל הקטע $[-\pi, \pi]$.



גרף מעל $[-\pi, \pi]$ של פונקציית הסינוס (אדום) ופולינום טיילור (כחול) מ- 6.66.

פולינום טיילור ממעלה 5 הוא קירוב מצוין ל- $\sin x$ עבור x הקרוב ל-0. אולם מהתמונה לעיל אנו רואים כי עבור $|x| > 2$, פולינום טיילור אינו מדויק עד כדי כך, בייחוד בהשוואה ל- 6.65. לדוגמה, עבור $x = 3$, הקירוב שלנו 6.65 מעריך את $\sin 3$ עם סטייה של כ-0.001, אך פולינום טיילור 6.66 מעריך את $\sin 3$ עם סטייה של כ-0.4. לפיכך עבור $x = 3$, סטייה של פולינום טיילור גדולה יותר במאות פעמים מהסטייה בתוצאה שקיבלנו על ידי 6.65. אלגברה ליניארית סייעה לנו לגלות קירוב לפונקציית הסינוס משופר מזה שלמדנו בחשבון אינפיניטסימלי!

פְּסִידוֹ-הוֹפְכִי

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $w \in W$. נדון בבעיית מציאת $v \in V$ כך ש-

$$Tv = w.$$

לדוגמה, אם $V = \mathbb{F}^m$ ו- $W = \mathbb{F}^n$, אזי המשוואה לעיל יכולה לייצג מערכת של m משוואות ליניאריות ב- n נעלמים $v_1, \dots, v_n$, כאשר $v = (v_1, \dots, v_n)$.

אם T הפיכה, אזי הפתרון היחיד של המשוואה לעיל הוא $v = T^{-1}w$. אולם, אם T אינה הפיכה, אזי עבור $w \in W$ כלשהו ייתכן שלמשוואה לעיל לא קיימים פתרונות, בעוד שעבור $w \in W$ אחר ייתכן שלמשוואה לעיל קיימים אינסוף פתרונות.

אם T אינה הפיכה, אזי עדיין נוכל לנסות להפיק את המיטב מן המשוואה לעיל. לדוגמה, אם למשוואה לעיל אין פתרונות, אזי במקום לפתור את המשוואה $Tv - w = 0$, נוכל לנסות למצוא $v \in V$ כך ש- $\|Tv - w\|$ הוא קטן ככל האפשר. כדוגמה נוספת, אם למשוואה לעיל יש אינסוף פתרונות $v \in V$, אזי מִבֵּין כל הפתרונות הללו נוכל לנסות למצוא פתרון שעבורו $\|v\|$ קטן ככל האפשר.

הפסידו-הופכי יספק לנו את הכלי לפתרון המשוואה לעיל במידת האפשר, גם כאשר T אינה הפיכה. נזדקק למסקנה הבאה כדי להגדיר את הפסידו-הופכי.

בשתי ההוכחות הבאות, נשתמש, בלא לציין זאת בכל פעם, בתוצאה שאם V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$, אזי $\text{null } T$, $(\text{null } T)^\perp$ ו- $\text{range } T$ כולם מממד סופי אף הם.

6.67 צמצום תחום העתקה ליניארית לקבלת העתקה חד-חד-ערכית ועל

נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי $T|_{(\text{null } T)^\perp}$ העתקה חד-חד-ערכית של $(\text{null } T)^\perp$ על $\text{range } T$.

הוכחה נניח ש- $v \in (\text{null } T)^\perp$ ו- $T|_{(\text{null } T)^\perp} v = 0$. לכן $Tv = 0$ ולפיכך $v \in \text{null } T$. לכן $(\text{null } T) \cap (\text{null } T)^\perp = \{0\}$. [לפי 6.48(ד)]. מה שגורר ש- $v = 0$. מה שגורר ש- $T|_{(\text{null } T)^\perp}$ חד-חד-ערכית, כפי שרצינו.

ברור כי $\text{range}(T|_{(\text{null } T)^\perp}) \subseteq \text{range } T$. להוכחת ההכלה בכיוון השני, נניח ש- $w \in \text{range } T$. לכן קיים $v \in V$ כך ש- $w = Tv$. קיימים $u \in \text{null } T$ ו- $x \in (\text{null } T)^\perp$ כך ש- $v = u + x$. (לפי 6.49). כעת

$$T|_{(\text{null } T)^\perp} x = Tx = Tv - Tu = w - 0 = w,$$

מה שמראה ש- $w \in \text{range } T|_{(\text{null } T)^\perp}$. לכן $\text{range } T \subseteq \text{range } T|_{(\text{null } T)^\perp}$, ובכך הושלמה ההוכחה ש- $\text{range } T|_{(\text{null } T)^\perp} = \text{range } T$. ■

להפכת הסימון לפְּסִידוֹ-הוֹפְכִי ב- $T_E^\dagger$,
 כתבו $T^\dagger$.

כעת נוכל להגדיר את הפְּסִידוֹ-הוֹפְכִי $T^\dagger$ (מבוטא "T dagger") של העתקה ליניארית T . בהגדרה הבאה (ומנקודה זו ואילך), חשבו על $T|_{(\text{null } T)^\perp}$ כהעתקה ליניארית הפיכה מ- $(\text{null } T)^\perp$ על $\text{range } T$. שהרי הצדקנו זאת במסקנה הקודמת.

6.68 הגדרה: הפְּסִידוֹ-הוֹפְכִי, $T^\dagger$

נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הפְּסִידוֹ-הוֹפְכִי $T^\dagger \in \mathcal{L}(W, V)$ של T הוא ההעתקה הליניארית מ- W אל V המוגדרת על ידי

$$T^\dagger w = (T|_{(\text{null } T)^\perp})^{-1} P_{\text{range } T} w$$

לכל $w \in W$.

נזכיר כי $P_{\text{range } T} w = w$ אם $w \in (\text{range } T)^\perp$ ו- $P_{\text{range } T} w = 0$ אם $w \in (\text{range } T)^\perp$. לפיכך אם $w \in (\text{range } T)^\perp$, אזי $T^\dagger w = 0$, ואם $w \in \text{range } T$, אזי $T^\dagger w$ הוא האיבר היחיד של $(\text{null } T)^\perp$ כך ש- $T(T^\dagger w) = w$. התנהגות הפְּסִידוֹ-הוֹפְכִי דומה לזו של ההופכית הסטנדרטית, כפי שנראה בהמשך.

6.69 תכונות אלגבריות של הפְּסִידוֹ-הוֹפְכִי

- נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$.
- אם T הפיכה, אזי $T^\dagger = T^{-1}$.
 - $TT^\dagger = P_{\text{range } T}$, שהוא ההיטל האורתוגונלי של W על $\text{range } T$.
 - $T^\dagger T = P_{(\text{null } T)^\perp}$, שהוא ההיטל האורתוגונלי של V על $(\text{null } T)^\perp$.

הוכחה

א. נניח ש- T הפיכה. אזי $(\text{null } T)^\perp = V$ ו- $\text{range } T = W$. לפיכך $T|_{(\text{null } T)^\perp} = T$ ו- $P_{\text{range } T}$ הוא אופרטור זהות מעל W . לכן $T^\dagger = T^{-1}$.

ב. נניח ש- $w \in \text{range } T$. לפיכך

$$TT^\dagger w = T(T|_{(\text{null } T)^\perp})^{-1} w = w = P_{\text{range } T} w.$$

אם $w \in (\text{range } T)^\perp$, אזי $T^\dagger w = 0$. לכן $TT^\dagger w = 0 = P_{\text{range } T} w$. לפיכך $TT^\dagger$ ו- $P_{\text{range } T}$ מתואמים בנוגע ל- $\text{range } T$ ו- $(\text{range } T)^\perp$. לכן שתי העתקות ליניאריות אלו שוות (לפי 6.49).

ג. נניח ש- $v \in (\text{null } T)^\perp$. מאחר ש- $v \in \text{range } T$, ההגדרה של $T^\dagger$ מראה ש- $T^\dagger(Tv) = (T|_{(\text{null } T)^\perp})^{-1}(Tv) = v = P_{(\text{null } T)^\perp} v$.

אם $v \in \text{null } T$, אזי $T^\dagger Tv = 0 = P_{(\text{null } T)^\perp} v$. לפיכך $T^\dagger T$ ו- $P_{(\text{null } T)^\perp}$ מתואמים לגבי $(\text{null } T)^\perp$ ו- $\text{null } T$. לכן שתי העתקות ליניאריות אלו שוות (לפי 6.49).

הפְּסִידוֹ-הוֹפְכִי נקרא גם הופכי מור-פגרו.

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אם T על, אזי $TT^\dagger$ הוא אופרטור זהות מעל W , כפי שנובע מסעיף (ב) במסקנה לעיל. אם T חד-חד-ערכית, אזי $T^\dagger T$ הוא אופרטור זהות מעל V , כפי שנובע מסעיף (ג) במסקנה לעיל. לתכונות אלגבריות נוספות של הפְּסִידוֹ-הוֹפְכִי, ראו תרגילים 19–23.

עבור $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $w \in W$, נשוב כעת אל בעיית מציאת $v \in V$ הפותר את המשוואה

$$Tv = w.$$

כפי שצינו קודם לכן, אם T הפיכה, אזי $v = T^{-1}w$ הוא הפתרון היחיד, אך אם T אינה הפיכה, אזי T^{-1} אינה מוגדרת. אולם, הפסידו-הופכי $T^\dagger$ מוגדר. בחירת $v = T^\dagger w$ מקרבת את Tv ככל הניתן ל- w , כפי שנראה בסעיף (א) של המסקנה הבאה. לפיכך הפסידו-הופכי מספק את מה שקרוי ההתאמה הטובה ביותר עבור המשוואה לעיל. מבין כל הווקטורים $v \in V$ הגורמים ל- Tv להתקרב ככל האפשר ל- w , לווקטור $T^\dagger w$ יש את הנורמה הקטנה ביותר, כפי שניתן לראות כשמצרפים את סעיף (ב) במסקנה הבאה עם תנאי השוויון בסעיף (א).

6.70 פְּסִידו־הוֹפְכִי מִסַּפֵּק אֶת פְּתוּרֵן הַקִּירוֹב הַטוֹב בִּיֹּתֵר אוֹ אֶת הַפְּתוּרֵן הַטוֹב בִּיֹּתֵר

נניח ש- V מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V, W)$, ו- $w \in W$.

א. אם $v \in V$, אזי

$$\|T(T^\dagger w) - w\| \leq \|Tv - w\|,$$

עם שוויון אם-ורק אם $v \in T^\dagger w + \text{null } T$.

ב. אם $v \in T^\dagger w + \text{null } T$, אזי

$$\|T^\dagger w\| \leq \|v\|,$$

עם שוויון אם-ורק אם $v = T^\dagger w$.

הוכחה

א. נניח ש- $v \in V$. אזי

$$Tv - w = (Tv - TT^\dagger w) + (TT^\dagger w - w).$$

הביטוי הראשון בסוגריים לעיל הוא ב- $\text{range } T$. מאחר שהאופרטור $TT^\dagger$ הוא ההיטל האורתוגונלי של W על $\text{range } T$ [לפי 6.69(ב)], הביטוי השני בסוגריים לעיל הוא ב- $(\text{range } T)^\perp$ [ראו 6.57(ו)].

לפיכך משפט פיתגורס גורר את האי-שוויון המבוקש שהנורמה של הביטוי השני בסוגריים לעיל היא קטנה או שווה ל- $\|Tv - w\|$, עם שוויון אם-ורק אם הביטוי הראשון בסוגריים לעיל שווה 0. לכן יש לנו שוויון אם-ורק אם $v - T^\dagger w \in \text{null } T$, שזו טענה השקולה לכך ש- $v \in T^\dagger w + \text{null } T$, ובכך הושלמה ההוכחה של סעיף (א).

ב. נניח ש- $v \in T^\dagger w + \text{null } T$. לכן $v - T^\dagger w \in \text{null } T$. כעת

$$v = (v - T^\dagger w) + T^\dagger w.$$

ההגדרה של $T^\dagger$ גוררת ש- $T^\dagger w \in (\text{null } T)^\perp$. לפיכך משפט פיתגורס גורר ש- $\|v\| \geq \|T^\dagger w\|$, עם שוויון אם-ורק אם $v = T^\dagger w$. ■

נוסחה עבור $T^\dagger$ תינתן בפרק הבא (ראו 7.78).

6.71 דוגמה: פְּסִידוֹ-הוֹפְכִי של העתקה ליניארית מ־ F^4 אל F^3

נניח ש־ $T \in \mathcal{L}(F^4, F^3)$ מוגדרת על ידי

$$T(a, b, c, d) = (a + b + c, 2c + d, 0).$$

העתקה ליניארית זו אינה חד־חד־ערכית ואינה על, אולם נוכל לחשב את הפְּסִידוֹ-הוֹפְכִי שלה. לצורך כך, תחילה נשים לב כי $\text{range } T = \{(x, y, 0) : x, y \in F\}$. לפיכך

$$P_{\text{range } T}(x, y, z) = (x, y, 0)$$

לכל $(x, y, z) \in F^3$. בנוסף,

$$\text{null } T = \{(a, b, c, d) \in F^4 : a + b + c = 0 \text{ וגם } 2c + d = 0\}.$$

הרשימה $(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, -2)$ של שני וקטורים ב־ $\text{null } T$ פורסת את $\text{null } T$ מאחר שאם $(a, b, c, d) \in \text{null } T$ אזי

$$(a, b, c, d) = b(-1, 1, 0, 0) + c(-1, 0, 1, -2).$$

מאחר שהרשימה $(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, -2)$ היא בלתי תלויה ליניארית, רשימה זו בסיס של $\text{null } T$.

כעת נניח ש־ $(x, y, z) \in F^3$ אזי

$$6.72 \quad T^\dagger(x, y, z) = (T|_{(\text{null } T)^\perp})^{-1}P_{\text{range } T}(x, y, z) = (T|_{(\text{null } T)^\perp})^{-1}(x, y, 0).$$

האגף הימני של המשוואה לעיל הוא הווקטור $(a, b, c, d) \in F^4$ כך ש־

$$(a, b, c, d) \in (\text{null } T)^\perp \text{ ו־ } T(a, b, c, d) = (x, y, 0)$$

במילים אחרות, a, b, c, d חייבים לקיים את המשוואות הבאות:

$$a + b + c = x$$

$$2c + d = y$$

$$-a + b = 0$$

$$-a + c - 2d = 0,$$

כאשר שתי המשוואות הראשונות שקולות למשוואה $T(a, b, c, d) = (x, y, 0)$ ושתי המשוואות האחרונות נובעות מהתנאי ש־ (a, b, c, d) יהיה אורתוגונלי לכל וקטור מווקטורי הבסיס $(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, -2)$ בבסיס זה של $\text{null } T$. במחשבה על x ו־ y כקבועים ועל a, b, c, d כנעלמים, נוכל לפתור את המערכת לעיל של ארבע משוואות בארבעה נעלמים ולקבל

$$a = \frac{1}{11}(5x - 2y), \quad b = \frac{1}{11}(5x - 2y), \quad c = \frac{1}{11}(x + 4y), \quad d = \frac{1}{11}(-2x + 3y).$$

לכן 6.72 מורה לנו כי

$$T^\dagger(x, y, z) = \frac{1}{11}(5x - 2y, 5x - 2y, x + 4y, -2x + 3y).$$

הנוסחה לעיל עבור $T^\dagger$ מראה לנו ש־ $TT^\dagger(x, y, z) = (x, y, 0)$ לכל $(x, y, z) \in F^3$, מה שממחיש את המשוואה $TT^\dagger = P_{\text{range } T}$ מ־ 6.69 (ב).

תרגילים ו3

- 1 נניח ש- $v_1, \dots, v_m \in V$. הוכיחו ש- $\{v_1, \dots, v_m\}^\perp = (\text{span}(v_1, \dots, v_m))^\perp$.
- 2 נניח ש- U תת-מרחב של V עם בסיס $u_1, \dots, u_m$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V . הוכיחו שאם ניישם את תהליך גרס-שמידט על הבסיס של V לעיל וכתוצאה נקבל את הרשימה $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_n$, אזי $e_1, \dots, e_m$ בסיס אורתונורמלי של U ו- $f_1, \dots, f_n$ בסיס אורתונורמלי של $U^\perp$.
- 3 נניח ש- U התת-מרחב של $\mathbb{R}^4$ המוגדר על ידי $U = \text{span}((1, 2, 3, -4), (-5, 4, 3, 2))$. מצאו בסיס אורתונורמלי של U ובסיס אורתונורמלי של $U^\perp$.
- 4 נניח ש- $e_1, \dots, e_n$ רשימת וקטורים ב- V עם $\|e_k\| = 1$ לכל $k = 1, \dots, n$. לכל $v \in V$ הוכיחו ש- $\|v\|^2 = |\langle v, e_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, e_n \rangle|^2$. תרגיל זה מספק את הכיוון ההפוך של 6.30(ב).
- 5 נניח ש- V מממד סופי ו- U תת-מרחב של V . הראו ש- $P_{U^\perp} = I - P_U$, כאשר I הוא אופרטור הזהות מעל V .
- 6 נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הראו ש- $T = TP_{(\text{null } T)^\perp} = P_{\text{range } T}T$.
- 7 נניח ש- X ו- Y תתי-מרחב של V מממד סופי. הוכיחו ש- $P_X P_Y = 0$ אם ורק אם $\langle x, y \rangle = 0$ לכל $x \in X$ ולכל $y \in Y$.
- 8 נניח ש- U תת-מרחב של V מממד סופי ו- $v \in V$. הגדירו פונקציונל ליניארי $\varphi: U \rightarrow \mathbb{F}$ על ידי $\varphi(u) = \langle u, v \rangle$ לכל $u \in U$. לפי משפט ההצגה של ריס (6.42) כאשר מיושם על מרחב המכפלה הפנימית U , קיים וקטור יחיד $w \in U$ כך ש- $\varphi(u) = \langle u, w \rangle$ לכל $u \in U$. הראו ש- $w = P_U v$.
- 9 נניח ש- V מממד סופי. נניח ש- $P \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $P^2 = P$ וכל וקטור ב- $\text{null } P$ אורתוגונלי לכל וקטור ב- $\text{range } P$. הוכיחו שקיים תת-מרחב U של V כך ש- $P = P_U$.

10 נניח ש- V מממד סופי ו- $P \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $P^2 = P$ וגם

$$\|Pv\| \leq \|v\|$$

לכל $v \in V$. הוכיחו שקיים תת-מרחב U של V כך ש- $P = P_U$.

11 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- U תת-מרחב של V מממד סופי. הוכיחו ש- U שמור תחת T אם ורק אם $TP_U = P_UT$.

12 נניח ש- V מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V)$, ו- U תת-מרחב של V . הוכיחו ש- U ו- $U^\perp$ שניהם שמורים תחת T אם ורק אם $TP_U = P_UT$.

13 נניח ש- $F = \mathbb{R}$ ו- V מממד סופי. לכל $v \in V$, יהי φ_v הפונקציונל הליניארי מעל V המוגדר על ידי

$$\varphi_v(u) = \langle u, v \rangle$$

לכל $u \in V$.

א. הראו ש- $\varphi_v \mapsto v$ העתקה ליניארית חד-חד-ערכית מ- V אל V' .

ב. השתמשו בסעיף (א) ובטיעון של ספירת ממדים כדי להראות ש- $\varphi_v \mapsto v$ הוא איזומורפיזם מ- V על V' .

מטרת תרגיל זה היא לספק הוכחה חלופית למשפט ההצגה של ריס (6.42 ו- 6.58) כאשר $F = \mathbb{R}$. לפיכך אין להשתמש במשפט ההצגה של ריס ככלי בפתרון שלכם.

14 נניח ש- $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V . הסבירו מדוע הבסיס הדואלי (ראו 3.112) של $e_1, \dots, e_n$ הוא $e_1, \dots, e_n$ תחת הזיהוי של V' עם V הנתון על ידי משפט ההצגה של ריס (6.58).

15 ב- $\mathbb{R}^4$, יהי

$$U = \text{span}((1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 2)).$$

מצאו $u \in U$ כך ש- $\|u - (1, 2, 3, 4)\|$ קטן ככל האפשר.

16 נניח ש- $C[-1, 1]$ הוא המרחב הווקטורי של פונקציות ממשיות רציפות מעל הקטע $[-1, 1]$ עם מכפלה פנימית הנתונה על ידי

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg$$

לכל $f, g \in C[-1, 1]$. יהי U התת-מרחב של $C[-1, 1]$ המוגדר על ידי

$$U = \{f \in C[-1, 1] : f(0) = 0\}.$$

א. הראו ש- $U^\perp = \{0\}$.

ב. הראו ש- 6.49 ו- 6.52 אינם מתקיימים ללא הנחת הממד הסופי.

17 מצאו $p \in \mathcal{P}_3(\mathbf{R})$ כך ש- $p(0) = 0$, $p'(0) = 0$ ו- $\int_0^1 |2 + 3x - p(x)|^2 dx$ קטן ככל האפשר.

18 מצאו $p \in \mathcal{P}_5(\mathbf{R})$ הגורם ל- $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x - p(x)|^2 dx$ להיות קטן ככל האפשר.

הפולינום 6.65 הוא קירוב מצוי לתשובה לתרגיל זה, אבל כאן אתם נדרשים למצוא פתרון מדויק, מה שדורש טיפול בחזקות של π . תוכנת מחשב המסוגלת לבצע חישוב סימבולי של אינטגרציה אמורה לסייע.

19 נניח ש- V מממד סופי ו- $P \in \mathcal{L}(V)$ הוא ההיטל האורתוגונלי של V על תת-מרחב כלשהו של V . הוכיחו ש- $P^\dagger = P$.

20 נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הראו ש- $\text{null } T^\dagger = (\text{range } T)^\perp$ וגם $\text{range } T^\dagger = (\text{null } T)^\perp$.

21 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^3, \mathbf{F}^2)$ המוגדרת על ידי $T(a, b, c) = (a + b + c, 2b + 3c)$.

- א. עבור $(x, y) \in \mathbf{F}^2$, מצאו נוסחה עבור $T^\dagger(x, y)$.
- ב. ודאו שהמשוואה $TT^\dagger = P_{\text{range } T}$ מ- 6.69 (ב) מתקיימת עם הנוסחה עבור $T^\dagger$ שקיבלנו בסעיף (א).
- ג. ודאו שהמשוואה $T^\dagger T = P_{(\text{null } T)^\perp}$ מ- 6.69 (ג) מתקיימת עם הנוסחה עבור $T^\dagger$ שקיבלנו בסעיף (א).

22 נניח ש- V מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הוכיחו ש- $TT^\dagger T = T$ וגם $T^\dagger TT^\dagger = T^\dagger$.
שתי הנוסחאות לעיל מתקיימות בכירור אם T הפיכה שכן במקרה כזה אנו יכולים להחליף את $T^\dagger$ ב- T^{-1} .

23 נניח ש- V ו- W מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הוכיחו ש- $(T^\dagger)^\dagger = T$.
המשוואה לעיל היא אנלוגית למשוואה $(T^{-1})^{-1} = T$ המתקיימת אם T הפיכה.

אופרטורים מעל מרחבי מכפלה פנימית

המסקנות העמוקות ביותר הקשורות למרחבי מכפלה פנימית עוסקות בנושא שאליו אנו ניגשים כעת—העתקות ליניאריות ואופרטורים מעל מרחבי מכפלה פנימית. כפי שנראה, משפטים טובים ניתנים להוכחה באמצעות ניצול תכונותיו של הצמוד. משפט הפירוק הספקטרלי, בעל החשיבות העצומה, יספק לנו תיאור מלא של אופרטורים הצמודים לעצמם מעל מרחבי מכפלה פנימית ממשיים ושל אופרטורים נורמליים מעל מרחבי מכפלה פנימית מרוכבים. לאחר מכן נשתמש במשפט הפירוק הספקטרלי לסיוע בהבנת אופרטורים חיוביים ואופרטורים אוניטריים, שיובילו אותנו אל מטריצות אוניטריות ופירוק לגורמים של מטריצות. משפט הפירוק הספקטרלי יוביל אותנו בנוסף אל הפירוק לערכים סינגולריים הפופולרי, שיוביל אותנו אל הפירוק הפולרי.

המסקנות החשובות ביותר מנקודה זו ואילך בספר תקפות רק בממדים סופיים. לפיכך מכאן ואילך אנו מניחים כי V ו- W הם מממד סופי.

הנחות המוצא לפרק זה

- F מסמן R או C .
- V ו- W מרחבי מכפלה פנימית מממד סופי מעל F שאינם מרחב האפס.



Petar Milošević CC BY-SA

כיכר השוק בבלבי, עיר שהיו לה מספר שמות ושכנה בתחומן של מספר ארצות כתוצאה משיווי גבולות בינלאומיים. משנת 1772 ועד לשנת 1918, היה שמה למברג והייתה לעיר השנייה בחשיבותה במחוז גליציה של האימפריה האוסטרית. בין מלחמת העולם הראשונה למלחמת העולם השנייה, הייתה העיר נתונה לשליטה פולנית ונקראה לבוב. במהלך תקופה זו, מתמטיקאים בלבוב, בפרט סטפן גונד (1892–1945) וחבריו המתמטיקאים, פיתחו את המסקנות הבסיסיות של אנליזה פונקציונלית מודרנית, תוך שימוש בכלי אנליזה לחקר מרחבים וקטוריים מממד אינסופי. בתום מלחמת העולם השנייה סופחה לבוב לאוקראינה, שהייתה חלק מברית המועצות עד שהפכה לאוקראינה למדינה עצמאית בשנת 1991.

2.1 אופרטורים צמודים לעצמם ואופרטורים נורמליים

צמודים

7.1 הגדרה: צמוד, T^*

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הצמודה של T היא הפונקציה $T^*: W \rightarrow V$ כך ש-

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle$$

לכל $v \in V$ ולכל $w \in W$.

בספרות בשפה האנגלית, הצמוד (של העתקות, אופרטורים ופטריות) נקרא *adjoint*. למונח זה יש משמעות נוספת באלגברה ליניארית. אם נתקלתם כבר במונח זה במשמעותו השנייה, שימו לב כי אין כל קשר בין שתי משמעויות אלו.

כדי לראות מדוע ההגדרה לעיל הגיונית, נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. נקבע $w \in W$ נתבונן בפונקציונל הליניארי

$$v \mapsto \langle Tv, w \rangle$$

מעל V המעתיק את $v \in V$ אל $\langle Tv, w \rangle$; פונקציונל ליניארי זה תלוי ב- T וב- w . לפי משפט ההצגה של ריס (6.42), קיים וקטור יחיד ב- V כך שפונקציונל ליניארי זה נתון על ידי המכפלה הפנימית איתו. לוקטור יחיד זה אנו קוראים T^*w . במילים אחרות, T^*w הוא הווקטור היחיד ב- V כך ש-

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle$$

לכל $v \in V$.

במשוואה לעיל, המכפלה הפנימית באגף השמאלי מתרחשת ב- W והמכפלה הפנימית באגף הימני מתרחשת ב- V . למרות זאת, אנו משתמשים באותו הסימון $\langle \cdot, \cdot \rangle$ עבור שתי המכפלות הפנימיות.

7.2 דוגמה: צמודה של העתקה ליניארית מ- $\mathbb{R}^3$ אל $\mathbb{R}^2$

נגדיר $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ על ידי

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 3x_3, 2x_1).$$

לחישוב T^* , נניח ש- $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ו- $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. אזי

$$\langle T(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2) \rangle = \langle (x_2 + 3x_3, 2x_1), (y_1, y_2) \rangle$$

$$= x_2y_1 + 3x_3y_1 + 2x_1y_2$$

$$= \langle (x_1, x_2, x_3), (2y_2, y_1, 3y_1) \rangle.$$

המשוואה לעיל והגדרת הצמוד גוררות ש-

$$T^*(y_1, y_2) = (2y_2, y_1, 3y_1).$$

7.3 דוגמה: צמודה של העתקה ליניארית עם טווח חד-צדדי לכל היותר

נקבע $u \in V$ ו- $x \in W$. נגדיר $T \in \mathcal{L}(V, W)$ על ידי

$$Tv = \langle v, u \rangle x$$

לכל $v \in V$. לחישוב T^* , נניח ש- $v \in V$ ו- $w \in W$. אזי

$$\begin{aligned}\langle Tv, w \rangle &= \langle \langle v, u \rangle x, w \rangle \\ &= \langle v, u \rangle \langle x, w \rangle \\ &= \langle v, \langle w, x \rangle u \rangle.\end{aligned}$$

לפיכך

$$T^*w = \langle w, x \rangle u.$$

לשתי הדוגמאות לעיל ולהוכחה להלן טכניקה משותפת לחישוב T^* : מתחילים עם נוסחה עבור $\langle Tv, w \rangle$ ומבצעים פעולות אלגבריות כדי לבדוד את v ברכיב הראשון; האיבר שמתקבל ברכיב השני יהיה T^*w .

בשתי הדוגמאות לעיל, התברר ש- T^* אינה רק פונקציה מ- W אל V אלא העתקה ליניארית מ- W אל V . הדבר נכון באופן כללי, כפי שמראה לנו המסקנה הבאה.

7.4 צמודה של העתקה ליניארית היא העתקה ליניארית

אם $T \in \mathcal{L}(V, W)$, אזי $T^* \in \mathcal{L}(W, V)$.

הוכחה נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אם $v \in V$ ו- $w_1, w_2 \in W$, אזי

$$\begin{aligned}\langle Tv, w_1 + w_2 \rangle &= \langle Tv, w_1 \rangle + \langle Tv, w_2 \rangle \\ &= \langle v, T^*w_1 \rangle + \langle v, T^*w_2 \rangle \\ &= \langle v, T^*w_1 + T^*w_2 \rangle.\end{aligned}$$

המשוואה לעיל מראה ש-

$$T^*(w_1 + w_2) = T^*w_1 + T^*w_2.$$

אם $v \in V$, $w \in W$, $\lambda \in \mathbb{F}$, אזי

$$\begin{aligned}\langle Tv, \lambda w \rangle &= \overline{\lambda} \langle Tv, w \rangle \\ &= \overline{\lambda} \langle v, T^*w \rangle \\ &= \langle v, \lambda T^*w \rangle.\end{aligned}$$

המשוואה לעיל מראה ש-

$$T^*(\lambda w) = \lambda T^*w.$$

לפיכך T^* העתקה ליניארית, כפי שרצינו.

7.5 תכונות של הצמוד

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ אזי

א. $S \in \mathcal{L}(V, W)$ לכל $(S + T)^* = S^* + T^*$

ב. $\lambda \in \mathbb{F}$ לכל $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$

ג. $(T^*)^* = T$

ד. $S \in \mathcal{L}(W, U)$ לכל $(ST)^* = T^* S^*$ (כאן U הוא מרחב מכפלה פנימית מממד סופי מעל $\mathbb{F}$)

ה. $I^* = I$, כאשר I הוא אופרטור הזהות מעל V

ו. אם T הפיכה, אזי T^* הפיכה ו- $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

הוכחה נניח ש- $v \in V$ ו- $w \in W$.

א. אם $S \in \mathcal{L}(V, W)$, אזי

$$\langle (S + T)v, w \rangle = \langle Sv, w \rangle + \langle Tv, w \rangle$$

$$= \langle v, S^*w \rangle + \langle v, T^*w \rangle$$

$$= \langle v, S^*w + T^*w \rangle.$$

לפיכך $(S + T)^*w = S^*w + T^*w$, כפי שרצינו.

ב. אם $\lambda \in \mathbb{F}$, אזי

$$\langle (\lambda T)v, w \rangle = \lambda \langle Tv, w \rangle = \lambda \langle v, T^*w \rangle = \langle v, \bar{\lambda} T^*w \rangle.$$

לפיכך $(\lambda T)^*w = \bar{\lambda} T^*w$, כפי שרצינו.

ג. מתקיים

$$\langle T^*w, v \rangle = \overline{\langle v, T^*w \rangle} = \overline{\langle Tv, w \rangle} = \langle w, Tv \rangle.$$

לפיכך $(T^*)^*v = Tv$, כפי שרצינו.

ד. נניח ש- $S \in \mathcal{L}(W, U)$ ו- $u \in U$. אזי

$$\langle (ST)v, u \rangle = \langle S(Tv), u \rangle = \langle Tv, S^*u \rangle = \langle v, T^*(S^*u) \rangle.$$

לפיכך $(ST)^*u = T^*(S^*u)$, כפי שרצינו.

ה. נניח ש- $u \in V$. אזי

$$\langle Iu, v \rangle = \langle u, v \rangle.$$

לפיכך $I^*v = v$, כפי שרצינו.

ו. נניח ש- T הפיכה. ניקח את הצמודים של שני אגפי המשוואה $T^{-1}T = I$ ואז נשתמש ב- (ד) ו- (ה) כדי להראות כי $T^*(T^{-1})^* = I$. באופן דומה, המשוואה $TT^{-1} = I$ גוררת ש- $(T^{-1})^*T^* = I$. לפיכך $(T^{-1})^*$ ההופכית של T^* , כפי שרצינו.

אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, אזי ההעתקה $T \mapsto T^*$ היא העתקה ליניארית מ- $\mathcal{L}(V, W)$ אל $\mathcal{L}(W, V)$, כפי שנובע מסעיפים (א) ו- (ב) של המסקנה לעיל. אולם, אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, אזי העתקה זו אינה ליניארית לאור הצמוד המרוכב המופיע בסעיף (ב).

המסקנה הבאה מראה את היחס בין מרחב האפס והטווח של העתקה ליניארית לבין אלו של צמודתה.

7.6 מרחב אפס וטווח של T^*

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי

א. $\text{null } T^* = (\text{range } T)^\perp$

ב. $\text{range } T^* = (\text{null } T)^\perp$

ג. $\text{null } T = (\text{range } T^*)^\perp$

ד. $\text{range } T = (\text{null } T^*)^\perp$

הוכחה נפתח בהוכחת סעיף (א). יהי $w \in W$. אזי

$$T^*w = 0 \iff w \in \text{null } T^*$$

$$\iff \langle v, T^*w \rangle = 0 \text{ לכל } v \in V$$

$$\iff \langle Tv, w \rangle = 0 \text{ לכל } v \in V$$

$$\iff w \in (\text{range } T)^\perp$$

לפיכך $\text{null } T^* = (\text{range } T)^\perp$, ובכך הוכחנו את סעיף (א).

אם ניקח את המשלים האורתוגונלי של שני האגפים של סעיף (א), אנו מקבלים את (ד), כאשר השתמשנו ב- 6.52. בהחלפת T ב- T^* בסעיף (א) נקבל את (ג), כאשר השתמשנו ב- 7.5 (ג). לסיום, החלפת T ב- T^* בסעיף (ד) תתן לנו את סעיף (ב). ■

כפי שנראה בקרוב, ההגדרה הבאה קשורה באופן הדוק למטריצה של הצמודה של העתקה ליניארית.

7.7 הגדרה: צמודה-משוחלפת, A^*

הצמודה-משוחלפת של A מטריצה $m \times n$ היא A^* מטריצה $n \times m$ המתקבלת על ידי החלפה בין השורות והעמודות והצבת הצמוד המרוכב של כל איבר במטריצה. במילים אחרות, אם $j \in \{1, \dots, n\}$ ו- $k \in \{1, \dots, m\}$, אזי

$$(A^*)_{j,k} = \overline{A_{k,j}}.$$

7.8 דוגמה: צמודה-משוחלפת של מטריצה 2×3

אם למטריצה A יש רק איברים ממשיים, אזי $A^* = A^t$, כאשר A^t מסמנת את המשוחלפת של A (המטריצה המתקבלת על ידי החלפה בין השורות והעמודות).

הצמודה-משוחלפת של המטריצה 2×3 היא המטריצה 3×2

$$\begin{pmatrix} 2 & 3+4i & 7 \\ 6 & 5 & 8i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3-4i & 5 \\ 7 & -8i \end{pmatrix}.$$

ההעתקה הצמודה של ההעתקה ליניארית אינה תלויה בבחירה של בסיס. לפיכך לעיתים קרובות נשים דגש על ההעתקות הצמודות של ההעתקות ליניאריות במקום על מטריצות משוחלפות או מטריצות צמודות-משוחלפות.

המסקנה הבאה מראה כיצד לחשב את המטריצה של T^* בהתבסס על המטריצה של T . **זהירות:** ביחס לבסיסים שאינם אורתונורמליים, המטריצה של T^* לא בהכרח תהיה שווה למטריצה הצמודה-משוחלפת של המטריצה של T .

7.9 מטריצה של T^* שווה לצמודה-משוחלפת של המטריצה של T

תהי $T \in \mathcal{L}(V, W)$. נניח ש- $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V ו- $f_1, \dots, f_m$ בסיס אורתונורמלי של W . אזי $\mathcal{M}(T^*, (f_1, \dots, f_m), (e_1, \dots, e_n))$ היא הצמודה-משוחלפת של $\mathcal{M}(T, (e_1, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_m))$. במילים אחרות, $\mathcal{M}(T^*) = (\mathcal{M}(T))^*$.

הוכחה בהוכחה זו, נכתוב $\mathcal{M}(T)$ ו- $\mathcal{M}(T^*)$ במקום לכתוב את הביטויים הארוכים $\mathcal{M}(T, (e_1, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_m))$ ו- $\mathcal{M}(T^*, (f_1, \dots, f_m), (e_1, \dots, e_n))$. נזכיר כי העמודה ה- k^{th} של $\mathcal{M}(T)$ מתקבלת באמצעות כתיבת Te_k כצירוף ליניארי של ה- f_j ים; הסקלרים שבהם השתמשנו בצירוף ליניארי זה מוצגים בעמודה ה- k^{th} של $\mathcal{M}(T)$. מאחר ש- $f_1, \dots, f_m$ הוא בסיס אורתונורמלי של W , אנו יודעים כיצד לכתוב את Te_k כצירוף ליניארי של ה- f_j ים [ראו 6.30(א)]:

$$Te_k = \langle Te_k, f_1 \rangle f_1 + \dots + \langle Te_k, f_m \rangle f_m.$$

לפיכך

האיבר בשורה j , עמודה k , של $\mathcal{M}(T)$ הוא $\langle Te_k, f_j \rangle$.

במשפט לעיל, נחליף את T ב- T^* ונחליף בין $e_1, \dots, e_n$ ל- $f_1, \dots, f_m$. כך נראה כי האיבר בשורה j , עמודה k , של $\mathcal{M}(T^*)$ הוא $\langle T^* f_k, e_j \rangle$, שהוא שווה ל- $\langle f_k, Te_j \rangle$, שהוא שווה ל- $\langle Te_j, f_k \rangle$, שהוא שווה לצמוד המרוכב של האיבר בשורה k , עמודה j , של $\mathcal{M}(T)$. לפיכך $\mathcal{M}(T^*) = (\mathcal{M}(T))^*$.

משפט ההצגה של ריס כפי שנוסח ב- 6.58 מספק זיהוי של V עם המרחב הדואלי של V' כמוגדר ב- 3.110. תחת זיהוי זה, המשלים האורתוגונלי $U^\perp$ של התת-קבוצה $U \subseteq V$ תואם למאפס U^0 של U . אם U תת-מרחב של V , אזי נוסחאות הממדים של $U^\perp$ ושל U^0 הופכות לזהות תחת זיהוי זה—ראו 3.125 ו- 6.51.

מאחר שמשלימים אורתוגונליים וצמודים יותר קלים לעבודה מאשר מְאָפָּסִים והעתקות דואליות, בהקשר של מרחבי מכפלה פנימית אין צורך לעבוד עם מְאָפָּסִים והעתקות דואליות.

נניח ש- $T: V \rightarrow W$ ההעתקה ליניארית. תחת הזיהוי של V עם V' והזיהוי של W עם W' , ההעתקה הצמודה $T^*: W \rightarrow V$ תואמת להעתקה הדואלית $T': W' \rightarrow V'$ המוגדרת ב- 3.118, כפי שתרגיל 32 מבקש מכם לוודא. תחת זיהוי זה, הנוסחאות עבור

$\text{null } T^*$ ו- $\text{range } T^*$ [ראו 7.6(א) ו-(ב)] הופכות לזהות לנוסחאות עבור $\text{null } T'$ ו- $\text{range } T'$ [ראו 3.128(א) ו-3.130(ב)]. יתר על כן, המשפט לגבי המטריצה של T^* (ראו 7.9) אנלוגי למשפט לגבי המטריצה של T' (ראו 3.132).

אופרטורים צמודים לעצמם

כעת אנו מפנים את תשומת ליבנו אל אופרטורים מעל מרחבי מכפלה פנימית. במקום להתבונן בהעתקות ליניאריות מ- V אל W , אנו נתמקד בהעתקות ליניאריות מ- V אל V ; נזכיר כי העתקות ליניאריות שכאלה נקראות אופרטורים.

7.10 הגדרה: צמוד לעצמו

אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ נקרא צמוד לעצמו אם $T = T^*$.

אם $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V , אזי T צמוד לעצמו אם ורק אם $\mathcal{M}(T, (e_1, \dots, e_n)) = \mathcal{M}(T, (e_1, \dots, e_n))^*$, כפי שנובע מ-7.9.

7.11 דוגמה: קביעה האם T צמוד לעצמו על פי המטריצה שלו

נניח ש- $c \in F$ ו- T האופרטור מעל F^2 שהמטריצה שלו (ביחס לבסיס הסטנדרטי) היא

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} 2 & c \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

המטריצה של T^* (ביחס לבסיס הסטנדרטי) היא

$$\mathcal{M}(T^*) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \bar{c} & 7 \end{pmatrix}.$$

לפיכך $\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}(T^*)$ אם ורק אם $c = 3$. לכן האופרטור T צמוד לעצמו אם ורק אם $c = 3$.

אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ צמוד לעצמו אם ורק אם

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle$$

לכל $v, w \in V$.

אנלוגיה שימושית שכדאי לזכור היא כי לפעולת הצמוד מעל $\mathcal{L}(V)$ תפקיד דומה לזה של הצמוד המרוכב מעל C . מספר מרוכב z הוא ממשי אם ורק אם $z = \bar{z}$; לפיכך אופרטור צמוד לעצמו ($T = T^*$) אנלוגי למספר ממשי.

אנו נראה כי האנלוגיה שהוזכרה לעיל באה לידי ביטוי במספר תכונות חשובות של אופרטורים צמודים לעצמם, כשהראשונה שבהן קשורה לערכים עצמיים במסקנה הבאה.

אם $F = \mathbb{R}$, אזי לפי הגדרה כל ערך עצמי הוא ממשי, ולכן יש עניין במסקנה הבאה רק כאשר $F = \mathbb{C}$.

7.12 ערכים עצמיים של אופרטורים צמודים לעצמם

כל ערך עצמי של אופרטור צמוד לעצמו הוא ממשי.

הוכחה נניח ש- T אופרטור צמוד לעצמו מעל V . יהי λ ערך עצמי של T , ויהי v וקטור השונה מאפס ב- V כך ש- $Tv = \lambda v$. אזי $\lambda \|v\|^2 = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = \langle v, Tv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \|v\|^2$. לפיכך $\lambda = \bar{\lambda}$, כלומר λ מספר ממשי, כפי שרצינו.

המסקנה הבאה אינה נכונה עבור מרחבי מכפלה פנימית ממשיים. כדוגמה, נתבונן באופרטור $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ שמבצע סיבוב של 90° סביב ראשית הצירים נגד כיוון השעון; לפיכך $T(x, y) = (-y, x)$. שימו לב ש- Tv אורתוגונלי ל- v לכל $v \in \mathbb{R}^2$, אף ש- $T \neq 0$.

7.13 Tv אורתוגונלי ל- v לכל v אס-רסק-אס $T = 0$ (בהנחה ש- $F = \mathbb{C}$)

נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית מרוכב ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי

$$T = 0 \iff \langle Tv, v \rangle = 0 \text{ לכל } v \in V$$

הוכחה אם $u, w \in V$ אזי

$$\begin{aligned} \langle Tu, w \rangle &= \frac{\langle T(u+w), u+w \rangle - \langle T(u-w), u-w \rangle}{4} \\ &\quad + \frac{\langle T(u+iw), u+iw \rangle - \langle T(u-iw), u-iw \rangle}{4} i, \end{aligned}$$

כפי שניתן לוודא על ידי חישוב האגף הימני. שימו לב שכל ביטוי באגף הימני הוא מהצורה $\langle Tv, v \rangle$ עבור $v \in V$ מתאים.

כעת נניח ש- $\langle Tv, v \rangle = 0$ לכל $v \in V$. אזי מהמשוואה לעיל נובע ש- $\langle Tu, w \rangle = 0$ לכל $u, w \in V$, ומכאן ש- $Tu = 0$ לכל $u \in V$ (ניקח $w = Tu$). לכן $T = 0$, כפי שרצינו. ■

המסקנה הבאה מסיקת דוגמה טובה נוספת לכך שאופרטורים צמודים לעצמם מתנהגים כמו מספרים ממשיים.

המסקנה הבאה אינה נכונה עבור מרחבי מכפלה פנימית ממשיים, כפי שרואים כאשר מתבוננים בכל אופרטור מעל מרחב מכפלה פנימית ממשי שאינו צמוד לעצמו.

7.14 $\langle Tv, v \rangle$ ממשי לכל v אס-רסק-אס T צמוד לעצמו (בהנחה ש- $F = \mathbb{C}$)

נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית מרוכב ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי

$$T \text{ צמוד לעצמו} \iff \langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R} \text{ לכל } v \in V$$

הוכחה אם $v \in V$ אזי

$$7.15 \quad \langle T^*v, v \rangle = \overline{\langle v, T^*v \rangle} = \overline{\langle Tv, v \rangle}.$$

כעת

$$T - T^* = 0 \iff T \text{ צמוד לעצמו}$$

$$v \in V \text{ לכל } \langle (T - T^*)v, v \rangle = 0 \iff$$

$$v \in V \text{ לכל } \langle Tv, v \rangle - \overline{\langle Tv, v \rangle} = 0 \iff$$

$$\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R} \text{ לכל } v \in V \iff$$

כאשר השקילות השנייה נובעת מ-7.13 המופעל על $T - T^*$ והשקילות השלישית נובעת מ-7.15. ■

מעל מרחב מכפלה פנימית ממשי V , ייתכן שאופרטור T השונה מאפס יקיים $\langle Tv, v \rangle = 0$ לכל $v \in V$. בכל זאת, המסקנה הבאה מראה שהדבר אינו ייתכן עבור אופרטור הצמוד לעצמו.

$$7.16 \quad T \text{ צמוד לעצמו ו-} \langle Tv, v \rangle = 0 \text{ לכל } v \text{ אס-רוק-אם } T = 0$$

נניח ש- T אופרטור צמוד לעצמו מעל V . אזי

$$T = 0 \iff \langle Tv, v \rangle = 0 \text{ לכל } v \in V.$$

הוכחה כאשר V מרחב מכפלה פנימית מרוכב (ללא ההנחה ש- T צמוד לעצמו) כבר הוכחנו זאת (ראו 7.13). לפיכך אנו יכולים להניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ממשי. אם $u, w \in V$ אזי

$$7.17 \quad \langle Tu, w \rangle = \frac{\langle T(u+w), u+w \rangle - \langle T(u-w), u-w \rangle}{4},$$

כפי שניתן להוכיח על ידי חישוב האגף הימני תוך שימוש במשוואה

$$\langle Tw, u \rangle = \langle w, Tu \rangle = \langle Tu, w \rangle,$$

כאשר השוויון הראשון מתקיים מאחר ש- T צמוד לעצמו והשוויון השני מתקיים מאחר שאנו עובדים במרחב מכפלה פנימית ממשי.

כעת נניח ש- $\langle Tv, v \rangle = 0$ לכל $v \in V$. מאחר שכל ביטוי באגף הימני של 7.17 הוא מהצורה $\langle Tv, v \rangle$ עבור v מתאים, מכאן נובע ש- $\langle Tu, w \rangle = 0$ לכל $u, w \in V$. מכאן נובע כי $Tu = 0$ לכל $u \in V$ (ניקח $w = Tu$). לכן $T = 0$, כפי שרצינו. ■

אופרטורים נורמליים

7.18 הגדרה: נורמלי

- אופרטור מעל מרחב מכפלה פנימית נקרא נורמלי אם הוא מתחלף עם האופרטור הצמוד שלו.
- במילים אחרות, $T \in \mathcal{L}(V)$ נורמלי אם $TT^* = T^*T$.

כל אופרטור צמוד לעצמו הוא נורמלי, מאחר שאם T צמוד לעצמו אזי $T^* = T$ ולכן T מתחלף עם T^* .

7.19 דוגמה: אופרטור נורמלי שאינו צמוד לעצמו

יהי T האופרטור מעל F^2 שהמטריצה שלו (ביחס לבסיס הסטנדרטי) היא

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

לפיכך $T(w, z) = (2w - 3z, 3w + 2z)$.

אופרטור T זה אינו צמוד לעצמו מאחר שהאיבר בשורה 2, עמודה 1 (השווה ל-3) אינו שווה לצמוד המרוכב של האיבר בשורה 1, עמודה 2 (השווה ל-3).

המטריצה של TT^* שווה ל-

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

באופן דומה, המטריצה של T^*T שווה ל-

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

מאחר של- TT^* ול- T^*T אותה מטריצה, אנו רואים ש- $TT^* = T^*T$. לפיכך T אופרטור נורמלי.

ביחידה הבאה אנו נראה מדוע אופרטורים נורמליים ראויים לתשומת-לב מיוחדת. המסקנה הבאה מספקת אפיון שימושי לאופרטורים נורמליים.

7.20 T נורמלי אם ורק אם ל- Tv ול- T^*v יש אותה הנורמה

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי

$$T \text{ נורמלי} \iff \|Tv\| = \|T^*v\| \text{ לכל } v \in V.$$

הוכחה מתקיים

$$T \text{ נורמלי} \iff TT^* - T^*T = 0$$

$$\iff \langle (T^*T - TT^*)v, v \rangle = 0 \text{ לכל } v \in V$$

$$\iff \langle T^*Tv, v \rangle = \langle TT^*v, v \rangle \text{ לכל } v \in V$$

$$\iff \langle Tv, Tv \rangle = \langle T^*v, T^*v \rangle \text{ לכל } v \in V$$

$$\iff \|Tv\|^2 = \|T^*v\|^2 \text{ לכל } v \in V$$

$$\iff \|Tv\| = \|T^*v\| \text{ לכל } v \in V,$$

כאשר השתמשנו ב- 7.16 כדי לבסס את השקילות השנייה (שימו לב שהאופרטור $T^*T - TT^*$ צמוד לעצמו).

המסקנה הבאה מציגה מספר השלכות של המסקנה לעיל. השוו את סעיף (ה) של המסקנה הבאה לתרגיל 3. תרגיל זה קובע כי הערכים העצמיים של האופרטור הצמוד של כל אופרטור שווים (כקבוצה) לצמודים המרוכבים של הערכים העצמיים של האופרטור. התרגיל לא מציין דבר לגבי הווקטורים העצמיים, מאחר שלאופרטור ולאופרטור הצמוד שלו ייתכן שיהיו וקטורים עצמיים שונים. בכל זאת, מסעיף (ה) של המסקנה הבאה נובע שלאופרטור נורמלי ולאופרטור הצמוד שלו אותם וקטורים עצמיים.

7.21 טווח, מרחב האפס, ונקטורים עצמיים של אופרטור נורמלי

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור נורמלי. אזי

א. $\text{null } T = \text{null } T^*$

ב. $\text{range } T = \text{range } T^*$

ג. $V = \text{null } T \oplus \text{range } T$

ד. $T - \lambda I$ נורמלי לכל $\lambda \in \mathbb{F}$

ה. אם $v \in V$ ו- $\lambda \in \mathbb{F}$, אזי $Tv = \lambda v$ אם ורק אם $T^*v = \bar{\lambda}v$.

הוכחה

א. נניח ש- $v \in V$ אזי

$$v \in \text{null } T \iff \|Tv\| = 0 \iff \|T^*v\| = 0 \iff v \in \text{null } T^*,$$

כאשר השקילות האמצעית לעיל נובעת מ- 7.20. לפיכך $\text{null } T = \text{null } T^*$.

ב. מתקיים

$$\text{range } T = (\text{null } T^*)^\perp = (\text{null } T)^\perp = \text{range } T^*,$$

כאשר השוויון הראשון נובע מ- 7.6(ד), השוויון השני נובע מסעיף (א) של מסקנה זו, והשוויון השלישי נובע מ- 7.6(ב).

ג. מתקיים

$$V = (\text{null } T) \oplus (\text{null } T)^\perp = \text{null } T \oplus \text{range } T^* = \text{null } T \oplus \text{range } T,$$

כאשר השוויון הראשון נובע מ- 6.49, השוויון השני נובע מ- 7.6(ב), והשוויון השלישי נובע מסעיף (ב) של מסקנה זו.

ד. נניח ש- $\lambda \in \mathbb{F}$ אזי

$$\begin{aligned}
 (T - \lambda I)(T - \lambda I)^* &= (T - \lambda I)(T^* - \bar{\lambda}I) \\
 &= TT^* - \bar{\lambda}T - \lambda T^* + |\lambda|^2 I \\
 &= T^*T - \bar{\lambda}T - \lambda T^* + |\lambda|^2 I \\
 &= (T^* - \bar{\lambda}I)(T - \lambda I) \\
 &= (T - \lambda I)^*(T - \lambda I).
 \end{aligned}$$

לפיכך $T - \lambda I$ מתחלף עם האופרטור הצמוד שלו. לכן $T - \lambda I$ נורמלי.ה. נניח ש- $v \in V$ ו- $\lambda \in \mathbb{F}$ אזי סעיף (ד) ו- 7.20 גוררים ש-

$$\|(T - \lambda I)v\| = \|(T - \lambda I)^*v\| = \|(T^* - \bar{\lambda}I)v\|.$$

לפיכך $\|(T - \lambda I)v\| = 0$ אם ורק אם $\|(T^* - \bar{\lambda}I)v\| = 0$. לכן $Tv = \lambda v$ אם ורק אם $T^*v = \bar{\lambda}v$.

מאחר שכל אופרטור צמוד לעצמו הוא נורמלי, המסקנה הבאה מתקיימת בפרט עבור אופרטורים צמודים לעצמם.

7.22 וקטורים עצמיים אורתוגונליים עבור אופרטורים נורמליים

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ נורמלי. אזי וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים שונים הם אורתוגונליים.

הוכחה נניח ש- α, β ערכים עצמיים שונים של T , עם וקטורים עצמיים מתאימים u, v . לפיכך $Tu = \alpha u$ ו- $Tv = \beta v$ (מ- 7.21) נתון ש- $T^*v = \bar{\beta}v$. לפיכך

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)\langle u, v \rangle &= \langle \alpha u, v \rangle - \langle u, \bar{\beta}v \rangle \\ &= \langle Tu, v \rangle - \langle u, T^*v \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

מאחר ש- $\alpha \neq \beta$, מהמשוואה לעיל נובע ש- $\langle u, v \rangle = 0$. לפיכך u ו- v אורתוגונליים, כפי שרצינו. ■

כפי שמצוין כאן, למסקנה הבאה יש משמעות רק כאשר $F = \mathbb{C}$. בכל זאת, ראו תרגיל 12 לגרסה שבה יש למשפט משמעות כאשר $F = \mathbb{C}$ וגם כאשר $F = \mathbb{R}$.
נניח ש- $F = \mathbb{C}$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. בהשראת האנלוגיה בין $\mathcal{L}(V)$ ובין $\mathbb{C}$, כאשר תפקיד האופרטור הצמוד מעל $\mathcal{L}(V)$ דומה לזה של הצמוד המרוכב מעל $\mathbb{C}$, האופרטורים A ו- B כפי שהם מוגדרים לפי 7.24 מתאימים לחלקים הממשי והמדומה של T . לפיכך יש הגיון בכותרת הבלתי רשמית של המסקנה להלן.

7.23 נורמלי אס-ורק-אם החלקים הממשי והמדומה של T מתחלפים

נניח ש- $F = \mathbb{C}$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי T נורמלי אס-ורק-אם קיימים אופרטורים מתחלפים הצמודים לעצמם A ו- B כך ש- $T = A + iB$.

הוכחה תחילה נניח כי T נורמלי. יהיו

$$A = \frac{T + T^*}{2} \quad \text{ו-} \quad B = \frac{T - T^*}{2i}. \quad 7.24$$

אזי A ו- B צמודים לעצמם ו- $T = A + iB$. חישוב מהיר מראה ש-

$$AB - BA = \frac{T^*T - TT^*}{2i}. \quad 7.25$$

מאחר ש- T נורמלי, האגף הימני של המשוואה לעיל שווה 0. לפיכך האופרטורים A ו- B מתחלפים, כפי שרצינו.

להוכחת הגרירה בכיוון השני, כעת נניח שקיימים אופרטורים מתחלפים הצמודים לעצמם A ו- B כך ש- $T = A + iB$. אזי $T^* = A - iB$. חיבור שתי המשוואות האחרונות ואז חלוקה ב- 2 מפיקה את המשוואה עבור A ב- 7.24. חיסור שתי המשוואות האחרונות ואז חלוקה ב- $2i$ מפיקה את המשוואה עבור B ב- 7.24. כעת 7.24 גורר את 7.25. מאחר ש- B ו- A מתחלפים, 7.25 גורר ש- T נורמלי, כפי שרצינו. ■

1 נניח ש- n מספר שלם חיובי. נגדיר $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$ על ידי

$$T(z_1, \dots, z_n) = (0, z_1, \dots, z_{n-1}).$$

מצאו נוסחה עבור $T^*(z_1, \dots, z_n)$.

2 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הוכיחו כי

$$T = 0 \iff T^* = 0 \iff T^*T = 0 \iff TT^* = 0.$$

3 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\lambda \in \mathbb{F}$. הוכיחו כי

λ הוא ערך עצמי של T אם ורק אם $\bar{\lambda}$ הוא ערך עצמי של T^* .

4 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- U תת-מרחב של V . הוכיחו כי

U שמור תחת T אם ורק אם $U^\perp$ שמור תחת T^* .

5 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. נניח ש- $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V ו- $f_1, \dots, f_m$ בסיס אורתונורמלי של W . הוכיחו כי

$$\|Te_1\|^2 + \dots + \|Te_n\|^2 = \|T^*f_1\|^2 + \dots + \|T^*f_m\|^2.$$

המספרים $\|Te_1\|^2, \dots, \|Te_n\|^2$ במשוואה לעיל תלויים בבסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$, אך האגף הימני של המשוואה אינו תלוי ב- $e_1, \dots, e_n$. לפיכך המשוואה לעיל מראה שהסכום באגף השמאלי אינו תלוי באיזה בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ השתמשנו.

6 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הוכיחו כי

$$T \text{ חד-חד-ערכית} \iff T^* \text{ על}$$

$$T \text{ על} \iff T^* \text{ חד-חד-ערכית}.$$

7 הוכיחו כי אם $T \in \mathcal{L}(V, W)$, אזי

$$\dim \text{null } T^* = \dim \text{null } T + \dim W - \dim V \quad \text{א.}$$

$$\dim \text{range } T^* = \dim \text{range } T \quad \text{ב.}$$

8 נניח ש- A מטריצה $m \times n$ עם איברים ב- $\mathbb{F}$. השתמשו בסעיף (ב) בתרגיל 7 כדי להוכיח כי דרגת השורות של A שווה לדרגת העמודות של A .

תרגיל זה מבקש הוכחה חלופית נוספת למסקנה שכבר הוכחה ב- 3.57 ו- 3.133.

9 הוכיחו כי המכפלה של שני אופרטורים צמודים לעצמם מעל V היא אופרטור צמוד לעצמו אם ורק אם שני האופרטורים מתחלפים.

10 נניח ש- $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי צמוד לעצמו אם ורק אם

$$\langle Tv, v \rangle = \langle T^*v, v \rangle$$

לכל $v \in V$.

11 הגדירו אופרטור $S: \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}^2$ על ידי $S(w, z) = (-z, w)$.

א. מצאו נוסחה עבור S^* .

ב. הראו כי S נורמלי אך אינו צמוד לעצמו.

ג. מצאו את כל הערכים העצמיים של S .

אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, אזי S הוא האופרטור מעל $\mathbb{R}^2$ המבצע סיבוב של 90° נגד כיוון השעון.

12 אופרטור $B \in \mathcal{L}(V)$ נקרא אנטי-צמוד אם

$$B^* = -B.$$

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ הוכיחו כי T נורמלי אם ורק-אם קיימים אופרטורים מתחלפים A ו- B כך ש- A צמוד לעצמו, B אנטי-צמוד, ו- $T = A + B$.

13 נניח ש- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. נגדיר $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ על ידי $\mathcal{A}T = T^*$ לכל $T \in \mathcal{L}(V)$.

א. מצאו את כל הערכים העצמיים של $\mathcal{A}$.

ב. מצאו את הפולינום המינימלי של $\mathcal{A}$.

14 הגדירו מכפלה פנימית מעל $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ על ידי $\langle p, q \rangle = \int_0^1 pq$. הגדירו אופרטור $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ על ידי

$$T(ax^2 + bx + c) = bx.$$

א. הראו כי עם מכפלה פנימית זו, האופרטור T אינו צמוד לעצמו.

ב. המטריצה של T ביחס לבסיס $1, x, x^2$ היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

מטריצה זו שווה לצמודה-משוחלפת שלה, אף ש- T אינו צמוד לעצמו. הסבירו מדוע אין הדבר מהווה סתירה.

15 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ הפיך. הוכיחו כי

א. T צמוד לעצמו $\Leftrightarrow T^{-1}$ צמוד לעצמו.

ב. T נורמלי $\Leftrightarrow T^{-1}$ נורמלי.

16 נניח ש- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

א. הראו כי הקבוצה של האופרטורים הצמודים לעצמם מעל V היא תת-מרחב של $\mathcal{L}(V)$.

ב. מהו הממד של התת-מרחב של $\mathcal{L}(V)$ בסעיף (א) [במונחים של $\dim V$]?

17 נניח ש- $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. הראו כי הקבוצה של האופרטורים הצמודים לעצמם מעל V אינה תת-מרחב של $\mathcal{L}(V)$.

18 נניח ש- $\dim V \geq 2$. הראו כי הקבוצה של האופרטורים הנורמליים מעל V אינה תת-מרחב של $\mathcal{L}(V)$.

- 19** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\|Tv\| \leq \|T^*v\|$ לכל $v \in V$. הוכיחו כי T נורמלי.
תרגיל זה אינו עתיקים במרחבי מכפלה פנימית מממד אינסופי, מה שמוביל לאובייקטים הנקראים אופרטורים היפו-נורמליים, שסביבם פותחה תאוריה ענפה.
- 20** נניח ש- $P \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $P^2 = P$. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים.
א. P צמוד לעצמו.
ב. P נורמלי.
ג. קיים תת-מרחב U של V כך ש- $P = P_U$.
- 21** נניח ש- $D: \mathcal{P}_8(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{P}_8(\mathbf{R})$ הוא אופרטור הגזירה המוגדר על ידי $Dp = p'$. הוכיחו כי לא קיימת מכפלה פנימית מעל $\mathcal{P}_8(\mathbf{R})$ שתגרום ל- D להיות אופרטור נורמלי.
- 22** הביאו דוגמה של אופרטור $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ כך ש- T נורמלי אך אינו צמוד לעצמו.
- 23** נניח ש- T אופרטור נורמלי מעל V . בנוסף, נניח ש- $v, w \in V$ מקיימים את המשוואות
$$\|v\| = \|w\| = 2, \quad Tv = 3v, \quad Tw = 4w.$$

הראו כי $\|T(v+w)\| = 10$.
- 24** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו-
$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_{m-1}z^{m-1} + z^m$$

הוא הפולינום המינימלי של T . הוכיחו כי הפולינום המינימלי של T^* הוא
$$\overline{a_0} + \overline{a_1}z + \overline{a_2}z^2 + \dots + \overline{a_{m-1}}z^{m-1} + z^m.$$

תרגיל זה מראה כי הפולינום המינימלי של T^* שווה לפולינום המינימלי של T אם $\mathbf{F} = \mathbf{R}$.
- 25** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי T לכסין אס-ורק-אם T^* לכסין.
- 26** נקבע $u, x \in V$. נגדיר $T \in \mathcal{L}(V)$ על ידי $Tv = \langle v, u \rangle x$ לכל $v \in V$.
א. הוכיחו כי אם V מרחב וקטורי ממשי, אזי T צמוד לעצמו אס-ורק-אם הרשימה u, x תלויה ליניארית.
ב. הוכיחו כי T נורמלי אס-ורק-אם הרשימה u, x תלויה ליניארית.
- 27** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ נורמלי. הוכיחו כי
$$\text{null } T^k = \text{null } T \quad \text{וגם} \quad \text{range } T^k = \text{range } T$$

לכל מספר שלם חיובי k .
- 28** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ נורמלי. הוכיחו כי אם $\lambda \in \mathbf{F}$, אזי הפולינום המינימלי של T אינו כפולת פולינום של $(x - \lambda)^2$.

29 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם $T \in \mathcal{L}(V)$ וישנו בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ של V כך ש- $\|Te_k\| = \|T^*e_k\|$ לכל $k = 1, \dots, n$, אזי T נורמלי.

30 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$ נורמלי ו- $T(1, 1, 1) = (2, 2, 2)$. נניח ש- $(z_1, z_2, z_3) \in \text{null } T$. הוכיחו כי $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

31 נקבע מספר שלם חיובי n . במרחב המכפלה הפנימית של הפונקציות הממשיות הרציפות מעל $[-\pi, \pi]$ עם מכפלה פנימית $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg$, יהי

$$V = \text{span}(1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx).$$

א. הגדירו $D \in \mathcal{L}(V)$ על ידי $Df = f'$. הראו כי $D^* = -D$. הסיקו כי D נורמלי אך אינו צמוד לעצמו.

ב. הגדירו $T \in \mathcal{L}(V)$ על ידי $Tf = f''$. הראו כי T צמוד לעצמו.

32 נניח ש- $T: V \rightarrow W$ העתקה ליניארית. הראו כי תחת הזיהוי הסטנדרטי של V עם V' (ראו 6.58) והזיהוי התואם של W עם W' , ההעתקה הצמודה $T^*: W \rightarrow V$ מתאימה להעתקה הדואלית $T': W' \rightarrow V'$. ביתר דיוק, הראו כי

$$T'(\varphi_w) = \varphi_{T^*w}$$

לכל $w \in W$, כאשר φ_w ו- φ_{T^*w} מוגדרים כמו ב- 6.58.

2ז משפט הפירוק הספקטרי

נזכיר כי מטריצה אלכסונית היא מטריצה ריבועית שאיבריה 0 בכל מקום פרט לאלכסון שבו ייתכנו איברים השונים מ-0. נזכיר כי אופרטור מעל V נקרא לכסין אם לאופרטור יש מטריצה אלכסונית ביחס לבסיס כלשהו של V . נזכיר בנוסף שהדבר קורה אם-ורק-אם קיים בסיס של V המורכב מווקטורים עצמיים של האופרטור (ראו 5.55).

האופרטורים הידידותיים ביותר מעל V הם אלו אשר עבורם קיים בסיס אורתונורמלי של V אשר ביחס אליו יש לאופרטור מטריצה אלכסונית. אלו הם בדיוק האופרטורים $T \in \mathcal{L}(V)$ כך שקיים בסיס אורתונורמלי של V המורכב מווקטורים עצמיים של T . מטרתנו ביחידה זו היא להוכיח את משפט הפירוק הספקטרי, המאפיין אופרטורים אלו כאופרטורים צמודים לעצמם כאשר $F = \mathbb{R}$ וכאופרטורים נורמליים כאשר $F = \mathbb{C}$.

משפט הפירוק הספקטרי הוא ככל הנראה הכלי השימושי ביותר בחקר אופרטורים מעל מרחבי מכפלה פנימית. להרחבתו למרחבי מכפלה פנימית מסוימים מממד אינסופי (ראו, לדוגמה, חלק D10 בספרו של המחבר Measure, Integration & Real Analysis) תפקיד מרכזי באנליזה פונקציונלית.

מאחר שהמסקנה של משפט הפירוק הספקטרי תלויה ב- F , אנו נפצל את משפט הפירוק הספקטרי לשני חלקים, שלהם נקרא משפט הפירוק הספקטרי הממשי ומשפט הפירוק הספקטרי המרוכב.

משפט הפירוק הספקטרי הממשי

להוכחת משפט הפירוק הספקטרי הממשי, נזדקק לשתי מסקנות מקדימות. מסקנות מקדימות אלו מתקיימות עבור שני מרחבי המכפלה הפנימית הממשי והמרוכב, אך איננו זקוקים להן להוכחת משפט הפירוק הספקטרי המרוכב.

טכניקת השלמה לריבוע זו היא כלי שימושי לגזירת נוסחת השורשים.

תוכלו לנחש שהמסקנה הבאה נכונה ואפילו למצוא את ההוכחה עבורה בכך שתתבוננו בפולינום ממעלה שנייה עם מקדמים ממשיים. ליתר דיוק, נניח ש- $b, c \in \mathbb{R}$ ו- $b^2 < 4c$. יהי x מספר ממשי. אזי

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right) > 0.$$

בפרט, $x^2 + bx + c$ הוא מספר ממשי הפיך (דרך מפותלת לומר שהוא שונה מ-0). החלפת המספר הממשי x באופרטור צמוד לעצמו (נזכיר את האנלוגיה בין מספרים ממשיים ואופרטורים צמודים לעצמם) מובילה אל המסקנה הבאה.

7.26 ביטויים ריבועיים הפיכים

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ צמוד לעצמו ו- $b, c \in \mathbb{R}$ כך ש- $b^2 < 4c$. אזי

$$T^2 + bT + cI$$

אופרטור הפיך.

הוכחה יהי v וקטור שונה מאפס ב- V . אזי

$$\begin{aligned} \langle (T^2 + bT + cI)v, v \rangle &= \langle T^2v, v \rangle + b\langle Tv, v \rangle + c\langle v, v \rangle \\ &= \langle Tv, Tv \rangle + b\langle Tv, v \rangle + c\|v\|^2 \\ &\geq \|Tv\|^2 - |b|\|Tv\|\|v\| + c\|v\|^2 \\ &= \left(\|Tv\| - \frac{|b|\|v\|}{2} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4} \right) \|v\|^2 \\ &> 0, \end{aligned}$$

כאשר השורה השלישית לעיל מתקיימת לפי אי-שוויון קושי-שוורץ (6.14). האי-שוויון האחרון גורר ש- $(T^2 + bT + cI)v \neq 0$. לפיכך $T^2 + bT + cI$ חד-חד-ערכי, מה שגורר שהוא הפיך (ראו 3.65).

המסקנה הבאה תשמש ככלי מרכזי בהוכחתנו את משפט הפירוק הספקטרלי הממשי.

7.27 פולינום מינימלי של אופרטור צמוד לעצמו

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ צמוד לעצמו. אזי הפולינום המינימלי של T שווה ל- $(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$ עבור $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ כלשהם.

הוכחה תחילה נניח כי $F = \mathbb{C}$. שורשי הפולינום המינימלי של T הם הערכים העצמיים של T [לפי 5.27 (א)]. כל הערכים העצמיים של T ממשיים (לפי 7.12). לפיכך המשפט היסודי של האלגברה בגרסתו השנייה (ראו 4.13) מורה לנו כי לפולינום המינימלי של T יש את הצורה הרצויה.

כעת נניח ש- $F = \mathbb{R}$. לפי הפירוק לגורמים של פולינום מעל $\mathbb{R}$ (ראו 4.16), קיימים $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ו- $b_1, \dots, b_N, c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ עם $b_k^2 < 4c_k$ לכל k כך שהפולינום המינימלי של T שווה ל-

$$(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)(z^2 + b_1z + c_1) \cdots (z^2 + b_Nz + c_N);$$

כאשר ייתכן ש- m או N שווים 0, כלומר אין איברים מהצורה המתאימה. כעת

$$(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_m I)(T^2 + b_1T + c_1I) \cdots (T^2 + b_NT + c_NI) = 0.$$

אם $N > 0$, אזי נוכל להכפיל כל אגף של המשוואה לעיל בהופכי של $T^2 + b_NT + c_NI$ מימין (שהוא אופרטור הפיך לפי 7.26) לקבלת ביטוי פולינומי של T השווה 0. מעלת הפולינום המתאים תהיה פחותה בשתיים ממעלת 7.28, שזוהי הפרת מינימליות המעלה של הפולינום המינימלי. לפיכך האפשרות היחידה היא ש- $N = 0$, ומשמעות הדבר היא שלפולינום המינימלי ב-7.28 יש את התבנית $(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$, כפי שרצינו.

המסקנה לעיל יחד עם 5.27 (א) גוררת שלכל אופרטור צמוד לעצמו יש ערך עצמי. למעשה, כפי שנראה במסקנה הבאה, לאופרטורים צמודים לעצמם יש מספיק וקטורים עצמיים כדי ליצור בסיס.

המסקנה הבאה, המספקת תיאור מלא של אופרטורים הצמודים לעצמם מעל מרחב מכפלה פנימית ממשי, היא אחד המשפטים המרכזיים באלגברה ליניארית.

7.29 משפט הפירוק הספקטרי הממשי

נניח ש- $F = \mathbf{R}$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי התנאים הבאים שקולים.

- T צמוד לעצמו.
- יש ל- T מטריצה אלכסונית ביחס לבסיס אורתונורמלי כלשהו של V .
- יש ל- V בסיס אורתונורמלי המורכב מווקטורים עצמיים של T .

הוכחה תחילה נניח כי (א) מתקיים, כלומר T צמוד לעצמו. המסקנות שלנו הנוגעות לפולינום המינימלי, בפרט 6.37 ו- 7.27, גוררות שיש ל- T מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס אורתונורמלי כלשהו של V . ביחס לבסיס אורתונורמלי זה, המטריצה של T^* היא המשוחלפת של המטריצה של T . אולם, $T^* = T$. לפיכך המשוחלפת של המטריצה של T שווה למטריצה של T . מאחר שהמטריצה של T משולשית עליונה, משמעות הדבר כי כל איברי המטריצה מעל ומתחת האלכסון הם 0. לכן המטריצה של T מטריצה אלכסונית ביחס אל הבסיס האורתונורמלי. לפיכך (א) גורר את (ב). בכיוון ההפוך, כעת נניח ש- (ב) מתקיים, כלומר יש ל- T מטריצה אלכסונית ביחס לבסיס אורתונורמלי כלשהו של V . מטריצה אלכסונית זו שווה למשוחלפת שלה. לפיכך ביחס לבסיס זה, המטריצה של T^* שווה למטריצה של T . לכן $T^* = T$, ובכך הוכחנו כי (ב) גורר את (א).

השקילות בין (ב) ל- (ג) נובעת מההגדרות [לחלופין, ראו את ההוכחה ש- (א) ו- (ב) שקולים ב- 5.55].

7.30 דוגמה: בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים עבור אופרטור

נתבונן באופרטור T מעל $\mathbf{R}^3$ שהמטריצה שלו (ביחס לבסיס הסטנדרטי) היא

$$\begin{pmatrix} 14 & -13 & 8 \\ -13 & 14 & 8 \\ 8 & 8 & -7 \end{pmatrix}.$$

מטריצה זו עם איברים ממשיים שווה למשוחלפת שלה; לפיכך T צמוד לעצמו. כפי שאתם יכולים לוודא,

$$\frac{(1, -1, 0)}{\sqrt{2}}, \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}}, \frac{(1, 1, -2)}{\sqrt{6}}$$

הוא בסיס אורתונורמלי של $\mathbf{R}^3$ המורכב מווקטורים עצמיים של T . ביחס לבסיס זה, המטריצה של T היא המטריצה האלכסונית

$$\begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}.$$

ראו תרגיל 17 לגרסה של משפט הפירוק הספקטרי הממשי המופעל בו זמנית על יותר מאופרטור אחד.

משפט הפירוק הספקטרי המרוכב

המסקנה הבאה מספקת תיאור מלא של אופרטורים נורמליים מעל מרחב מכפלה פנימית מרוכב.

7.31 משפט הפירוק הספקטרי המרוכב

נניח ש- $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי התנאים הבאים שקולים.
א. T נורמלי.

ב. יש ל- T מטריצה אלכסונית ביחס לבסיס אורתונורמלי כלשהו של V .

ג. יש ל- V בסיס אורתונורמלי המורכב מווקטורים עצמיים של T .

הוכחה תחילה נניח כי (א) מתקיים, כלומר T נורמלי. לפי משפט הפירוק של שור (6.38), קיים בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ של V אשר ביחס אליו יש ל- T מטריצה משולשית עליונה. לפיכך נוכל לכתוב

$$7.32 \quad \mathcal{M}(T, (e_1, \dots, e_n)) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

אנו נרְאָה כי מטריצה זו היא למעשה מטריצה אלכסונית. מהמטריצה לעיל אנו רואים ש-

$$\|Te_1\|^2 = |a_{1,1}|^2,$$

$$\|T^*e_1\|^2 = |a_{1,1}|^2 + |a_{1,2}|^2 + \cdots + |a_{1,n}|^2.$$

מאחר ש- T אופרטור נורמלי, $\|Te_1\| = \|T^*e_1\|$ (ראו 7.20). לפיכך שתי המשוואות לעיל גוררות שכל האיברים בשורה הראשונה של המטריצה ב 7.32, למעט אולי האיבר הראשון $a_{1,1}$, שווים 0.

כעת 7.32 גורר ש-

$$\|Te_2\|^2 = |a_{2,2}|^2$$

(מאחר ש- $a_{1,2} = 0$ כפי שהראינו בפסקה הקודמת) כמו גם

$$\|T^*e_2\|^2 = |a_{2,2}|^2 + |a_{2,3}|^2 + \cdots + |a_{2,n}|^2.$$

מאחר ש- T אופרטור נורמלי, $\|Te_2\| = \|T^*e_2\|$. לפיכך שתי המשוואות לעיל גוררות שכל האיברים בשורה השנייה של המטריצה ב 7.32, למעט אולי איבר האלכסון $a_{2,2}$, שווים 0.

נמשיך בדרך זו, ונראה כי כל האיברים שאינם באלכסון המטריצה 7.32 שווים 0. לפיכך (ב) מתקיים, ובכך השלמנו את ההוכחה כי (א) גורר את (ב).

כעת נניח כי (ב) מתקיים, כלומר יש ל- T מטריצה אלכסונית ביחס לבסיס אורתונורמלי כלשהו של V . המטריצה של T^* (ביחס אל אותו הבסיס) מתקבלת על ידי לקיחת הצמודה-משוחלפת של המטריצה של T ; לכן גם ל- T^* יש מטריצה אלכסונית. כל שתי מטריצות אלכסוניות מתחלפות; לפיכך T מתחלף עם T^* , משמעות הדבר ש- T נורמלי. במילים אחרות, (א) מתקיים, ובכך הושלמה ההוכחה כי (ב) גורר את (א).

השקילות של (ב) ו- (ג) נובעת מההגדרות (ראו בנוסף 5.55).

ראו תרגילים 13 ו- 20 להוכחות חלופיות לכך ש- (א) גורר את (ב) במסקנה הקודמת.

תרגילים 14 ו- 15 מפרשים את משפט הפירוק הספקטרלי הממשי ומשפט הפירוק הספקטרלי המרוכב בכך שהם מבטאים את מרחב התחום כסכום ישר אורתוגונלי של המרחבים העצמיים.

ראו תרגיל 16 לגרסה של משפט הפירוק הספקטרלי המרוכב המופעל בו זמנית על יותר מאופרטור אחד.

המסקנה המרכזית של משפט הפירוק הספקטרלי המרוכב היא שכל אופרטור נורמלי מעל מרחב מכפלה פנימית מרוכב מממד סופי לכסין באמצעות בסיס אורתונורמלי, כפי שממחישה הדוגמה הבאה.

7.33 דוגמה: בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים עבור אופרטור

נתבונן באופרטור $T \in \mathcal{L}(C^2)$ המוגדר על ידי $T(w, z) = (2w - 3z, 3w + 2z)$. המטריצה של T (ביחס אל הבסיס הסטנדרטי) היא

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

כפי שראינו בדוגמה 7.19, T אופרטור נורמלי.

כפי שבאפשרותכם לוודא,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-i, 1)$$

היא בסיס אורתונורמלי של C^2 המורכב מווקטורים עצמיים של T , וביחס לבסיס זה המטריצה של T היא המטריצה האלכסונית

$$\begin{pmatrix} 2 + 3i & 0 \\ 0 & 2 - 3i \end{pmatrix}.$$

תרגילים 2ז

1 הוכיחו כי אופרטור נורמלי מעל מרחב מכפלה פנימית מרוכב צמוד לעצמו אס-ורק-אם כל הערכים העצמיים שלו ממשיים.

תרגיל זה פוזק את האנלוגיה (עבור אופרטורים נורמליים) בין אופרטורים צמודים לעצמם ומספרים ממשיים.

2 נניח ש- $F = C$. נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ נורמלי ויש לו ערך עצמי אחד בלבד. הוכיחו כי T כפולת סקלר של אופרטור הזהות.

3 נניח ש- $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ נורמלי. הוכיחו כי קבוצת הערכים העצמיים של T מוכלת ב- $\{0, 1\}$ אס-ורק-אם ישנו תת-מרחב U של V כך ש- $T = P_U$.

4 הוכיחו כי אופרטור נורמלי מעל מרחב מכפלה פנימית מרוכב הוא אנטי-צמוד (כלומר הוא שווה למינוס של האופרטור הצמוד שלו) אס-ורק-אם כל הערכים העצמיים שלו מדומים טהורים (כלומר החלק הממשי שבהם שווה 0).

- 5 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם $T \in \mathcal{L}(C^3)$ אופרטור לכסין, אזי T נורמלי (ביחס אל המכפלה הפנימית הרגילה).
- 6 נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית מרוכב ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור נורמלי כך ש- $T^9 = T^8$. הוכיחו כי T צמוד לעצמו וכי $T^2 = T$.
- 7 הביאו דוגמה של אופרטור T מעל מרחב וקטורי מרוכב כך ש- $T^9 = T^8$ אבל $T^2 \neq T$.
- 8 נניח ש- $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי T נורמלי אם ורק אם כל וקטור עצמי של T הוא גם וקטור עצמי של T^* .
- 9 נניח ש- $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי T נורמלי אם ורק אם קיים פולינום $p \in \mathcal{P}(C)$ כך ש- $T^* = p(T)$.
- 10 נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית מרוכב. הוכיחו כי לכל אופרטור נורמלי מעל V יש שורש ריבועי.
- אופרטור $S \in \mathcal{L}(V)$ נקרא **שורש ריבועי** של $T \in \mathcal{L}(V)$ אם $S^2 = T$. אנו נרחיב על שורשים ריבועיים של אופרטורים ביחידות 3א ו- 3ב.
- 11 הוכיחו כי לכל אופרטור צמוד לעצמו מעל V יש שורש שלישי. אופרטור $S \in \mathcal{L}(V)$ נקרא **שורש שלישי** של $T \in \mathcal{L}(V)$ אם $S^3 = T$.
- 12 נניח ש- V מרחב וקטורי מרוכב ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ נורמלי. הוכיחו כי אם S אופרטור מעל V המתחלף עם T , אזי S מתחלף עם T^* .
- המסקנה בתרגיל זה נקראת משפט פאגלדה (Fuglede's theorem).
- 13 מבלי להשתמש במשפט הפירוק הספקטרלי המרוכב, השתמשו בגרסה של משפט הפירוק של שור המיושם על שני אופרטורים מתחלפים (קחו את $\mathcal{E} = \{T, T^*\}$ בתרגיל 20 ביחידה 21) כדי לתת הוכחה שונה לכך שאם $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ נורמלי, אזי יש ל- T מטריצה אלכסונית ביחס לבסיס אורתונורמלי כלשהו של V .
- 14 נניח ש- $F = R$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי T צמוד לעצמו אם ורק אם כל זוגות הווקטורים העצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים של T הם אורתוגונליים וגם $V = E(\lambda_1, T) \oplus \dots \oplus E(\lambda_m, T)$, כאשר $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ מסמנים את הערכים העצמיים השונים של T .
- 15 נניח ש- $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי T נורמלי אם ורק אם כל הזוגות של וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים של T אורתוגונליים ו- $V = E(\lambda_1, T) \oplus \dots \oplus E(\lambda_m, T)$, כאשר $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ מסמנים את הערכים העצמיים השונים של T .
- 16 נניח ש- $F = C$ ו- $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי קיים בסיס אורתונורמלי של V אשר ביחס אליו לכל איבר של $\mathcal{E}$ יש מטריצה אלכסונית אם ורק אם $T \in \mathcal{E}$ אופרטורים נורמליים מתחלפים לכל $S, T \in \mathcal{E}$.
- תרגיל זה מרחיב את משפט הפירוק הספקטרלי המרוכב להקשר של אוסף אופרטורים נורמליים מתחלפים.

17 נניח ש- $F = \mathbb{R}$ ו- $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי קיים בסיס אורתונורמלי של V אשר ביחס אליו יש לכל איבר של $\mathcal{E}$ מטריצה אלכסונית אס-ורק-אם S ו- T אופרטורים מתחלפים הצמודים לעצמם לכל $S, T \in \mathcal{E}$.

תרגיל זה מרחיב את משפט הפירוק הספקטרי הממשי להקשר של אוסף אופרטורים מתחלפים הצמודים לעצמם.

18 הביאו דוגמה של מרחב מכפלה פנימית ממשי V , אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$, ומספרים ממשיים b, c עם $b^2 < 4c$ כך ש-

$$T^2 + bT + cI$$

אינו הפיך.

תרגיל זה מראה כי ההנחה ש- T צמוד לעצמו הכרחית ב-7.26, אפילו עבור מרחבים וקטוריים ממשיים.

19 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ צמוד לעצמו ו- U תת-מרחב של V השמור תחת T .

א. הוכיחו כי $U^\perp$ שמור תחת T .

ב. הוכיחו כי $T|_U \in \mathcal{L}(U)$ צמוד לעצמו.

ג. הוכיחו כי $T|_{U^\perp} \in \mathcal{L}(U^\perp)$ צמוד לעצמו.

20 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ נורמלי ו- U תת-מרחב של V השמור תחת T .

א. הוכיחו כי $U^\perp$ שמור תחת T .

ב. הוכיחו כי U שמור תחת T^* .

ג. הוכיחו כי $(T|_U)^* = (T^*)|_U$.

ד. הוכיחו כי $T|_U \in \mathcal{L}(U)$ ו- $T|_{U^\perp} \in \mathcal{L}(U^\perp)$ אופרטורים נורמליים.

תרגיל זה יכול לשמש כהוכחה נוספת של משפט הפירוק הספקטרי המרוכב (השתמשו באינדוקציה על $\dim V$ ובמסקנה כי יש ל- T וקטור עצמי).

21 נניח ש- T אופרטור צמוד לעצמו מעל מרחב מכפלה פנימית מממד סופי וכי 2 ו-3 הם הערכים העצמיים היחידים של T . הוכיחו כי

$$T^2 - 5T + 6I = 0.$$

22 הביאו דוגמה של אופרטור $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ כך ש-2 ו-3 הם הערכים העצמיים היחידים של T ו- $T^2 - 5T + 6I \neq 0$.

23 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ צמוד לעצמו, $\lambda \in \mathbb{F}$, ו- $\epsilon > 0$. נניח שקיים $v \in V$ כך ש- $\|v\| = 1$ וגם

$$\|Tv - \lambda v\| < \epsilon.$$

הוכיחו כי יש ל- T ערך עצמי λ' כך ש- $|\lambda - \lambda'| < \epsilon$.

תרגיל זה מראה כי עבור אופרטור צמוד לעצמו, מספר שכמעט מקיים את המשוואה ההופכת אותו לערך עצמי, קרוב לערך עצמי.

24 נניח ש- U מרחב וקטורי מממד סופי ו- $T \in \mathcal{L}(U)$.

א. נניח ש- $F = \mathbb{R}$. הוכיחו כי T לכסין אס-ורק-אם קיים בסיס של U כך שהמטריצה של T ביחס לבסיס זה שווה למשוחלפת שלה.

ב. נניח ש- $F = \mathbb{C}$. הוכיחו כי T לכסין אס-ורק-אם קיים בסיס של U כך שהמטריצה של T ביחס לבסיס זה מתחלפת עם הצמודה-משוחלפת שלה.

תרגיל זה מוסיף עוד תנאי שקול לרשימת התנאים השקולים של לכסיות ב- 5.55.

25 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ וקיים בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ של V המורכב מווקטורים עצמיים של T , עם ערכים עצמיים מתאימים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. הראו כי אם $k \in \{1, \dots, n\}$, אזי הפסידו-הופכי $T^\dagger$ מקיים את המשוואה

$$T^\dagger e_k = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_k} e_k & \text{if } \lambda_k \neq 0, \\ 0 & \text{if } \lambda_k = 0. \end{cases}$$

3ז אופרטורים חיוביים

7.34 הגדרה: אופרטור חיובי

אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ נקרא חיובי אם T צמוד לעצמו וגם

$$\langle Tv, v \rangle \geq 0$$

לכל $v \in V$.

אם V מרחב וקטורי מרוכב, אזי אפשר להסיר מההגדרה לעיל את הדרישה ש- T יהיה צמוד לעצמו (לפי 7.14).

7.35 דוגמה: אופרטורים חיוביים

א. יהי $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$ האופרטור אשר המטריצה שלו (ביחס לבסיס הסטנדרטי) היא $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. אזי T צמוד לעצמו וגם

$$\langle T(w, z), (w, z) \rangle = 2|w|^2 - 2\operatorname{Re}(w\bar{z}) + |z|^2$$

$$= |w - z|^2 + |w|^2$$

$$\geq 0$$

לכל $(w, z) \in \mathbb{F}^2$. לפיכך T אופרטור חיובי.

ב. אם U תת-מרחב של V , אזי ההיטל האורתוגונלי P_U הוא אופרטור חיובי, כפי שעליכם לוודא.

ג. אם $T \in \mathcal{L}(V)$ צמוד לעצמו ו- $b, c \in \mathbb{R}$ הם כך ש- $b^2 < 4c$, אזי $T^2 + bT + cI$ אופרטור חיובי, כפי שראינו בהוכחת 7.26.

7.36 הגדרה: שורש ריבועי

אופרטור R נקרא שורש ריבועי של אופרטור T אם $R^2 = T$.

7.37 דוגמה: שורש ריבועי של אופרטור

אם $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$ אופרטור המוגדר על ידי $T(z_1, z_2, z_3) = (z_3, 0, 0)$, אזי האופרטור $R \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$ המוגדר על ידי $R(z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_3, 0)$ הוא שורש ריבועי של T מאחר ש- $R^2 = T$, כפי שבאפשרותכם לוודא.

מאחר שאופרטורים חיוביים מתאימים למספרים אי-שליליים, נכון יותר היה להשתמש במונח אופרטורים אי-שליליים. אולם, מאחר שהשימוש במונח אופרטור חיובי התקבע בקרב המתמטיקאים, נשתמש בו גם אנו.

האפיונים של האופרטורים החיוביים במסקנה הבאה תואמים לאפיוני המספרים האי-שליליים ב- $\mathbb{C}$. בפרט, מספר $z \in \mathbb{C}$ הוא אי-שלילי אם-ורק-אם יש לו שורש ריבועי אי-שלילי, בהתאמה לתנאי (ד). בנוסף, z אי-שלילי אם-ורק-אם יש לו שורש ריבועי ממשי, בהתאמה לתנאי (ה). לבסוף,

z אי-שלילי אם-ורק-אם קיים $w \in \mathbb{C}$ כך ש- $z = \bar{w}w$, בהתאמה לתנאי (ו). ראו תרגיל 20 לתנאי נוסף השקול לכך שאופרטור יהיה חיובי.

7.38 אפיונים של אופרטורים חיוביים

יהי $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי התנאים הבאים שקולים.

א. T אופרטור חיובי.

ב. T צמוד לעצמו וכל הערכים העצמיים של T אי-שליליים.

ג. ביחס לבסיס אורתונורמלי כלשהו של V , המטריצה של T מטריצה אלכסונית עם מספרים אי-שליליים בלבד על האלכסון.

ד. ל- T יש שורש ריבועי חיובי.

ה. ל- T יש שורש ריבועי הצמוד לעצמו.

ו. $T = R^*R$ עבור $R \in \mathcal{L}(V)$ כלשהו.

הוכחה אנו נוכיח כי (א) $\Leftrightarrow$ (ב) $\Leftrightarrow$ (ג) $\Leftrightarrow$ (ד) $\Leftrightarrow$ (ה) $\Leftrightarrow$ (א).

תחילה נניח כי (א) מתקיים, כך ש- T חיובי, מה שגורר ש- T צמוד לעצמו (לפי ההגדרה של אופרטור חיובי). להוכחת התנאי הנוסף בסעיף (ב), נניח ש- λ ערך עצמי של T . יהי v וקטור עצמי של T השייך ל- λ . אזי

$$0 \leq \langle Tv, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle.$$

לפיכך λ מספר אי-שלילי. לכן (ב) מתקיים, ובכך הראינו כי (א) גורר את (ב). כעת נניח כי (ב) מתקיים, כך ש- T צמוד לעצמו וכל הערכים העצמיים של T הם אי-שליליים. לפי משפט הפירוק הספקטרלי (7.29 ו-7.31), קיים בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ של V המורכב מווקטורים עצמיים של T . יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ הערכים העצמיים של T השייכים ל- $e_1, \dots, e_n$; לפיכך כל λ_k הוא מספר אי-שלילי. המטריצה של T ביחס אל $e_1, \dots, e_n$ היא המטריצה האלכסונית עם $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ על האלכסון, מה שמראה ש- (ב) גורר את (ג).

כעת נניח ש- (ג) מתקיים. נניח ש- $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V כך שהמטריצה של T ביחס לבסיס זה היא מטריצה אלכסונית עם $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ מספרים אי-שליליים על האלכסון. מלמת ההעתקה הליניארית (3.4) נובע כי קיים $R \in \mathcal{L}(V)$ כך ש-

$$Re_k = \sqrt{\lambda_k} e_k$$

לכל $k = 1, \dots, n$. כפי שעליכם לוודא, R אופרטור חיובי. יתר על כן, $R^2 e_k = \lambda_k e_k = T e_k$ לכל k , מה שגורר ש- $R^2 = T$. לפיכך R שורש ריבועי חיובי של T . לכן (ד) מתקיים, מה שמראה ש- (ג) גורר את (ד).

כל אופרטור חיובי צמוד לעצמו (לפי ההגדרה של אופרטור חיובי). לפיכך (ד) גורר את (ה).

כעת נניח ש- (ה) מתקיים, משמעות הדבר כי קיים אופרטור צמוד לעצמו R מעל V כך ש- $T = R^2$. אזי $T = R^*R$ (מאחר ש- $R^* = R$). לכן (ה) גורר את (ו). לבסוף, נניח ש- (ו) מתקיים. נגדיר $R \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $T = R^*R$. אזי נקבל $T^* = (R^*R)^* = R^*(R^*)^* = R^*R = T$. לכן T צמוד לעצמו. להשלמת ההוכחה כי (א) מתקיים, שימו לב ש-

$$\langle Tv, v \rangle = \langle R^*Rv, v \rangle = \langle Rv, Rv \rangle \geq 0$$

לכל $v \in V$. לפיכך T חיובי, ובכך הראינו כי (ו) גורר את (א).

לכל מספר אי-שלילי יש שורש ריבועי אי-שלילי יחיד. המסקנה הבאה מראה כי לאופרטורים חיוביים יש תכונה דומה.

7.39 לכל אופרטור חיובי יש שורש ריבועי חיובי אחד בלבד

לכל אופרטור חיובי מעל V יש שורש ריבועי חיובי יחיד.

לאופרטור חיובי יכולים להיות אינסוף שורשים ריבועיים (אף שרק אחד מהם יכול להיות חיובי). לדוגמה, לאופרטור הזהות מעל V יש אינסוף שורשים ריבועיים אם $\dim V > 1$.

הוכחה נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ חיובי. נניח ש- $v \in V$ וקטור עצמי של T . לכן קיים מספר ממשי $\lambda \geq 0$ כך ש- $Tv = \lambda v$.

יהי R שורש ריבועי חיובי של T . אנו נוכיח כי $Rv = \sqrt{\lambda}v$. מכאן נסיק שההתנהגות של R מעל הווקטורים העצמיים

של T נקבעת באופן יחיד. מאחר שקיים בסיס של V המורכב מהווקטורים העצמיים של T (לפי משפט הפירוק הספקטרלי), מזה נגרר ש- R נקבע באופן יחיד.

כדי להוכיח כי $Rv = \sqrt{\lambda}v$, נשים לב שמשפט הפירוק הספקטרלי קובע כי קיים בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ של V המורכב מווקטורים עצמיים של R . מאחר ש- R אופרטור חיובי, כל הערכים העצמיים אי-שליליים. לפיכך קיימים מספרים אי-שליליים

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ כך ש- } Re_k = \sqrt{\lambda_k}e_k \text{ לכל } k = 1, \dots, n.$$

מאחר ש- $e_1, \dots, e_n$ בסיס של V , נוכל לכתוב

$$v = a_1e_1 + \dots + a_n e_n$$

עבור $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ כלשהם. לפיכך

$$Rv = a_1\sqrt{\lambda_1}e_1 + \dots + a_n\sqrt{\lambda_n}e_n.$$

לכן

$$\lambda v = Tv = R^2v = a_1\lambda_1e_1 + \dots + a_n\lambda_ne_n.$$

המשוואה לעיל גוררת ש-

$$a_1\lambda e_1 + \dots + a_n\lambda e_n = a_1\lambda_1e_1 + \dots + a_n\lambda_ne_n.$$

לפיכך $a_k(\lambda - \lambda_k) = 0$ לכל $k = 1, \dots, n$. לכן

$$v = \sum_{\{k: \lambda_k = \lambda\}} a_k e_k.$$

לפיכך

$$Rv = \sum_{\{k: \lambda_k = \lambda\}} a_k \sqrt{\lambda} e_k = \sqrt{\lambda}v,$$

כפי שרצינו.

הסימון המוגדר להלן הגיוני ובעל משמעות לאור המסקנה לעיל.

7.40 סימון: $\sqrt{T}$

עבור T אופרטור חיובי, $\sqrt{T}$ מסמן את השורש הריבועי החיובי היחיד של T .

7.41 דוגמה: שורש ריבועי של אופרטורים חיוביים

נגדיר אופרטורים S, T מעל $\mathbf{R}^2$ (עם המכפלה הפנימית האוקלידית הרגילה) על ידי

$$S(x, y) = (x, 2y) \quad \text{וגם} \quad T(x, y) = (x + y, x + y).$$

אזי ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^2$ נקבל

$$7.42 \quad \mathcal{M}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

כל אחת מהמטריצות הללו שווה למשוחלפת שלה; לפיכך S ו- T צמודים לעצמם.

אם $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, אזי

$$\langle S(x, y), (x, y) \rangle = x^2 + 2y^2 \geq 0$$

וגם

$$\langle T(x, y), (x, y) \rangle = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \geq 0.$$

לפיכך S ו- T אופרטורים חיוביים.

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^2$ הוא בסיס אורתונורמלי המורכב מווקטורים עצמיים

של S . נשים לב כי

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

הוא בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של T , עם הערך העצמי 2 עבור הווקטור

העצמי הראשון והערך העצמי 0 עבור הווקטור העצמי השני. לפיכך ל- $\sqrt{T}$ אותם

וקטורים עצמיים, עם ערכים עצמיים $\sqrt{2}$ ו-0.

באפשרותכם לוודא כי

$$\mathcal{M}(\sqrt{S}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{וגם} \quad \mathcal{M}(\sqrt{T}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ביחס לבסיס הסטנדרטי על ידי כך שתראו כי ריבועי המטריצות לעיל הם המטריצות

ב-7.42 ובנוסף כל מטריצה לעיל היא מטריצה של אופרטור חיובי.

הניסוח של המסקנה הבאה אינו עוסק בשורש ריבועי, אך ההוכחה הנקייה עושה

שימוש יפה בשורש ריבועי של אופרטור חיובי.

7.43 T חיובי ו- $Tv = 0 \implies \langle Tv, v \rangle = 0$

נניח ש- T אופרטור חיובי מעל V ו- $v \in V$ כך ש- $\langle Tv, v \rangle = 0$. אזי $Tv = 0$.

הוכחה מתקיים

$$0 = \langle Tv, v \rangle = \langle \sqrt{T} \sqrt{T} v, v \rangle = \langle \sqrt{T} v, \sqrt{T} v \rangle = \|\sqrt{T} v\|^2.$$

לכן $\sqrt{T} v = 0$. לפיכך $Tv = \sqrt{T}(\sqrt{T} v) = 0$, כפי שרצינו.

- 1 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי אם T ו- $-T$ שניהם אופרטורים חיוביים, אזי $T = 0$.
- 2 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$ הוא האופרטור אשר המטריצה שלו (ביחס לבסיס הסטנדרטי) היא

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
 הראו כי T אופרטור חיובי הפיך.
- 3 נניח ש- n מספר שלם חיובי ו- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$ הוא האופרטור שהמטריצה שלו (ביחס לבסיס הסטנדרטי) מורכבת כולה מאיברים עם המספר 1. הראו כי T אופרטור חיובי.
- 4 נניח ש- n מספר שלם עם $n > 1$. הראו כי קיימת A מטריצה $n \times n$ כך שכל איברי A מספרים חיוביים ו- $A = A^*$, אך האופרטור מעל $\mathbb{F}^n$ אשר המטריצה שלו (ביחס לבסיס הסטנדרטי) שווה ל- A אינו אופרטור חיובי.
- 5 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ צמוד לעצמו. הוכיחו כי T אופרטור חיובי אם ורק אם לכל בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ של V , כל האיברים על האלכסון של המטריצה $\mathcal{M}(T, (e_1, \dots, e_n))$ הם מספרים אי-שליליים.
- 6 הוכיחו כי הסכום של שני אופרטורים חיוביים מעל V הוא אופרטור חיובי.
- 7 נניח ש- $S \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור חיובי הפיך ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור חיובי. הוכיחו כי $S + T$ אופרטור הפיך.
- 8 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי T אופרטור חיובי אם ורק אם הפסידו-הופכי $T^\dagger$ הוא אופרטור חיובי.
- 9 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור חיובי ו- $S \in \mathcal{L}(W, V)$. הוכיחו כי S^*TS אופרטור חיובי מעל W .
- 10 נניח ש- T אופרטור חיובי מעל V . נניח ש- $v, w \in V$ כך ש- $Tv = w$ וגם $Tw = v$. הוכיחו כי $v = w$.
- 11 נניח ש- T אופרטור חיובי מעל V ו- U תת-מרחב של V שמור תחת T . הוכיחו כי $T|_U \in \mathcal{L}(U)$ אופרטור חיובי מעל U .
- 12 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור חיובי. הוכיחו כי T^k אופרטור חיובי לכל k מספר שלם חיובי.

13 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ צמוד לעצמו ו- $\alpha \in \mathbb{R}$.

- א. הוכיחו כי $T - \alpha I$ אופרטור חיובי אם-ורק אם α קטן או שווה לכל ערך עצמי של T .
- ב. הוכיחו כי $T - \alpha I$ אופרטור חיובי אם-ורק אם α גדול או שווה לכל ערך עצמי של T .

14 נניח ש- T אופרטור חיובי מעל V ו- $v_1, \dots, v_m \in V$. הוכיחו כי

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \langle Tv_k, v_j \rangle \geq 0.$$

15 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ צמוד לעצמו. הוכיחו כי קיימים אופרטורים חיוביים $A, B \in \mathcal{L}(V)$ כך ש-

$$T = A - B \quad \text{וגם} \quad \sqrt{T^*T} = A + B \quad \text{וגם} \quad AB = BA = 0.$$

16 נניח ש- T אופרטור חיובי מעל V . הוכיחו כי

$$\text{null } \sqrt{T} = \text{null } T \quad \text{וגם} \quad \text{range } \sqrt{T} = \text{range } T.$$

17 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור חיובי. הוכיחו כי קיים פולינום p עם מקדמים ממשיים כך ש- $\sqrt{T} = p(T)$.

18 נניח ש- S ו- T אופרטורים חיוביים מעל V . הוכיחו כי ST אופרטור חיובי אם-ורק אם S ו- T מתחלפים.

19 הראו כי לאופרטור הזהות מעל $\mathbb{F}^2$ יש אינסוף שורשים ריבועיים הצמודים לעצמם.

20 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V . הוכיחו כי אופרטור חיובי אם-ורק אם קיימים $v_1, \dots, v_n \in V$ כך ש-

$$\langle Te_k, e_j \rangle = \langle v_k, v_j \rangle$$

לכל $j, k = 1, \dots, n$.

המספרים $\{\langle Te_k, e_j \rangle\}_{j,k=1,\dots,n}$ הם איברי המטריצה של T ביחס אל הבסיס האורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$.

21 נניח ש- n מספר שלם חיובי. מטריצת הילברט היא מטריצה $n \times n$ שהאיבר בשורה j , עמודה k הוא $\frac{1}{j+k-1}$. נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ הוא אופרטור שהמטריצה שלו ביחס לבסיס אורתונורמלי כלשהו של V היא מטריצת הילברט $n \times n$. הוכיחו כי T אופרטור חיובי הפיך.

דוגמה: מטריצת הילברט 4×4 היא

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

22 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור חיובי ו- $u \in V$ כך ש- $\|u\| = 1$ ו- $\|Tu\| \geq \|Tv\|$ לכל $v \in V$ עם $\|v\| = 1$. הראו כי u וקטור עצמי של T השייך לערך העצמי הגדול ביותר של T .

23 עבור $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $u, v \in V$, נגדיר $\langle u, v \rangle_T = \langle Tu, v \rangle$.
 א. נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ הוא מכפלה פנימית מעל V אס־זרק־אם T הוא אופרטור חיובי הפיך (ביחס אל המכפלה הפנימית המקורית $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

ב. הוכיחו כי כל מכפלה פנימית מעל V היא מהצורה $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ עבור $T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור חיובי הפיך כלשהו.

24 נניח ש- S ו- T אופרטורים חיוביים מעל V . הוכיחו כי

$$\text{null}(S + T) = \text{null } S \cap \text{null } T.$$

25 יהי T אופרטור הנגזרת השנייה בתרגיל 31 (ב) ביחידה 1ז. הראו כי $-T$ אופרטור חיובי.

4ז איזומטריות, אופרטורים אוניטריים, ופירוק מטריצה לגורמים

איזומטריות

העתקות ליניאריות המשמרות את הנורמות חשובות עד כדי הענקת שם ייעודי.

7.44 הגדרה: איזומטריה

העתקה ליניארית $S \in \mathcal{L}(V, W)$ נקראת איזומטריה אם

$$\|Sv\| = \|v\|$$

לכל $v \in V$. במילים אחרות, העתקה ליניארית היא איזומטריה אם היא משמרת את הנורמות.

ביונייט עתיקה הפילה **איזום** משמעותה
שנה; הפילה **מטרון** משמעותה פנה. לפיכך
איזומטריה משמעותה שנות פנה.

אם $S \in \mathcal{L}(V, W)$ איזומטריה ו- $v \in V$
כך ש- $Sv = 0$, אזי

$$\|v\| = \|Sv\| = \|0\| = 0,$$

מכאן נובע ש- $v = 0$. לפיכך כל איזומטריה
היא חד-חד-ערכית.

7.45 דוגמה: בסיס אורתונורמלי המועתק לרשימה אורתונורמלית $\Leftarrow$ איזומטריה

נניח ש- $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V ו- $g_1, \dots, g_n$ רשימה אורתונורמלית
ב- W . תהי $S \in \mathcal{L}(V, W)$ ההעתקה ליניארית כך ש- $Se_k = g_k$ לכל $k = 1, \dots, n$.
כדי להראות כי S איזומטריה, נניח ש- $v \in V$ אזי

$$7.46 \quad v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n$$

וגם

$$7.47 \quad \|v\|^2 = |\langle v, e_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, e_n \rangle|^2,$$

כאשר השתמשנו ב- 6.30(ב). הפעלת S על שני האגפים של 7.46 נותנת
 $Sv = \langle v, e_1 \rangle Se_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle Se_n = \langle v, e_1 \rangle g_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle g_n$.
לפיכך

$$7.48 \quad \|Sv\|^2 = |\langle v, e_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, e_n \rangle|^2.$$

השוואת 7.47 ו- 7.48 מראה לנו ש- $\|Sv\| = \|v\|$. לפיכך S איזומטריה.

המסקנה הבאה מספקת תנאים שקולים לאיזומטריה. השקילות בין (א) ו- (ג)
מורה לנו כי העתקה ליניארית היא איזומטריה אם-ורק-אם היא משמרת את המכפלות
הפנימיות. השקילות בין (א) ו- (ד) מורה לנו כי העתקה ליניארית היא איזומטריה
אם-ורק-אם היא מעתיקה בסיס אורתונורמלי כלשהו לרשימה אורתונורמלית. לפיכך
האיזומטריות הנתונות בדוגמה 7.45 כוללות את כל האיזומטריות. יתר על כן, העתקה
ליניארית היא איזומטריה אם-ורק-אם היא מעתיקה כל בסיס אורתונורמלי לרשימה
אורתונורמלית [מאחר שקיומו של (א) אינו תלוי בבסיס $[e_1, \dots, e_n]$].

השקילות בין (א) ו- (ה) במסקנה הבאה מורה לנו כי העתקה ליניארית היא איזומטריה אס-ורק-אם עמודות המטריצה שלה (ביחס לכל בסיס אורתונורמלי) יוצרות רשימה אורתונורמלית. כאן אנו מזהים את עמודות המטריצה $m \times n$ עם איברים של F^m ואז משתמשים במכפלה הפנימית האוקלידית מעל F^m .

7.49 אפיונים של איזומטריות

נניח ש- $S \in \mathcal{L}(V, W)$. נניח ש- $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V ו- $f_1, \dots, f_m$ בסיס אורתונורמלי של W . אזי התנאים הבאים שקולים.

א. S איזומטריה.

ב. $S^*S = I$.

ג. $\langle Su, Sv \rangle = \langle u, v \rangle$ לכל $u, v \in V$.

ד. $Se_1, \dots, Se_n$ רשימה אורתונורמלית ב- W .

ה. העמודות של $\mathcal{M}(S, (e_1, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_m))$ יוצרות רשימה אורתונורמלית ב- F^m ביחס למכפלה הפנימית האוקלידית.

הוכחה תחילה נניח כי (א) מתקיים, אזי S איזומטריה. אם $v \in V$ אזי

$$\langle (I - S^*S)v, v \rangle = \langle v, v \rangle - \langle S^*Sv, v \rangle = \|v\|^2 - \langle Sv, Sv \rangle = \|v\|^2 - \|Sv\|^2 = 0.$$

לכן האופרטור הצמוד לעצמו $I - S^*S$ שווה 0 (לפי 7.16). לפיכך $S^*S = I$, ובכך הוכחנו כי (א) גורר את (ב).

כעת נניח כי (ב) מתקיים, אזי $S^*S = I$. אם $u, v \in V$ אזי

$$\langle Su, Sv \rangle = \langle S^*Su, v \rangle = \langle Iu, v \rangle = \langle u, v \rangle,$$

בכך הוכחנו כי (ב) גורר את (ג).

כעת נניח כי (ג) מתקיים, אזי $\langle Su, Sv \rangle = \langle u, v \rangle$ לכל $u, v \in V$. לפיכך אם

$j, k \in \{1, \dots, n\}$ אזי

$$\langle Se_j, Se_k \rangle = \langle e_j, e_k \rangle.$$

לכן $Se_1, \dots, Se_n$ רשימה אורתונורמלית ב- W , ובכך הוכחנו כי (ג) גורר את (ד).

כעת נניח ש- (ד) מתקיים, אזי $Se_1, \dots, Se_n$ רשימה אורתונורמלית ב- W . תהי

$$A = \mathcal{M}(S, (e_1, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_m)) \quad \text{אם } k, r \in \{1, \dots, n\}$$

$$7.50 \quad \sum_{j=1}^m A_{j,k} \overline{A_{j,r}} = \left\langle \sum_{j=1}^m A_{j,k} f_j, \sum_{j=1}^m A_{j,r} f_j \right\rangle = \langle Se_k, Se_r \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } k = r, \\ 0 & \text{if } k \neq r. \end{cases}$$

האגף השמאלי של 7.50 הוא המכפלה הפנימית ב- F^m של עמודות k ו- r של A . לפיכך העמודות של A יוצרות רשימה אורתונורמלית ב- F^m , ובכך הוכחנו כי (ד) גורר את (ה).

כעת נניח כי (ה) מתקיים, כלומר העמודות של המטריצה A שהוגדרו בפסקה

הקודמת יוצרות רשימה אורתונורמלית ב- F^m . אזי לפי 7.50 הרשימה $Se_1, \dots, Se_n$ היא

אורתונורמלית ב- W . לפיכך דוגמה 7.45, יחד עם $Se_1, \dots, Se_n$ הממלאים את התפקיד

של $g_1, \dots, g_n$, מראה ש- S איזומטריה, ובכך הוכחנו כי (ה) גורר את (א). ■

ראו תרגילים 1 ו- 11 לתנאים שקולים נוספים לאיזומטריה.

אופרטורים אוניטריים

בתת־יחידה זו של הפרק, נמקד את תשומת ליבנו בהעתקות ליניאריות ממרחב וקטורי לעצמו. במילים אחרות, אנו נעבוד עם אופרטורים.

7.51 הגדרה: אופרטור אוניטרי

אופרטור $S \in \mathcal{L}(V)$ נקרא אוניטרי אם S הוא איזומטריה הפיכה.

אף שהמילים "אוניטרי" ו-"איזומטריה" משמעותן זהה עבור אופרטורים מעל מרחבי מכפלה פנימית מממד סופי, זכרו כי אופרטור אוניטרי מעתיק מרחב וקטורי לעצמו, בעוד איזומטריה מעתיקה מרחב וקטורי אל מרחב וקטורי (שייתכן שהוא אחר).

כפי שצוין קודם, כל איזומטריה היא חד־חד־ערכית. כל אופרטור חד־חד־ערכי מעל מרחב וקטורי מממד סופי הפיך (ראו 3.65). הנחת המוצא לפרק זה היא ש־ V מרחב מכפלה פנימית מממד סופי. לפיכך אנו יכולים להשמיט את המילה "הפיך" מההגדרה לעיל בלי שהמשמעות תשתנה. המילה "הפיך" הבלתי נדרשת

נשמרה בטקסט ההגדרה לעיל לשמירה על עקביות עם ההגדרה שבה עשויים הקוראים להיתקל בלימוד מרחבי מכפלה פנימית שאינם בהכרח מממד סופי.

7.52 דוגמה: סיבוב של $\mathbb{R}^2$

נניח ש־ $\theta \in \mathbb{R}$ ו־ S הוא האופרטור מעל $\mathbb{R}^2$ אשר המטריצה שלו ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$ היא

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

שתי העמודות של מטריצה זו יוצרות רשימה אורתונורמלית ב־ $\mathbb{R}^2$; לכן S איזומטריה (לפי השקילות בין (א) ו־ (ה) ב־ 7.49). לפיכך S אופרטור אוניטרי.

אם $F = \mathbb{R}$, אזי S הוא אופרטור המבצע סיבוב נגד כיוון השעון של θ רדיאנים סביב ראשית הצירים של $\mathbb{R}^2$. התבוננות זו מעניקה לנו דרך נוספת לחשוב על הסיבה מדוע S איזומטריה, מאחר שכל סיבוב סביב ראשית הצירים של $\mathbb{R}^2$ משמר את הנורמות.

במסקנה הבאה (7.53) מפורטים מספר תנאים השקולים לכך שאופרטור יהיה אוניטרי. כל התנאים השקולים כדי להיות איזומטריה המפורטים ב־ 7.49 צריכים להתווסף לרשימה זו. התנאים הנוספים ב־ 7.53 נוצרו לאור העובדה כי הגבלנו את ההקשר להעתקות ממרחב וקטורי לעצמו. לדוגמה, 7.49 מורה לנו כי העתקה ליניארית $S \in \mathcal{L}(V, W)$ איזומטריה אס־ורק־אם $S^*S = I$, בעוד 7.53 מורה לנו כי אופרטור $S \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור אוניטרי אס־ורק־אם $S^*S = SS^* = I$.

הבדל נוסף הוא שב־ 7.49 (ד) אנו מתייחסים לרשימה אורתונורמלית, בעוד ב־ 7.53 (ד) אנו מתייחסים לבסיס אורתונורמלי. בנוסף, ב־ 7.49 (ה) אנו מתייחסים לעמודות של $\mathcal{M}(T)$, בעוד ב־ 7.53 (ה) אנו מתייחסים לשורות של $\mathcal{M}(T)$. יתר על כן, ב־ 7.49 (ה) היא ביחס לבסיס אורתונורמלי של V ובסיס אורתונורמלי של W , בעוד ב־ 7.53 (ה) היא ביחס לבסיס יחיד של V הממלא תפקיד כפול.

7.53 אפיונים של אופרטורים אוניטריים

- נניח ש- $S \in \mathcal{L}(V)$. נניח ש- $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V . אזי התנאים הבאים שקולים.
- S אופרטור אוניטרי.
 - $S^*S = SS^* = I$.
 - S הפיך ו- $S^{-1} = S^*$.
 - $Se_1, \dots, Se_n$ בסיס אורתונורמלי של V .
 - השורות של $\mathcal{M}(S, (e_1, \dots, e_n))$ יוצרות בסיס אורתונורמלי של F^n ביחס אל המכפלה הפנימית האוקלידית.
 - S^* אופרטור אוניטרי.

הוכחה תחילה נניח כי (א) מתקיים, אזי S אופרטור אוניטרי. לכן

$$S^*S = I$$

לפי השקילות של (א) ו- (ב) ב- 7.49. כשנכפיל כל אגף של משוואה זו מימין ב- S^{-1} , נקבל $S^* = S^{-1}$. לפיכך $S^* = SS^{-1} = I$, כפי שרצינו, ובכך הוכחנו כי (א) גורר את (ב).

ההגדרות של הפיך ושל הופכי מראות לנו כי (ב) גורר את (ג).

כעת נניח ש- (ג) מתקיים, אזי S הפיך ו- $S^{-1} = S^*$. לפיכך $S^*S = I$. לכן $Se_1, \dots, Se_n$ היא רשימה אורתונורמלית ב- V , לפי השקילות של (ב) ו- (ד) ב- 7.49. מספר האיברים של רשימה זו הוא $\dim V$. לפיכך $Se_1, \dots, Se_n$ בסיס אורתונורמלי של V , ובכך הוכחנו כי (ג) גורר את (ד).

כעת נניח כי (ד) מתקיים, אזי $Se_1, \dots, Se_n$ בסיס אורתונורמלי של V . מהשקילות בין (א) ל- (ד) ב- 7.49, אנו רואים כי S אופרטור אוניטרי. לפיכך

$$(S^*)^*S^* = SS^* = I,$$

כאשר המשוואה האחרונה מתקיימת מאחר שכבר הראינו כי (א) גורר את (ב) במסקנה זו. המשוואה לעיל והשקילות של (א) ו- (ב) ב- 7.49 מראות כי S^* איזומטריה. לפיכך העמודות של $\mathcal{M}(S^*, (e_1, \dots, e_n))$ יוצרות בסיס אורתונורמלי של F^n [משקילות (א) ו- (ה) ב- 7.49]. השורות של $\mathcal{M}(S, (e_1, \dots, e_n))$ הן הצמוד המרוכב של העמודות של $\mathcal{M}(S^*, (e_1, \dots, e_n))$. לפיכך השורות של $\mathcal{M}(S, (e_1, \dots, e_n))$ יוצרות בסיס אורתונורמלי של F^n , ובכך הוכחנו כי (ד) גורר את (ה).

כעת נניח כי (ה) מתקיים. לפיכך העמודות של $\mathcal{M}(S^*, (e_1, \dots, e_n))$ יוצרות בסיס אורתונורמלי של F^n . השקילות של (א) ו- (ה) ב- 7.49 מראה ש- S^* איזומטריה, ובכך הוכחנו כי (ה) גורר את (ו).

כעת נניח ש- (ו) מתקיים, אזי S^* אופרטור אוניטרי. שרשרת הגרירות שכבר הוכחנו במסקנה זו מראה ש- (א) גורר את (ו). ביישום מסקנה זו עבור S^* נראה כי $(S^*)^*$ אופרטור אוניטרי, ובכך הוכחנו כי (ו) גורר את (א).

הראינו כי (א) $\Leftarrow$ (ב) $\Leftarrow$ (ג) $\Leftarrow$ (ד) $\Leftarrow$ (ה) $\Leftarrow$ (ו) $\Leftarrow$ (א), ובכך השלמנו את ההוכחה.

נזכיר את האנלוגיה שהצגנו בין C ל- $\mathcal{L}(V)$. תחת אנלוגיה זו, מספר מרוכב z מתאים לאופרטור $S \in \mathcal{L}(V)$, ו- $\bar{z}$ מתאים ל- S^* . המספרים הממשיים ($z = \bar{z}$) מתאימים לאופרטורים הצמודים לעצמם ($S = S^*$), והמספרים האי-שליילים מתאימים לאופרטורים החיוביים (נושאי השם הבעייתיים).

תת-קבוצה נוספת מובחנת של C היא מעגל היחידה, המורכב מהמספרים המרוכבים z כך ש- $|z| = 1$. התנאי $|z| = 1$ שקול לתנאי $\bar{z}z = 1$. תחת האנלוגיה שלנו, הדבר מתאים לתנאי ש- $S^*S = I$, השקול לכך ש- S אופרטור אוניטרי. לכן האנלוגיה מורה לנו כי מעגל היחידה ב- C מתאים לקבוצת האופרטורים האוניטריים. בשתי המסקנות הבאות, אנלוגיה זו מופיעה בערכים העצמיים של האופרטורים האוניטריים. ראו בנוסף תרגיל 15 לדוגמה נוספת של אנלוגיה זו.

7.54 הערך המוחלט של ערכים עצמיים של אופרטורים אוניטריים הוא 1

נניח ש- λ ערך עצמי של אופרטור אוניטרי. אזי $|\lambda| = 1$.

הוכחה נניח ש- $S \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור אוניטרי ו- λ ערך עצמי של S . יהי $v \in V$ כך ש- $v \neq 0$ ו- $Sv = \lambda v$. אזי

$$\|v\| = \|Sv\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|.$$

לפיכך $|\lambda| = 1$, כפי שרצינו.

המסקנה הבאה מאפיינת אופרטורים אוניטריים מעל מרחבי מכפלה פנימית מרוכבים מממד סופי, תוך שימוש במשפט הפירוק הספקטרלי המרוכב ככלי מרכזי.

7.55 תיאור של אופרטורים אוניטריים מעל מרחבי מכפלה פנימית מרוכבים

נניח ש- $F = C$ ו- $S \in \mathcal{L}(V)$. אזי התנאים הבאים שקולים.
א. S אופרטור אוניטרי.

ב. קיים בסיס אורתונורמלי של V המורכב מווקטורים עצמיים של S שהערך המוחלט של כל הערכים העצמיים השייכים להם הוא 1.

הוכחה נניח ש- (א) מתקיים, אזי S אופרטור אוניטרי. השקילות של (א) ו- (ב) ב- 7.53 מראה ש- S נורמלי. לפיכך משפט הפירוק הספקטרלי המרוכב (7.31) מראה שקיים בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ של V המורכב מווקטורים עצמיים של S . לכל ערך עצמי של S יש ערך מוחלט 1 (לפי 7.54), ובכך השלמנו את ההוכחה כי (א) גורר את (ב).

כעת נניח ש- (ב) מתקיים. יהי $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V המורכב מווקטורים עצמיים של S אשר הערך המוחלט של כל הערכים העצמיים השייכים להם הוא 1. אזי $Se_1, \dots, Se_n$ גם כן בסיס אורתונורמלי של V מאחר ש-

$$\langle Se_j, Se_k \rangle = \langle \lambda_j e_j, \lambda_k e_k \rangle = \lambda_j \overline{\lambda_k} \langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq k, \\ 1 & \text{if } j = k \end{cases}$$

לכל $j, k = 1, \dots, n$. לפיכך השקילות של (א) ו- (ד) ב- 7.53 מראה ש- S אוניטרי, ובכך הוכחנו כי (ב) גורר את (א).

פירוק QR

בתת־יחידה זו של הפרק, אנו מסיטים את תשומת הלב שלנו מאופרטורים למטריצות. מעבר זה אמור לספק תרגול טוב לזיהוי אופרטור עם מטריצה ריבועית (אחרי שבחרנו בסיס של המרחב הווקטורי שעליו האופרטור מוגדר). בנוסף, עליכם להרגיש בנוח יותר עם תרגום רעיונות ומסקנות הלוך וחזור בין ההקשר של אופרטורים וההקשר של מטריצות ריבועיות.

כשאנו פותחים עם מטריצות $n \times n$ במקום עם אופרטורים, אם לא צוין אחרת עליכם להניח כי האופרטורים המשוויכים למטריצות חיים מעל F^n (עם המכפלה הפנימית האוקלידית) וכי המטריצות מחושבות ביחס לבסיס הסטנדרטי של F^n .

אנו פותחים בהגדרה הבאה, המעבירה את רעיון האופרטור האוניטרי אל מטריצה אוניטרית.

7.56 הגדרה: מטריצה אוניטרית

מטריצה $n \times n$ נקראת אוניטרית אם עמודותיה יוצרות רשימה אורתונורמלית ב־ F^n .

מאחר שכל רשימה אורתונורמלית בת n איברים במרחב מכפלה פנימית מממד n היא בסיס אורתונורמלי, יכולנו לכתוב, בהגדרה לעיל, "בסיס אורתונורמלי של F^n " במקום "רשימה אורתונורמלית ב־ F^n ". אם $S \in \mathcal{L}(V)$ ו־ $e_1, \dots, e_n$ ו־ $f_1, \dots, f_n$ הם בסיסים אורתונורמליים של V , אזי S אופרטור אוניטרי אם־ורק־אם $\mathcal{M}(S, (e_1, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_n))$ מטריצה אוניטרית, כפי שהראתה לנו השקילות בין (א) ו־ (ה) ב־ 7.49. בנוסף, נשים לב כי בהגדרה לעיל יכולנו להחליף "עמודות" ב"שורות" על ידי שימוש בשקילות הקיימת בין (א) ו־ (ה) ב־ 7.53.

המסקנה הבאה, שהוכחתה הושארה לקוראים כתרגיל, מספקת מספר תנאים שקולים כדי שמטריצה ריבועית תהיה אוניטרית. ב־ (ג), Qv מסמן כפל מטריצות של Q ו־ v , תוך זיהוי איברים של F^n עם מטריצות $n \times 1$ (לפעמים נקראים וקטורי עמודה). הנורמה ב־ (ג) להלן היא הנורמה האוקלידית הרגילה מעל F^n שמקורה במכפלה הפנימית האוקלידית. ב־ (ד), Q^* מסמנת את המטריצה הצמודה־משוחלפת של Q , המתאימה לאופרטור הצמוד של האופרטור שאליו משויכת המטריצה.

7.57 אפיונים של מטריצות אוניטריות

נניח ש־ Q מטריצה $n \times n$. אזי התנאים הבאים שקולים.

א. Q מטריצה אוניטרית.

ב. השורות של Q יוצרות רשימה אורתונורמלית ב־ F^n .

ג. $\|v\| = \|Qv\|$ לכל $v \in F^n$.

ד. $Q^*Q = QQ^* = I$, המטריצה $n \times n$ עם אחדים על האלכסון ואפסים בכל מקום אחר.

הפירוק QR המנוסח ומוכח להלן הוא הכלי המרכזי באלגוריתם QR הנפוץ בשימוש (לא נעסוק בו כאן) למציאת קירובים טובים לערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצות ריבועיות. במסקנה להלן, אם המטריצה A היא ב- $\mathbb{F}^{n,n}$, אזי המטריצות Q ו- R גם הן ב- $\mathbb{F}^{n,n}$.

7.58 פירוק QR

נניח ש- A מטריצה ריבועית עם עמודות בלתי תלויות ליניאריות. אזי קיימות מטריצות Q ו- R יחידות כך ש- Q אוניטרית, R משולשית עליונה עם מספרים חיוביים בלבד על האלכסון, ו-

$$A = QR.$$

הוכחה יהיו $v_1, \dots, v_n$ עמודותיה של A , כשאנו חושבים עליהן כאיברים של $\mathbb{F}^n$. הפעלת תהליך גרס-שמידט (6.32) על הרשימה $v_1, \dots, v_n$, מניבה בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ של $\mathbb{F}^n$ כך ש-

$$\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k) \quad 7.59$$

לכל $k = 1, \dots, n$. תהי R המטריצה $n \times n$ המוגדרת על ידי

$$R_{j,k} = \langle v_k, e_j \rangle,$$

כאשר $R_{j,k}$ מסמן את האיבר בשורה j , עמודה k של R . אם $j > k$, אזי e_j אורתוגונלי ל- $\text{span}(e_1, \dots, e_k)$ ולכן $R_{j,k} = 0$. לפיכך R מטריצה משולשית עליונה. אזי $\langle v_k, e_j \rangle = 0$ לפיכך R מטריצה משולשית עליונה.

תהי Q המטריצה האוניטרית שעמודותיה הן $e_1, \dots, e_n$. אם $k \in \{1, \dots, n\}$, אזי העמודה ה- k^{th} של QR שווה לצירוף ליניארי של העמודות של Q , עם מקדמי הצירוף הליניארי המגיעים מהעמודה ה- k^{th} של R —ראו 3.51א). לכן העמודה ה- k^{th} של QR שווה ל-

$$\langle v_k, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v_k, e_k \rangle e_k,$$

השווה ל- v_k [לפי 6.30א)], העמודה ה- k^{th} של A . לפיכך $A = QR$, כפי שרצינו.

המשוואות המגדירות את תהליך גרס-שמידט (ראו 6.32) מראות כי כל v_k שווה לכפולה חיובית של e_k בתוספת צירוף ליניארי של $e_1, \dots, e_{k-1}$. לפיכך כל $\langle v_k, e_k \rangle$ מספר חיובי. לכן איברי האלכסון של R הם מספרים חיוביים, כפי שרצינו.

לסיים, כדי להראות כי Q ו- R יחידות, נניח שיש לנו בנוסף גם את $\widehat{Q}$ ו- $\widehat{R}$ כאשר $\widehat{Q}$ אוניטרית ו- $\widehat{R}$ משולשית עליונה עם מספרים חיוביים בלבד על האלכסון. יהיו $q_1, \dots, q_n$ עמודות $\widehat{Q}$. כשחושבים על כפל המטריצות כמובא לעיל, אנו רואים כי כל v_k הוא צירוף ליניארי של $q_1, \dots, q_k$, עם מקדמים מהעמודה ה- k^{th} של $\widehat{R}$. מכאן נובע ש- $\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(q_1, \dots, q_k)$ ו- $\langle v_k, q_k \rangle > 0$. מהיחידות של רשימות אורתונורמליות המקיימות את התנאים הללו (ראו תרגיל 10 ביחידה 21) אנו מסיקים כי $q_k = e_k$ לכל $k = 1, \dots, n$. לכן $\widehat{Q} = Q$, $\widehat{R} = R$ מה שמוביל למסקנה כי $\widehat{Q} = Q$ ו- $\widehat{R} = R$ השלמנו את הוכחת היחידות.

ההוכחה של הפירוק QR מראה שעמודות המטריצה האוניטרית ניתנות לחישוב באמצעות הפעלת תהליך גרס-שמידט על עמודות המטריצה המועמדת לפירוק. הדוגמה הבאה ממחישה את החישוב של הפירוק QR בהתבסס על ההוכחה שזה עתה השלמנו.

7.60 דוגמה: פירוק QR של מטריצה 3×3

למציאת הפירוק של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

נלך בעקבות ההוכחה של 7.58. לפיכך נגדיר v_1, v_2, v_3 השווים לעמודות של A :

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (2, 1, 3), \quad v_3 = (1, -4, 2).$$

יישום תהליך גרס-שמידט על v_1, v_2, v_3 מפיק את הרשימה האורתונורמלית

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right), \quad e_3 = \left(0, -\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

נמשיך בעקבות ההוכחה של 7.58, ונגדיר Q להיות המטריצה האוניטרית שעמודותיה הן e_1, e_2, e_3 :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

כמו בהוכחה של 7.58, תהי R המטריצה 3×3 שהאיבר בשורה j , עמודה k הוא $\langle v_k, e_j \rangle$, מכאן נקבל

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{10} & \frac{\sqrt{10}}{5} \\ 0 & 0 & \frac{7\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}.$$

שימו לב ש- R בהחלט מטריצה משולשית עליונה עם מספרים חיוביים בלבד על האלכסון, כפי שדורש פירוק QR.

כעת באמצעות כפל מטריצות נוכל לוודא כי $A = QR$ הוא הפירוק לגורמים של A שרצינו:

$$QR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{10} & \frac{\sqrt{10}}{5} \\ 0 & 0 & \frac{7\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

לפיכך $A = QR$, כפי שציפינו.

הפירוק QR יהיה הכלי המרכזי בהוכחה של פירוק שולסקי (7.63) בתת-החלק הבא. ליישום נחמד נוסף של פירוק QR, ראו ההוכחה של אי-שוויון הדמר (9.66).

אם פירוק QR זמין, אזי ניתן להשתמש בו לפתרון מערכת משוואות ליניאריות ללא שימוש בשיטת החילוף של גאוס. ליתר דיוק, נניח ש- A מטריצה ריבועית $n \times n$ עם עמודות בלתי תלויות ליניאריות. נניח ש- $b \in \mathbb{F}^n$ ואנו מעוניינים לפתור את המשוואה $Ax = b$ עבור $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ (כהרגלנו, אנו מזהים את האיברים של $\mathbb{F}^n$ עם וקטורי עמודה $n \times 1$).

נניח ש- $A = QR$, כאשר Q אוניטרית ו- R משולשית עליונה עם מספרים חיוביים בלבד על האלכסון (Q ו- R ניתנות לחישוב מ- A בשימוש בתהליך גרס-שמידט בלבד, כפי שמוצג בהוכחה של 7.58). המשוואה $Ax = b$ שקולה אפוא למשוואה $QRx = b$. בהכפלת שני האגפים של משוואה אחרונה זו ב- Q^* מצד שמאל תוך שימוש ב- 7.57(ד) נקבל את המשוואה

$$Rx = Q^*b.$$

המטריצה Q^* היא הצמודה-משוחלפת של המטריצה Q . לפיכך חישוב Q^*b הוא פשוט וישיר. מאחר ש- R מטריצה משולשית עליונה עם מספרים חיוביים בלבד על האלכסון, מערכת המשוואות הליניאריות המיוצגת על ידי המשוואה לעיל יכולה להיפתר במהירות בכך שנפתור תחילה עבור x_n , ואז עבור x_{n-1} , וכן הלאה.

פירוק שולסקי

אנו פותחים תתי-חידה זו של הפרק עם אפיון של אופרטורים חיוביים הפיכים במונחים של מכפלות פנימיות.

7.61 אופרטור חיובי הפיך

אופרטור צמוד לעצמו $T \in \mathcal{L}(V)$ הוא אופרטור חיובי הפיך אם-ורק אם $\langle Tv, v \rangle > 0$ לכל $v \in V$ השונה מאפס.

הוכחה תחילה נניח כי T אופרטור חיובי הפיך. אם $v \in V$ ו- $v \neq 0$, אזי מאחר ש- T הפיך נקבל ש- $Tv \neq 0$. מכאן נובע ש- $\langle Tv, v \rangle \neq 0$ (לפי 7.43). לכן $\langle Tv, v \rangle > 0$. להוכחת הגרירה בכיוון ההפוך, נניח כעת ש- $\langle Tv, v \rangle > 0$ לכל $v \in V$ השונה מאפס. לפיכך $Tv \neq 0$ לכל $v \in V$ השונה מאפס. לכן T חד-חד-ערכי. לפיכך T הפיך, כפי שרצינו. ■

ההגדרה הבאה מעבירה את המסקנה לעיל לשפה של מטריצות. כאן אנו משתמשים במכפלה הפנימית האוקלידית הרגילה מעל $\mathbb{F}^n$ ומזהים את איברי $\mathbb{F}^n$ עם וקטורי עמודה $n \times 1$.

7.62 הגדרה: חיוביות לחלוטין

מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n,n}$ נקראת חיובית לחלוטין אם $B^* = B$ וגם $\langle Bx, x \rangle > 0$ לכל $x \in \mathbb{F}^n$ השונה מאפס.

מטריצה היא משולשית עליונה אם-ורק-אם הצמודה-משוחלפת שלה היא משולשית תחתונה (כלומר כל האיברים מעל האלכסון הם 0). הפירוק לגורמים להלן, שהוא בעל השלכות חשובות באלגברה ליניארית חישובית, כותב מטריצה חיובית לחלוטין כמכפלה של מטריצה משולשית תחתונה והצמודה-משוחלפת שלה.

מסקנתנו הבאה היא על מטריצות בלבד, אף שההוכחה משתמשת בזיהוי תוצאות עבור אופרטורים עם תוצאות עבור מטריצות ריבועיות. במסקנה להלן, אם המטריצה B היא ב- $F^{n,n}$, אזי המטריצה R גם היא ב- $F^{n,n}$.

7.63 פירוק שולסקי

נניח ש- B מטריצה חיובית לחלוטין. אזי קיימת מטריצה משולשית עליונה יחידה R עם מספרים חיוביים בלבד על האלכסון כך ש-

$$B = R^*R.$$

הוכחה מאחר ש- B חיובית לחלוטין, קיימת מטריצה ריבועית הפיכה A מאותו הגודל של B כך ש- $B = A^*A$ [לפי השקילות של (א) ו- (ו) ב-7.38].

יהי $A = QR$ הפירוק QR של A (ראו 7.58), כאשר Q אוניטרית ו- R משולשית עליונה עם מספרים חיוביים בלבד על האלכסון. אזי $A^* = R^*Q^*$.

אנדרה-לואי שולסקי (1875–1918) גילה
 פירוק זה, שפורסם לאחר מותו בשנת 1924.

לפיכך

$$B = A^*A = R^*Q^*QR = R^*R,$$
 כפי שרצינו.

להוכחת חלק היחידות של המסקנה, נניח ש- S מטריצה משולשית עליונה עם מספרים חיוביים בלבד על האלכסון ו- $B = S^*S$. המטריצה S הפיכה מאחר ש- B הפיכה (ראו תרגיל 11 ביחידה 4). הכפלת שני אגפי המשוואה $B = S^*S$ ב- S^{-1} מימין נותנת את המשוואה $BS^{-1} = S^*$.

תהי A המטריצה מהפסקה הראשונה של ההוכחה. אזי

$$\begin{aligned} (AS^{-1})^*(AS^{-1}) &= (S^*)^{-1}A^*AS^{-1} \\ &= (S^*)^{-1}BS^{-1} \\ &= (S^*)^{-1}S^* \\ &= I. \end{aligned}$$

לפיכך AS^{-1} אוניטרית.

לכן $A = (AS^{-1})S$ הוא פירוק לגורמים של A כמכפלה של מטריצה אוניטרית ומטריצה משולשית עליונה עם מספרים חיוביים בלבד על האלכסון. היחידות של פירוק QR, כפי שנוסחה ב-7.58, גוררת כעת ש- $S = R$. ■

בפסקה הראשונה של ההוכחה לעיל, יכולנו לבחור את A כמטריצה החיובית לחלוטין היחידה שהיא שורש ריבועי של B (ראו 7.39). בכל זאת, ההוכחה הוצגה עם הבחירה הכללית יותר של A מכיוון שעבור מטריצות ספציפיות חיוביות לחלוטין B , ייתכן שיהיה קל יותר למצוא בחירה אחרת של A .

תרגילים ז4

- 1 נניח ש- $\dim V \geq 2$ ו- $S \in \mathcal{L}(V, W)$. הוכיחו כי S איזומטריה אס-ורק-אם Se_1, Se_2 רשימה אורתונורמלית ב- W לכל רשימה אורתונורמלית e_1, e_2 של שני איברים ב- V .
- 2 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $T \neq 0$. הוכיחו כי T כפולת סקלר של איזומטריה אס-ורק-אם T משמרת אורתוגונליות.
הביטוי " T משמרת אורתוגונליות" משמעותו ש- $\langle Tu, Tv \rangle = 0$ לכל $u, v \in V$ כך ש- $\langle u, v \rangle = 0$.
- 3 א. הראו כי המכפלה של שני אופרטורים אוניטריים מעל V היא אופרטור אוניטרי.
ב. הראו כי ההופכי של אופרטור אוניטרי מעל V הוא אופרטור אוניטרי.
תרגיל זה מראה שהקבוצה של האופרטורים האוניטריים מעל V היא חבורה, כאשר פעולת החבורה היא המכפלה הרגילה של שני אופרטורים.
- 4 נניח ש- $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ ו- $A, B \in \mathcal{L}(V)$ צמודים לעצמם. הראו כי $A + iB$ אוניטרי אס-ורק-אם $AB = BA$ וגם $A^2 + B^2 = I$.
- 5 נניח ש- $S \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים.
א. S אופרטור אוניטרי צמוד לעצמו.
ב. $S = 2P - I$ עבור היטל אורתוגוני P כלשהו מעל V .
ג. קיים תת-מרחב U של V כך ש- $Su = u$ לכל $u \in U$ ו- $Sw = -w$ לכל $w \in U^\perp$.
- 6 נניח ש- T_1, T_2 שניהם אופרטורים נורמליים מעל $\mathbf{F}^3$ עם $2, 5, 7$ כערכים עצמיים. הוכיחו כי קיים אופרטור אוניטרי $S \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^3)$ כך ש- $T_1 = S^*T_2S$.
- 7 הביאו דוגמה של שני אופרטורים צמודים לעצמם $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^4)$ כך שהערכים העצמיים של שני האופרטורים הם $2, 5, 7$ אך לא קיים אופרטור אוניטרי $S \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^4)$ כך ש- $T_1 = S^*T_2S$. ודאו כי אתם מסבירים מדוע אין בנמצא אופרטור אוניטרי עם התכונה הנדרשת.
- 8 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם $S \in \mathcal{L}(V)$ וקיים בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ של V כך ש- $\|Se_k\| = 1$ לכל e_k , אזי S אופרטור אוניטרי.
- 9 נניח ש- $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. נניח שלכל ערך עצמי של T יש ערך מוחלט 1 וגם $\|Tv\| \leq \|v\|$ לכל $v \in V$. הוכיחו כי T אופרטור אוניטרי.
- 10 נניח ש- $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור צמוד לעצמו כך ש- $\|Tv\| \leq \|v\|$ לכל $v \in V$.
א. הראו כי $I - T^2$ אופרטור חיובי.
ב. הראו כי $T + i\sqrt{I - T^2}$ אופרטור אוניטרי.
- 11 נניח ש- $S \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי S אופרטור אוניטרי אס-ורק-אם $\{Sv : v \in V \text{ and } \|v\| \leq 1\} = \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$.
- 12 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם $S \in \mathcal{L}(V)$ הפיך ו- $\|S^{-1}v\| = \|Sv\|$ לכל $v \in V$, אזי S אוניטרי.

13 הסבירו מדוע העמודות של מטריצה ריבועית של מספרים מרוכבים יוצרות רשימה אורתונורמלית ב- C^n אם-ורק-אם השורות של המטריצה יוצרות רשימה אורתונורמלית ב- C^n .

14 נניח ש- $v \in V$ עם $\|v\| = 1$ ו- $b \in F$. נניח בנוסף ש- $\dim V \geq 2$. הוכיחו כי קיים אופרטור אוניטרי $S \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $\langle Sv, v \rangle = b$ אם-ורק-אם $|b| \leq 1$.

15 נניח ש- T אופרטור אוניטרי מעל V כך ש- $T - I$ הפיך.

א. הוכיחו כי $(T + I)(T - I)^{-1}$ אופרטור אנטי-צמוד (כלומר שווה למינוס של האופרטור הצמוד שלו).

ב. הוכיחו כי אם $F = C$, אזי $i(T + I)(T - I)^{-1}$ אופרטור צמוד לעצמו.

הפונקציה $z \mapsto i(z+1)(z-1)^{-1}$ מעתיקה את מעגל היחידה ב- C (מלבד הנקודה 1) אל R . לפיכך (ב) מפיחש את האנלוגיה בין אופרטורים אוניטריים ופעול היחידה ב- C , יחד עם האנלוגיה בין אופרטורים הצמודים לעצמם ו- R .

16 נניח ש- $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ צמוד לעצמו. הוכיחו כי $(T + iI)(T - iI)^{-1}$ אופרטור אוניטרי וכי 1 אינו ערך עצמי של אופרטור זה.

17 הסבירו מדוע האפיונים של מטריצות אוניטריות הנתון ב- 7.57 מתקיים.

18 מטריצה ריבועית A נקראת סימטרית אם היא שווה למשוחלפת שלה. הוכיחו כי אם A מטריצה סימטרית עם איברים ממשיים, אזי קיימת מטריצה אוניטרית Q עם איברים ממשיים כך ש- Q^*AQ מטריצה אלכסונית.

19 נניח ש- n מספר שלם חיובי. עבור תרגיל זה, אנו מאמצים את הסימון שלפיו איבר אופייני z של C^n מסומן על ידי $z = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$. נגדיר פונקציונלים ליניאריים $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ מעל C^n על ידי

$$\omega_j(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{n-1} z_m e^{-2\pi i j m / n}.$$

התמרת פורייה בזידה היא האופרטור $\mathcal{F}: C^n \rightarrow C^n$ המוגדר על ידי

$$\mathcal{F}z = (\omega_0(z), \omega_1(z), \dots, \omega_{n-1}(z)).$$

א. הראו כי $\mathcal{F}$ אופרטור אוניטרי מעל C^n .

ב. הראו כי אם $(z_0, \dots, z_{n-1}) \in C^n$ ו- z_n מוגדר כשווה ל- z_0 , אזי

$$\mathcal{F}^{-1}(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) = \mathcal{F}(z_n, z_{n-1}, \dots, z_1).$$

ג. הראו כי $\mathcal{F}^4 = I$.

להתמרת פורייה בזידה יש יישומים חשובים רבים בתחום ניתוח נתונים. התמרת פורייה רגילה כלולת ביטויים מהצורה $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i t x} dx$ עבור פונקציות מרוכבות אינטגרליות f הפוגדות מעל R .

20 נניח ש- A מטריצה ריבועית עם עמודות בלתי תלויות ליניאריות. הוכיחו כי קיימות מטריצות יחידות R ו- Q כך ש- R משולשית תחתונה עם מספרים חיוביים בלבד על האלכסון, Q אוניטרית, ו- $A = RQ$.

5 פירוק לערכים סינגולריים

ערכים סינגולריים

אנו נזדקק למסקנה הבאה ביחידה זו.

7.64 תכונות של T^*T

- נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי
- T^*T אופרטור חיובי מעל V
 - $\text{null } T^*T = \text{null } T$
 - $\text{range } T^*T = \text{range } T^*$
 - $\dim \text{range } T = \dim \text{range } T^* = \dim \text{range } T^*T$.

הוכחה

א. מתקיים

$$(T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T.$$

לפיכך T^*T צמוד לעצמו.

אם $v \in V$, אזי

$$\langle (T^*T)v, v \rangle = \langle T^*(Tv), v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = \|Tv\|^2 \geq 0.$$

לפיכך T^*T אופרטור חיובי.

ב. תחילה נניח כי $v \in \text{null } T^*T$. אזי

$$\|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv \rangle = \langle T^*Tv, v \rangle = \langle 0, v \rangle = 0.$$

לפיכך $Tv = 0$, ובכך הוכחנו כי $\text{null } T^*T \subseteq \text{null } T$.

ההכלה בכיוון השני היא ברורה, מאחר שאם $v \in V$ ו- $Tv = 0$ אזי $T^*Tv = 0$.

לפיכך $\text{null } T^*T = \text{null } T$, ובכך השלמנו את ההוכחה של (ב).

ג. אנו כבר יודעים מ- (א) כי T^*T צמוד לעצמו. לפיכך

$$\text{range } T^*T = (\text{null } T^*T)^\perp = (\text{null } T)^\perp = \text{range } T^*,$$

כאשר השוויון הראשון והאחרון נובעים מ- 7.6 והשוויון השני נובע מ- (ב).

ד. כדי לוודא את המשוואה הראשונה ב- (ד), נשים לב כי

$$\dim \text{range } T = \dim(\text{null } T^*)^\perp = \dim W - \dim \text{null } T^* = \dim \text{range } T^*,$$

כאשר השוויון הראשון נובע מ- 7.6(ד), השוויון השני נובע מ- 6.51, והשוויון האחרון נובע מהמשפט היסודי של ההעתקות הליניאריות (3.21).

השוויון $\dim \text{range } T^* = \dim \text{range } T^*T$ נובע מ- (ג).

הערכים העצמיים של אופרטור מלמדים אותנו על התנהגות האופרטור. אוסף אחר של מספרים, הנקרא הערכים הסינגולריים, גם הוא שימושי. מרחבים עצמיים והסימון E (שהם בשימוש בדוגמאות להלן) הוגדרו ב- 5.52.

7.65 הגדרה: ערכים סינגולריים

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הערכים הסינגולריים של T הם השורשים הריבועיים האי-שליליים של הערכים העצמיים של T^*T , מסודרים בסדר יורד, כשכל אחד נכלל מספר פעמים השווה לממד המרחב העצמי המתאים של T^*T .

7.66 דוגמה: ערכים סינגולריים של אופרטור מעל F^4

נגדיר $T \in \mathcal{L}(F^4)$ על ידי $T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, 3z_1, 2z_2, -3z_4)$. חישוב מראה ש-

$$T^*T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (9z_1, 4z_2, 0, 9z_4),$$

כפי שעליכם לוודא. לפיכך הבסיס הסטנדרטי של F^4 מלכסן את T^*T , ואנו רואים כי הערכים העצמיים של T^*T הם 9, 4, 0, ו-0. בנוסף, הממדים של המרחבים העצמיים השייכים לערכים העצמיים הם

$$\dim E(9, T^*T) = 2, \dim E(4, T^*T) = 1, \dim E(0, T^*T) = 1.$$

בהוצאת שורשים ריבועיים אי-שליליים מערכים עצמיים אלו של T^*T ובצירוף המידע על הממדים לעיל, אנו מסיקים שהערכים הסינגולריים של T הם 3, 3, 2, 0.

הערכים העצמיים של T הם -3 ו-0 בלבד. לפיכך במקרה זה, אוסף הערכים העצמיים לא כלל את המספר 2 המופיע בהגדרה (ולכן ההתנהגות) של T , אך רשימת הערכים הסינגולריים כן כוללת את 2.

7.67 דוגמה: ערכים סינגולריים של העתקה ליניארית מ- F^4 ל- F^3

נניח שיש ל- $T \in \mathcal{L}(F^4, F^3)$ מטריצה (ביחס לבסיסים הסטנדרטיים)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

באפשרותכם לוודא כי המטריצה של T^*T היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

ובנוסף כי הערכים העצמיים של האופרטור T^*T הם 25, 2, 0, עם $\dim E(25, T^*T) = 1$, $\dim E(2, T^*T) = 1$, ו- $\dim E(0, T^*T) = 2$. לפיכך הערכים הסינגולריים של T הם $5, \sqrt{2}, 0, 0$.

ראו תרגיל 2 עבור אפיון של הערכים הסינגולריים החיוביים.

7.68 תפקיד ערכים סינגולריים חיוביים

- נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי
- א. T חד-חד-ערכית $\iff 0$ אינו ערך סינגולרי של T
- ב. מספר הערכים הסינגולריים החיוביים של T שווה ל- $\dim \text{range } T$
- ג. T על $\iff$ מספר הערכים הסינגולריים החיוביים של T שווה ל- $\dim W$.

הוכחה ההעתקה הליניארית T היא חד-חד-ערכית אס-ורק-אם $\{0\} = \text{null } T$, שהדבר קורה אס-ורק-אם $\{0\} = \text{null } T^*T$ (לפי 7.64(ב)), שהדבר קורה אס-ורק-אם 0 אינו ערך עצמי של T^*T , שהדבר קורה אס-ורק-אם 0 אינו ערך סינגולרי של T , ובכך הושלמה הוכחת (א).

משפט הפירוק הספקטרלי המיושם על T^*T מראה לנו ש- $\dim \text{range } T^*T$ שווה למספר הערכים העצמיים החיוביים של T^*T (כשאנו סופרים חזרות). לפיכך 7.64(ד) גורר ש- $\dim \text{range } T$ שווה למספר הערכים הסינגולריים החיוביים של T , מה שמוכיח את (ב).

השתמשו ב- (ב) וב- 2.39 כדי להראות כי (ג) מתקיים.

הטבלה להלן משווה ערכים עצמיים עם ערכים סינגולריים.

רשימת ערכים סינגולריים	רשימת ערכים עצמיים
הקשר: מרחבי מכפלה פנימית	הקשר: מרחבים וקטוריים
מוגדרת רק עבור העתקות ליניאריות ממרחב מכפלה פנימית למרחב מכפלה פנימית זהה או שונה	מוגדרת רק עבור העתקות ליניאריות ממרחב וקטורי לעצמו
מספרים אי-שליליים	מספרים שרירותיים ממשיים (כאשר $F = \mathbb{R}$) או מרוכבים (כאשר $F = \mathbb{C}$)
אורך הרשימה שווה לממד התחום	יכולה להיות רשימה ריקה אם $F = \mathbb{R}$
כוללת 0 אס-ורק-אם ההעתקה אינה חד-חד-ערכית	כוללת 0 אס-ורק-אם האופרטור אינו הפיך
תמיד מופיעים בסדר יורד	ללא סדר מסוים, בפרט אם $F = \mathbb{C}$

המסקנה הבאה מאפיינת באופן נחמד איזומטריות במונחים של ערכים סינגולריים.

7.69 איזומטריות מאופיינות בכך שכל הערכים הסינגולריים שווים 1

- נניח ש- $S \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי
- S איזומטריה $\iff$ כל הערכים הסינגולריים של S שווים 1.

הוכחה מתקיים

$$S^*S = I \iff S \text{ איזומטריה}$$

$$\iff \text{כל הערכים העצמיים של } S^*S \text{ שווים } 1$$

$$\iff \text{כל הערכים הסינגולריים של } S \text{ שווים } 1,$$

כאשר השקילות הראשונה נובעת מ- 7.49 והשקילות השנייה נובעת ממשפט הפירוק הספקטרלי (7.29 או 7.31) כשהוא מיושם על האופרטור הצמוד לעצמו S^*S .

פירוק לערכים סינגולריים עבור העתקות ליניאריות ומטריצות

הפירוק לערכים סינגולריים שימושי באלגברה ליניארית חיונית מאחר שקיימות טכניקות יעילות לחישוב קירובים עבור ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של אופרטורים חיוניים דוגמת T^* , שהערכים העצמיים והווקטורים העצמיים שלו מובילים לפירוק לערכים סינגולריים.

המסקנה הבאה מראה שלכל העתקה ליניארית מ- V אל W יש תיאור נקי להפליא במונחים של הערכים הסינגולריים שלה ורשימות אורתונורמליות ב- V ו- W . ביחידה הבאה אנו נראה מספר יישומים חשובים של הפירוק לערכים סינגולריים (לעיתים קרובות נקרא SVD).

7.70 פירוק לערכים סינגולריים

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ והערכים הסינגולריים החיוניים של T הם $s_1, \dots, s_m$. אזי קיימות רשימות אורתונורמליות $e_1, \dots, e_m$ ב- V ו- $f_1, \dots, f_m$ ב- W כך ש-

$$Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + s_m \langle v, e_m \rangle f_m \quad \text{לכל } v \in V. \quad 7.71$$

הוכחה יהיו $s_1, \dots, s_n$ הערכים הסינגולריים של T (לפיכך $n = \dim V$). מאחר ש- T^*T אופרטור חיובי [ראו 7.64(א)], משפט הפירוק הספקטרי גורר שקיים בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ של V עם

$$T^*Te_k = s_k^2 e_k \quad \text{לכל } k = 1, \dots, n. \quad 7.72$$

לכל $k = 1, \dots, m$, יהי

$$f_k = \frac{Te_k}{s_k}. \quad 7.73$$

אם $j, k \in \{1, \dots, m\}$ אזי

$$\langle f_j, f_k \rangle = \frac{1}{s_j s_k} \langle Te_j, Te_k \rangle = \frac{1}{s_j s_k} \langle e_j, T^*Te_k \rangle = \frac{s_k}{s_j} \langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq k, \\ 1 & \text{if } j = k. \end{cases}$$

לפיכך $f_1, \dots, f_m$ רשימה אורתונורמלית ב- W .

אם $k \in \{1, \dots, n\}$ ו- $k > m$ אזי $s_k = 0$ ולכן $T^*Te_k = 0$ (לפי 7.72), מה שגורר ש- $Te_k = 0$ [לפי 7.64(ב)].

נניח ש- $v \in V$ אזי

$$\begin{aligned} Tv &= T(\langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n) \\ &= \langle v, e_1 \rangle Te_1 + \dots + \langle v, e_m \rangle Te_m \\ &= s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + s_m \langle v, e_m \rangle f_m, \end{aligned}$$

כאשר האינדקס האחרון בשורה הראשונה מוחלף מ- n ל- m בשורה השנייה מאחר ש- $Te_k = 0$ אם $k > m$ (כפי שצוין בפסקה לעיל) והשורה השלישית נובעת מ-7.73. המשוואה לעיל היא התוצאה שביקשנו.

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$, הערכים הסינגולריים החיוביים של T הם $s_1, \dots, s_m$ ו- $e_1, \dots, e_m$ ו- $f_1, \dots, f_m$ הם כמו בפירוק לערכים סינגולריים 7.70. את הרשימה האורתונורמלית $e_1, \dots, e_m$ ניתן להשלים לכדי בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_{\dim V}$ של V ואת הרשימה האורתונורמלית $f_1, \dots, f_m$ ניתן להשלים לכדי בסיס אורתונורמלי $f_1, \dots, f_{\dim W}$ של W . הנוסחה 7.71 מראה ש-

$$Te_k = \begin{cases} s_k f_k & \text{if } 1 \leq k \leq m, \\ 0 & \text{if } m < k \leq \dim V. \end{cases}$$

לפיכך מטריצת T ביחס לבסיסים האורתונורמליים $(e_1, \dots, e_{\dim V})$ ו- $(f_1, \dots, f_{\dim W})$ היא בעלת התבנית הפשוטה

$$\mathcal{M}(T, (e_1, \dots, e_{\dim V}), (f_1, \dots, f_{\dim W}))_{j,k} = \begin{cases} s_k & \text{if } 1 \leq j = k \leq m, \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases}$$

אם $\dim V = \dim W$ (כפי שקורה, לדוגמה, אם $W = V$), אזי המטריצה שתוארה בפסקה לעיל היא מטריצה אלכסונית. אם אנו מרחיבים את ההגדרה של מטריצה אלכסונית כמובא להלן כך שתחול גם עבור מטריצות שאינן בהכרח ריבועיות, אזי הוכחנו את המסקנה הנפלאה כי לכל העתקה ליניארית מ- V אל W יש מטריצה אלכסונית ביחס לבסיסים אורתונורמליים מתאימים.

7.74 הגדרה: מטריצה אלכסונית

A מטריצה $M \times N$ נקראת מטריצה אלכסונית אם כל איברי המטריצה הם 0 מלבד $A_{k,k}$ עבור $k = 1, \dots, \min\{M, N\}$ שבהם ייתכנו איברים השונים מ-0.

הטבלה להלן משווה בין משפט הפירוק הספקטרי (7.29 ו- 7.31) לבין הפירוק לערכים סינגולריים (7.70).

משפט הפירוק הספקטרי	פירוק לערכים סינגולריים
מתאר רק אופרטורים הצמודים לעצמם (כאשר $F = R$) או אופרטורים נורמליים (כאשר $F = \mathbb{C}$)	מתאר העתקות ליניאריות שרירותיות ממרחב מכפלה פנימית אל מרחב מכפלה פנימית זהה או אחר
מפיק בסיס אורתונורמלי יחיד	מפיק שתי רשימות אורתונורמליות, אחת למרחב התחום ואחת למרחב הטווח, שאינם בהכרח אותו המרחב גם כאשר מרחב הטווח שווה למרחב התחום
הוכחות שונות בהתאם לשאלה האם $F = R$ או $F = \mathbb{C}$	אותה הוכחה עובדת בין אם $F = R$ ובין אם $F = \mathbb{C}$

הפירוק לערכים סינגולריים מעניק לנו דרך חדשה להבנת הצמודה וההופכית של העתקה ליניארית. ליתר דיוק, המסקנה הבאה מראה כי בהינתן פירוק לערכים סינגולריים של העתקה ליניארית $T \in \mathcal{L}(V, W)$, נוכל לקבל את הצמודה של T באופן פשוט על ידי כך שנחליף בין התפקידים של ה- e ים וה- f ים (ראו 7.77). באופן דומה, נוכל לקבל את הפסידו-ההופכי $T^\dagger$ (ראו 6.68) של T על ידי כך שנחליף בין התפקידים של ה- e ים וה- f ים ונחליף כל ערך סינגולרי חיובי s_k של T ב- $1/s_k$ (ראו 7.78).

נזכיר כי הפסידו־הופכי $T^\dagger$ ב- 7.78 להלן שווה להופכי T^{-1} אם T הפיכה [ראו 6.69(א)].

7.75 פירוק לערכים סינגולריים של צמודה ופסידו־הופכי

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ והערכים הסינגולריים החיוביים של T הם $s_1, \dots, s_m$. נניח ש- $e_1, \dots, e_m$ ו- $f_1, \dots, f_m$ רשימות אורתונורמליות ב- V ו- W כך ש-

$$7.76 \quad Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + s_m \langle v, e_m \rangle f_m \quad \text{לכל } v \in V. \text{ אזי}$$

$$7.77 \quad T^*w = s_1 \langle w, f_1 \rangle e_1 + \dots + s_m \langle w, f_m \rangle e_m \quad \text{וגם}$$

$$7.78 \quad T^\dagger w = \frac{\langle w, f_1 \rangle}{s_1} e_1 + \dots + \frac{\langle w, f_m \rangle}{s_m} e_m \quad \text{לכל } w \in W.$$

הוכחה אם $v \in V$ ו- $w \in W$ אזי

$$\begin{aligned} \langle Tv, w \rangle &= \langle s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + s_m \langle v, e_m \rangle f_m, w \rangle \\ &= s_1 \langle v, e_1 \rangle \langle f_1, w \rangle + \dots + s_m \langle v, e_m \rangle \langle f_m, w \rangle \\ &= \langle v, s_1 \langle w, f_1 \rangle e_1 + \dots + s_m \langle w, f_m \rangle e_m \rangle. \end{aligned}$$

מכאן נובע ש-

$$T^*w = s_1 \langle w, f_1 \rangle e_1 + \dots + s_m \langle w, f_m \rangle e_m, \quad \text{ובכך הוכחנו את 7.77.}$$

להוכחת 7.78, נניח ש- $w \in W$. יהי

$$v = \frac{\langle w, f_1 \rangle}{s_1} e_1 + \dots + \frac{\langle w, f_m \rangle}{s_m} e_m.$$

נפעיל את T על שני אגפי המשוואה לעיל ונקבל

$$\begin{aligned} Tv &= \frac{\langle w, f_1 \rangle}{s_1} T e_1 + \dots + \frac{\langle w, f_m \rangle}{s_m} T e_m \\ &= \langle w, f_1 \rangle f_1 + \dots + \langle w, f_m \rangle f_m \\ &= P_{\text{range } T} w, \end{aligned}$$

כאשר השורה השנייה מתקיימת מאחר ש- 7.76 גוררת ש- $T e_k = s_k f_k$ אם $k = 1, \dots, m$ והשורה האחרונה לעיל מתקיימת מאחר ש- 7.76 גוררת ש- $f_1, \dots, f_m$ פורסת את $\text{range } T$ ולפיכך בסיס אורתונורמלי של $\text{range } T$ [ולכן 6.57(ט) מתקיים]. המשוואה לעיל, ההבחנה כי $v \in (\text{null } T)^\perp$ [ראו תרגיל 8(ב)], וההגדרה של $T^\dagger w$ (ראו 6.68) מראות כי $v = T^\dagger w$, ובכך הוכחנו את 7.78. ■

7.79 דוגמה: מציאת הפירוק לערכים סינגולריים

נגדיר $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4, \mathbb{F}^3)$ על ידי $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-5x_4, 0, x_1 + x_2)$. אנו מעוניינים למצוא פירוק לערכים סינגולריים של T . המטריצה של T (ביחס אל הבסיסים הסטנדרטיים) היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

לפיכך, כפי שצינו בדוגמה 7.67, המטריצה של T^*T היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix},$$

והערכים העצמיים החיוביים של T^*T הם 2, 25, עם $\dim E(25, T^*T) = 1$ ו- $\dim E(2, T^*T) = 1$. לכן הערכים הסינגולריים החיוביים של T הם $5, \sqrt{2}$.

לכן כדי למצוא פירוק לערכים סינגולריים של T , עלינו למצוא רשימה אורתונורמלית e_1, e_2 ב- $\mathbb{F}^4$ ורשימה אורתונורמלית f_1, f_2 ב- $\mathbb{F}^3$ כך ש-

$$Tv = 5\langle v, e_1 \rangle f_1 + \sqrt{2}\langle v, e_2 \rangle f_2$$

לכל $v \in \mathbb{F}^4$.

בסיס אורתונורמלי של $E(25, T^*T)$ הוא הווקטור $(0, 0, 0, 1)$; בסיס אורתונורמלי של $E(2, T^*T)$ הוא הווקטור $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$. לפיכך, בעקבות ההוכחה של 7.70, ניקח

$$e_1 = (0, 0, 0, 1) \quad \text{ו-} \quad e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right)$$

וגם

$$f_1 = \frac{Te_1}{5} = (-1, 0, 0) \quad \text{ו-} \quad f_2 = \frac{Te_2}{\sqrt{2}} = (0, 0, 1).$$

אזי, כצפוי, אנו רואים כי e_1, e_2 רשימה אורתונורמלית ב- $\mathbb{F}^4$ ו- f_1, f_2 רשימה אורתונורמלית ב- $\mathbb{F}^3$.

$$Tv = 5\langle v, e_1 \rangle f_1 + \sqrt{2}\langle v, e_2 \rangle f_2$$

לכל $v \in \mathbb{F}^4$. לפיכך מצאנו פירוק לערכים סינגולריים של T .

המסקנה הבאה מתרגמת את הפירוק לערכים סינגולריים מההקשר של העתקות ליניאריות להקשר של מטריצות. ליתר דיוק, המסקנה הבאה מציגה פירוק לגורמים של מטריצה שרירותית כמכפלה של שלוש מטריצות נחמדות. ההוכחה מספקת בנייה מפורשת של שלוש המטריצות הללו במונחים של פירוק לערכים סינגולריים.

במסקנה הבאה, את הביטוי "עמודות אורתונורמליות" יש להבין כך: העמודות אורתונורמליות ביחס אל המכפלה הפנימית האוקלידית הסטנדרטית.

7.80 גרסת המטריצה של הפירוק לערכים סינגולריים

נניח ש- A מטריצה $p \times n$ שדרגתה $m \geq 1$. אזי קיימות B מטריצה $p \times m$ עם עמודות אורתונורמליות, D מטריצה אלכסונית $m \times m$ עם מספרים חיוביים על האלכסון, ו- C מטריצה $n \times m$ עם עמודות אורתונורמליות כך ש-

$$A = BDC^*.$$

הוכחה תהי $T: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^p$ ההעתקה הליניארית שהמטריצה שלה ביחס לבסיסים הסטנדרטיים שווה ל- A . אזי $\dim \text{range } T = m$ (לפי 3.78). יהי

$$7.81 \quad Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + s_m \langle v, e_m \rangle f_m$$

הפירוק לערכים סינגולריים של T . תהיינה

B המטריצה $p \times m$ שעמודותיה הן $f_1, \dots, f_m$
 D המטריצה האלכסונית $m \times m$ שאיברי האלכסון שלה הם $s_1, \dots, s_m$
 C המטריצה $n \times m$ שעמודותיה הן $e_1, \dots, e_m$

יהיו $u_1, \dots, u_m$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^m$. אם $k \in \{1, \dots, m\}$ אזי

$$(AC - BD)u_k = Ae_k - B(s_k u_k) = s_k f_k - s_k f_k = 0.$$

לפיכך $AC = BD$.

נכפיל את שני אגפי משוואה זו ב- C^* (הצמודה-משוחלפת של C) מימין כדי לקבל

$$ACC^* = BDC^*.$$

נשים לב שהשורות של C^* הן הצמודים המרוכבים של $e_1, \dots, e_m$. לפיכך אם $k \in \{1, \dots, m\}$, אזי מההגדרה של כפל מטריצות נקבל ש- $C^* e_k = u_k$; לכן $CC^* e_k = e_k$. לפיכך $ACC^* v = Av$ לכל $v \in \text{span}(e_1, \dots, e_m)$.

אם $v \in (\text{span}(e_1, \dots, e_m))^\perp$ אזי $Av = 0$ (כפי שנובע מ-7.81) וגם $C^* v = 0$ (כפי שנובע מהגדרת כפל מטריצות). לכן $ACC^* v = Av$ לכל $v \in (\text{span}(e_1, \dots, e_m))^\perp$.

מאחר ש- ACC^* ו- A מתלכדות על $\text{span}(e_1, \dots, e_m)$ ועל $(\text{span}(e_1, \dots, e_m))^\perp$, אנו מסיקים ש- $ACC^* = A$. לפיכך המשוואה שהוצגה לעיל הופכת ל-

$$A = BDC^*,$$

כפי שרצינו. ■

שימו לב שלמטריצה A במסקנה לעיל יש pn איברים. בהשוואה, למטריצות B, D ו- C לעיל יש יחדיו

$$m(p + m + n)$$

איברים. לפיכך אם p ו- n הם מספרים גדולים והדרגה m קטנה באופן ניכר מ- p ו- n , אזי מספר האיברים שעלינו לאחסן במחשב להצגת A קטן באופן ניכר מ- pn .

תרגילים ז

- 1 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הראו כי $T = 0$ אם-ורק-אם כל הערכים הסינגולריים של T הם 0.
- 2 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $s > 0$. הוכיחו כי s ערך סינגולרי של T אם-ורק-אם קיימים וקטורים השונים מאפס $v \in V$ ו- $w \in W$ כך ש-

$$Tv = sw \quad \text{וגם} \quad T^*w = sv.$$
הווקטורים v, w המקיימים את המשוואות לעיל נקראים **צמד שמידט**. ארהרד שמידט הציג את רעיון הערכים הסינגולריים בשנת 1907.
- 3 הביאו דוגמה של $T \in \mathcal{L}(C^2)$ כך ש- 0 הוא הערך העצמי היחיד של T והערכים הסינגולריים של T הם $5, 0$.
- 4 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$, s_1 הוא הערך הסינגולרי הגבוה ביותר של T , ו- s_n הערך הסינגולרי הנמוך ביותר של T . הוכיחו כי

$$\{\|Tv\| : v \in V \text{ and } \|v\| = 1\} = [s_n, s_1].$$
- 5 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(C^2)$ מוגדר על ידי $T(x, y) = (-4y, x)$. מצאו את הערכים הסינגולריים של T .
- 6 מצאו את הערכים הסינגולריים של אופרטור הגזירה $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ המוגדר על ידי $Dp = p'$, כאשר המכפלה הפנימית מעל $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ היא כמו בדוגמה 6.34.
- 7 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ צמוד לעצמו או ש- $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ נורמלי. יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ הערכים העצמיים של T , כאשר כל אחד מופיע ברשימה מספר פעמים הזהה לממד המרחב העצמי השייך. הראו כי הערכים הסינגולריים של T הם $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|$, אחרי שמספרים אלו מונוי בסדר יורד.
- 8 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. נניח ש- $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m > 0$ ו- $e_1, \dots, e_m$ רשימה אורתונורמלית ב- V ו- $f_1, \dots, f_m$ רשימה אורתונורמלית ב- W כך ש-

$$Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + s_m \langle v, e_m \rangle f_m$$
לכל $v \in V$.
א. הוכיחו כי $f_1, \dots, f_m$ בסיס אורתונורמלי של $\text{range } T$.
ב. הוכיחו כי $e_1, \dots, e_m$ בסיס אורתונורמלי של $(\text{null } T)^\perp$.
ג. הוכיחו כי $s_1, \dots, s_m$ הם הערכים הסינגולריים החיוביים של T .
ד. הוכיחו כי אם $k \in \{1, \dots, m\}$, אזי e_k וקטור עצמי של T^*T שהערך העצמי השייך לו הוא s_k^2 .
ה. הוכיחו כי

$$TT^*w = s_1^2 \langle w, f_1 \rangle f_1 + \dots + s_m^2 \langle w, f_m \rangle f_m$$
לכל $w \in W$.

- 9 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הראו כי ל- T ול- T^* יש אותם ערכים סינגולריים חיוביים.
- 10 נניח שיש ל- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ערכים סינגולריים $s_1, \dots, s_n$. הוכיחו כי אם T העתקה ליניארית הפיכה, אזי יש ל- T^{-1} ערכים סינגולריים $\frac{1}{s_1}, \dots, \frac{1}{s_n}$.
- 11 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס אורתונורמלי של V . יהיו $s_1, \dots, s_n$ הערכים הסינגולריים של T .
- א. הוכיחו כי $\|Tv_1\|^2 + \dots + \|Tv_n\|^2 = s_1^2 + \dots + s_n^2$.
- ב. הוכיחו כי אם $W = V$ ו- T אופרטור חיובי, אזי $\langle Tv_1, v_1 \rangle + \dots + \langle Tv_n, v_n \rangle = s_1 + \dots + s_n$.
- ראו ההערה שאחרי תרגיל 5 ביחידה 4א.
- 12 א. הביאו דוגמה של מרחב וקטורי מממד סופי ואופרטור T מעליו כך שהערכים הסינגולריים של T^2 אינם שווים לריבועים של הערכים הסינגולריים של T .
- ב. נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ נורמלי. הוכיחו כי הערכים הסינגולריים של T^2 שווים לריבועים של הערכים הסינגולריים של T .
- 13 נניח ש- $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי ל- T_1 ול- T_2 יש אותם ערכים סינגולריים אם-ורק-אם קיימים אופרטורים אוניטריים $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $T_1 = S_1 T_2 S_2$.
- 14 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. יהי s_n הערך הסינגולרי הנמוך ביותר של T . הוכיחו כי $\|Tv\| \leq s_n \|v\|$ לכל $v \in V$.
- 15 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $s_1 \geq \dots \geq s_n$ הערכים הסינגולריים של T . הוכיחו כי אם λ ערך עצמי של T , אזי $s_1 \geq |\lambda| \geq s_n$.
- 16 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הוכיחו כי $(T^*)^\dagger = (T^\dagger)^*$.
- השוו את הפסקה בתרגיל זה לפסקה האנלוגית עבור העתקות ליניאריות הפיכות [ראו 7.5(ו)].
- 17 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי T צמוד לעצמו אם-ורק-אם $T^\dagger$ צמוד לעצמו.

מְטָרִיץָה-תֵּהוּ
שְׁלֹשׁ גִּפּוֹת מְתִלָּדוֹת
מֵתֵהוּ-סֶדֶר

—נכתב על ידי קלוד אופוס 4.8
קלט: haiku about SVD in Hebrew

6. מסקנות מהפירוק לערכים סינגולריים

נורמות של העתקות ליניאריות

הפירוק לערכים סינגולריים מוביל לחסם העליון הבא עבור $\|Tv\|$.

7.82 חסם עליון של $\|Tv\|$

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. יהי s_1 הערך הסינגולרי הגבוה ביותר של T . אזי

$$\|Tv\| \leq s_1 \|v\|$$

לכל $v \in V$.

עבור החסם התחתון של $\|Tv\|$, ראו תרגיל 14 ביחידה 5.

הוכחה נסמן ב- $s_1, \dots, s_m$ את הערכים הסינגולריים החיוביים של T , ותהי $e_1, \dots, e_m$ רשימה אורתונורמלית ב- V ו- $f_1, \dots, f_m$ רשימה אורתונורמלית ב- W המספקות פירוק לערכים סינגולריים של T לפיכך

$$7.83 \quad Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + s_m \langle v, e_m \rangle f_m$$

לכל $v \in V$. לכן אם $v \in V$ אזי

$$\begin{aligned} \|Tv\|^2 &= s_1^2 |\langle v, e_1 \rangle|^2 + \dots + s_m^2 |\langle v, e_m \rangle|^2 \\ &\leq s_1^2 (|\langle v, e_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, e_m \rangle|^2) \\ &\leq s_1^2 \|v\|^2, \end{aligned}$$

כאשר האי־שוויון האחרון נובע מאי־שוויון קוֹסֶט (6.26). הוצאת שורשים משני אגפי האי־שוויון לעיל מראה ש- $\|Tv\| \leq s_1 \|v\|$, כפי שרצינו.

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- s_1 הערך הסינגולרי הגבוה ביותר של T . המסקנה לעיל מראה ש-

$$7.84 \quad \|Tv\| \leq s_1 \text{ for all } v \in V \text{ with } \|v\| \leq 1.$$

כשניקח $v = e_1$ ב- 7.83 נקבל ש- $Te_1 = s_1 f_1$. מאחר ש- $\|f_1\| = 1$, מכאן נובע ש- $\|Te_1\| = s_1$. לפיכך מאחר ש- $\|e_1\| = 1$, האי־שוויון ב- 7.84 מוביל למשוואה

$$7.85 \quad \max\{\|Tv\| : v \in V \text{ and } \|v\| \leq 1\} = s_1.$$

המשוואה לעיל היא המוטיבציה להגדרה הבאה, המגדירה את הנורמה של T להיות האגף השמאלי של המשוואה לעיל ללא הצורך בהפניה לערכים סינגולריים או לפירוק לערכים סינגולריים.

7.86 הגדרה: נורמה של העתקה ליניארית, $\|\cdot\|$

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי הנורמה של T , מסומנת על ידי $\|T\|$, מוגדרת על ידי

$$\|T\| = \max\{\|Tv\| : v \in V \text{ וגם } \|v\| \leq 1\}.$$

באופן כללי, המקסימום של קבוצה אינסופית של מספרים אי-שליליים אינו קיים בהכרח. עם זאת, מה שהצגנו לפני ההגדרה ב־ 7.86 מראה כי המקסימום בהגדרה של הנורמה של העתקה ליניארית T מ־ V אל W קיים בהחלט (ושווה לערך הסינגולרי הגבוה ביותר של T).

כעת יש לנו שני שימושים שונים של המונח נורמה והסימון $\|\cdot\|$. השימוש הראשון שלנו בסימון קשור למכפלה פנימית מעל V , כאשר הגדרנו $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ לכל $v \in V$. השימוש השני שלנו במינוח ובסימון הנורמה הוא ההגדרה שזה עתה נתנו ל־ $\|T\|$ עבור $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הנורמה $\|T\|$ של $T \in \mathcal{L}(V, W)$ אינה מתקבלת בדרך כלל מחישוב המכפלה הפנימית של T עם עצמה (ראו תרגיל 21). ביכולתכם להבחין מתוך ההקשר והסימונים לאיזו מהמשמעויות של נורמה מתכוונים.

התכונות של הנורמה מעל $\mathcal{L}(V, W)$ מפורטות להלן ונראות זהות לתכונות הנורמה מעל מרחב מכפלה פנימית (ראו 6.9 ו־ 6.17). האי־שוויון ב־ (ד) נקרא האי־שוויון המשולש, ולפיכך נעשה שימוש באותה טרמינולוגיה שבה השתמשנו עבור הנורמה מעל V . לאי־שוויון המשולש ההפוך, ראו תרגיל 1.

7.87 תכונות בסיסיות של נורמות של העתקות ליניאריות

נניח ש־ $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי

א. $\|T\| \geq 0$

ב. $\|T\| = 0 \iff T = 0$

ג. $\|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$ לכל $\lambda \in \mathbf{F}$

ד. $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$ לכל $S \in \mathcal{L}(V, W)$

הוכחה

א. מאחר ש־ $\|Tv\| \geq 0$ לכל $v \in V$, ההגדרה של $\|T\|$ גוררת ש־ $\|T\| \geq 0$.

ב. נניח ש־ $\|T\| = 0$. לפיכך $Tv = 0$ לכל $v \in V$ עם $\|v\| \leq 1$. אם $u \in V$ עם $u \neq 0$, אזי

$$Tu = \|u\| T\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = 0,$$

כאשר השוויון האחרון מתקיים מאחר שהנורמה של $u/\|u\|$ היא 1. מאחר ש־ $Tu = 0$ לכל $u \in V$, מתקיים $T = 0$.

בכיוון ההפוך, אם $T = 0$ אזי $Tv = 0$ לכל $v \in V$ ולכן $\|T\| = 0$.

ג. נניח ש־ $\lambda \in \mathbf{F}$. אזי

$$\begin{aligned} \|\lambda T\| &= \max\{\|\lambda Tv\| : v \in V \text{ וגם } \|v\| \leq 1\} \\ &= |\lambda| \max\{\|Tv\| : v \in V \text{ וגם } \|v\| \leq 1\} \\ &= |\lambda| \|T\|. \end{aligned}$$

ד. נניח ש־ $S \in \mathcal{L}(V, W)$. ההגדרה של $\|S + T\|$ גוררת שקיים $v \in V$ כך ש־ $\|v\| \leq 1$ וגם $\|(S + T)v\| = \|Sv + Tv\|$. כעת

$$\|S + T\| = \|(S + T)v\| = \|Sv + Tv\| \leq \|Sv\| + \|Tv\| \leq \|S\| + \|T\|,$$

ובכך השלמנו את ההוכחה של (ד).

עבור $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$, הגודל $\|S - T\|$ לעיתים קרובות נקרא המרחק בין S ל- T . באופן בלתי רשמי, חשבו על מצב שבו $\|S - T\|$ הוא מספר קטן במובן ש- S ו- T קרובים זה לזה. לדוגמה, תרגיל 9 טוען שלכל $T \in \mathcal{L}(V)$, ישנו אופרטור הפיך קרוב ל- T ככל שנרצה.

7.88 נוסחאות חלופיות עבור $\|T\|$

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי

א. $\|T\| =$ הערך הסינגולרי הגבוה ביותר של T

ב. $\|T\| = \max\{\|Tv\| : v \in V \text{ וגם } \|v\| = 1\}$

ג. $\|T\| =$ המספר הנמוך ביותר c כך ש- $\|Tv\| \leq c\|v\|$ לכל $v \in V$.

הוכחה

א. ראו 7.85.

ב. יהי $v \in V$ כך ש- $0 < \|v\| \leq 1$. יהי $u = v/\|v\|$. אזי

$$\|u\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1 \quad \text{ו-} \quad \|Tu\| = \left\| T\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| = \frac{\|Tv\|}{\|v\|} \geq \|Tv\|.$$

לפיכך כאשר u מוצאים את המקסימום של $\|Tv\|$ עם $\|v\| \leq 1$, נוכל לצמצם את תשומת הלב אל וקטורים ב- V עם נורמה 1, ובכך הוכחנו את (ב).

ג. נניח ש- $v \in V$ ו- $v \neq 0$. אזי ההגדרה של $\|T\|$ גוררת ש-

$$\left\| T\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| \leq \|T\|,$$

מה שגורר ש-

$$\|Tv\| \leq \|T\| \|v\|. \quad 7.89$$

קעת נניח ש- $c \geq 0$ ו- $\|Tv\| \leq c\|v\|$ לכל $v \in V$. מכאן נובע ש-

$$\|Tv\| \leq c$$

לכל $v \in V$ עם $\|v\| \leq 1$. כשניקח את המקסימום של האגף השמאלי של האי-שוויון לעיל מבין כל $v \in V$ עם $\|v\| \leq 1$ נקבל ש- $\|T\| \leq c$. לפיכך $\|T\|$ הוא המספר הנמוך ביותר c כך ש- $\|Tv\| \leq c\|v\|$ לכל $v \in V$. ■

כשתעבדו עם נורמות של העתקות ליניאריות, ככל הנראה לעיתים קרובות תשתמשו באי-שוויון 7.89.

לחישוב קירובים של הנורמה של העתקה ליניארית T בהינתן המטריצה של T ביחס לבסיסים אורתונורמליים כלשהם, 7.88 (א) יהיה ככל הנראה השימושי ביותר. המטריצה של T^*T ניתנת לחישוב באופן מהיר באמצעות כפל מטריצות. בשלב זה נוכל להשתמש במחשב למציאת קירוב לערך העצמי הגבוה ביותר של T^*T (קיימים אלגוריתמים מספריים מצוינים למטרה זו). הוצאת שורשים ריבועיים ושימוש ב-7.88 (א) נותנים בשלב זה קירוב לנורמה של T (אשר בדרך כלל לא ניתנת לחישוב מדויק).

עליכם לוודא את כל הטענות בדוגמה להלן.

7.90 דוגמה: נורמות

- אם I מסמן את אופרטור הזהות הרגיל מעל V , אזי $\|I\| = 1$.
- אם $T \in \mathcal{L}(F^n)$ וכל איברי המטריצה של T ביחס לבסיס הסטנדרטי של F^n הם 1, אזי $\|T\| = n$.
- אם $T \in \mathcal{L}(V)$ ויש ל- V בסיס אורתונורמלי המורכב מווקטורים עצמיים של T שהערכים העצמיים השייכים להם הם $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, אזי $\|T\|$ היא המקסימום של המספרים $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|$.
- נניח ש- $T \in \mathcal{L}(R^5)$ הוא האופרטור שהמטריצה שלו (ביחס לבסיס הסטנדרטי) היא מטריצה 5×5 שהאיבר בשורה j , עמודה k הוא $1/(j^2 + k)$. תוכנה מתמטית סטנדרטית מראה שהערך הסינגולרי הגבוה ביותר של T הוא 0.8 בקירוב והערך הסינגולרי הנמוך ביותר של T הוא 10^{-6} בקירוב. לפיכך $\|T\| \approx 0.8$ (ולפי תרגיל 10 ביחידה 5) $\|T^{-1}\| \approx 10^6$. אין אפשרות למצוא את הנוסחאות המדויקות לנורמות אלו.

להעתקה ליניארית ולהעתקה הצמודה שלה יש אותה נורמה, כפי שמראה לנו המסקנה הבאה.

7.91 נורמה של הצמודה

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. אזי $\|T^*\| = \|T\|$.

הוכחה נניח ש- $w \in W$. אזי

$$\|T^*w\|^2 = \langle T^*w, T^*w \rangle = \langle TT^*w, w \rangle \leq \|TT^*w\| \|w\| \leq \|T\| \|T^*w\| \|w\|.$$

האי-שוויון לעיל גורר ש-

$$\|T^*w\| \leq \|T\| \|w\|,$$

אשר יחד עם 7.88 (ג) גורר ש- $\|T^*\| \leq \|T\|$.

החלפת T ב- T^* באי-שוויון $\|T^*\| \leq \|T\|$ ואז שימוש במשוואה $(T^*)^* = T$ מראה לנו ש- $\|T^*\| \leq \|T\|$. לפיכך $\|T^*\| = \|T\|$, כפי שרצינו. ■

ייתכן שתמצאו להרכיב הוכחה חלופית עבור המסקנה לעיל בהתבסס על תרגיל 9 ביחידה 5, הטוען כי להעתקה ליניארית ולהעתקה הצמודה שלה יש אותם ערכים סינגולריים חיוביים.

קירובים באמצעות העתקות ליניאריות עם ממד טווח נמוך יותר

המסקנה הבאה היא יישום מרהיב של הפירוק לערכים סינגולריים. היא קובעת כי כדי לחשב את הקירוב הטוב ביותר של העתקה ליניארית באמצעות העתקה ליניארית שממד הטווח שלה הוא לכל היותר k , יש לחתוך את הפירוק לערכים סינגולריים אחרי k הביטויים הראשונים. ליתר דיוק, להעתקה הליניארית T_k במסקנה הבאה התכונה ש- $\dim \text{range } T_k = k$ ו- T_k ממזער את המרחק ל- T מבין כל ההעתקות הליניאריות עם ממד טווח k לכל היותר. מסקנה זו מובילה לאלגוריתמים לדחיסת מטריצות ענק תוך שימור המידע החשוב ביותר האצור בהן.

7.92 הקירוב הטוב ביותר באמצעות העתקה ליניארית שממד הסווח $k \geq$

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $s_1 \geq \dots \geq s_m$ הערכים הסינגולריים החיוביים של T .
נניח ש- $1 \leq k < m$ אזי

$$\min\{\|T - S\| : S \in \mathcal{L}(V, W) \text{ וגם } \dim \text{range } S \leq k\} = s_{k+1}.$$

יתר על כן, אם

$$Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + s_m \langle v, e_m \rangle f_m$$

הוא פירוק לערכים סינגולריים של T ו- $T_k \in \mathcal{L}(V, W)$ מוגדר על ידי

$$T_k v = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + s_k \langle v, e_k \rangle f_k$$

לכל $v \in V$, אזי $\dim \text{range } T_k = k$ ו- $\|T - T_k\| = s_{k+1}$.

הוכחה אם $v \in V$ אזי

$$\begin{aligned} \|(T - T_k)v\|^2 &= \|s_{k+1} \langle v, e_{k+1} \rangle f_{k+1} + \dots + s_m \langle v, e_m \rangle f_m\|^2 \\ &= s_{k+1}^2 |\langle v, e_{k+1} \rangle|^2 + \dots + s_m^2 |\langle v, e_m \rangle|^2 \\ &\leq s_{k+1}^2 (|\langle v, e_{k+1} \rangle|^2 + \dots + |\langle v, e_m \rangle|^2) \\ &\leq s_{k+1}^2 \|v\|^2. \end{aligned}$$

לפיכך $\|T - T_k\| \leq s_{k+1}$. המשוואה $(T - T_k)e_{k+1} = s_{k+1}f_{k+1}$ כעת מראה לנו ש-
 $\|T - T_k\| = s_{k+1}$.

נניח ש- $S \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $\dim \text{range } S \leq k$. לפיכך $Se_1, \dots, Se_{k+1}$ שהיא רשימה
באורך $k+1$, תלויה ליניארית. לכן קיימים $a_1, \dots, a_{k+1} \in \mathbb{F}$, שלא כולם 0, כך ש-
 $a_1 Se_1 + \dots + a_{k+1} Se_{k+1} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{כעת } a_1 e_1 + \dots + a_{k+1} e_{k+1} &\neq 0 \text{ מאחר ש- } a_1, \dots, a_{k+1} \text{ לא כולם 0. מתקיים} \\ \|(T - S)(a_1 e_1 + \dots + a_{k+1} e_{k+1})\|^2 &= \|T(a_1 e_1 + \dots + a_{k+1} e_{k+1})\|^2 \\ &= \|s_1 a_1 f_1 + \dots + s_{k+1} a_{k+1} f_{k+1}\|^2 \\ &= s_1^2 |a_1|^2 + \dots + s_{k+1}^2 |a_{k+1}|^2 \\ &\geq s_{k+1}^2 (|a_1|^2 + \dots + |a_{k+1}|^2) \\ &= s_{k+1}^2 \|a_1 e_1 + \dots + a_{k+1} e_{k+1}\|^2. \end{aligned}$$

מאחר ש- $a_1 e_1 + \dots + a_{k+1} e_{k+1} \neq 0$, האי-שוויון לעיל גורר ש-

$$\|T - S\| \geq s_{k+1}.$$

לפיכך $S = T_k$ ממזער את $\|T - S\|$ מבין $S \in \mathcal{L}(V, W)$ עם $\dim \text{range } S \leq k$. ■

לדוגמאות נוספות של שימוש בפירוק לערכים סינגולריים בבעיות קירוב מיטבי, ראו
תרגיל 22, המוצא תת-מרחב מממד נתון אשר מעליו הצמצום של העתקה ליניארית
הוא קטן ככל הניתן, ותרגיל 27, המוצא אופרטור אוניטרי הקרוב ביותר לאופרטור
נתון.

פירוק פולרי

נזכיר את הדיון שהיה לנו לפני 7.54 הנוגע לאנלוגיה בין המספרים המרוכבים z שעבורם $|z| = 1$ לבין האופרטורים האוניטריים. בהמשך לאנלוגיה זו, נשים לב שכל מספר מרוכב z מלבד 0 יכול להיכתב באופן הבא

$$z = \left(\frac{z}{|z|} \right) |z| \\ = \left(\frac{z}{|z|} \right) \sqrt{\bar{z}z},$$

כאשר הערך המוחלט של הגורם הראשון, קרי, $z/|z|$, הוא 1. אנלוגיה זו מובילה אותנו אל הניחוש כי כל אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ ניתן לכתיבה כאופרטור אוניטרי כפול $\sqrt{T^*T}$. ניחוש זה הוא אכן נכון. המסקנה המתאימה נקראת הפירוק הפולרי, המעניק תיאור יפה לאופרטור שרירותי מעל V .

נשים לב כי אם $T \in \mathcal{L}(V)$, אזי T^*T אופרטור חיובי [כפי שהראינו ב- 7.64 (א)]. לפיכך האופרטור $\sqrt{T^*T}$ הגיוני ומוגדר היטב כאופרטור חיובי מעל V .

הפירוק הפולרי שאנו עומדים להציג ולהוכיח טוען כי כל אופרטור מעל V הוא מכפלה של אופרטור אוניטרי ואופרטור חיובי. לפיכך אנו יכולים לכתוב אופרטור שרירותי מעל V כמכפלה של שני אופרטורים נחמדים, כאשר כל אחד משויך לקבוצה שאנו יכולים לתאר בצורה מלאה ולהבין באופן טוב יחסית. האופרטורים האוניטריים מתוארים לפי 7.55 אם $F = \mathbb{C}$; האופרטורים החיוביים מתוארים על ידי משפטי הפירוק הספקטרלי, הממשי והמרוכב (7.29 ו- 7.31).

ליתר דיוק, נתבונן במקרה $F = \mathbb{C}$, ונניח ש-

$$T = S\sqrt{T^*T}$$

הוא פירוק פולרי של אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$, כאשר S הוא אופרטור אוניטרי. אזי קיים בסיס אורתונורמלי של V אשר ביחס אליו יש ל- S מטריצה אלכסונית, וקיים בסיס אורתונורמלי של V אשר ביחס אליו יש ל- $\sqrt{T^*T}$ מטריצה אלכסונית. **אזהרה:** ייתכן שלא קיים בסיס אורתונורמלי אחד אשר בריזמנית מארגן את המטריצות של שני האופרטורים S ו- $\sqrt{T^*T}$ לתוך אותן צורות אלכסוניות נחמדות—ייתכן כי S דורש בסיס אורתונורמלי אחד בעוד $\sqrt{T^*T}$ דורש בסיס אורתונורמלי אחר.

בכל זאת (עדיין תחת ההנחה ש- $F = \mathbb{C}$), אם T נורמלי, אזי ניתן לבחור בסיס אורתונורמלי של V כך שלשני האופרטורים, ל- S ול- $\sqrt{T^*T}$ יש מטריצות אלכסוניות ביחס לבסיס זה—ראו תרגיל 31. ההיפך גם הוא נכון: אם $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $T = S\sqrt{T^*T}$ עבור אופרטור אוניטרי $S \in \mathcal{L}(V)$ כלשהו כך שלשני האופרטורים, ל- S ול- $\sqrt{T^*T}$ יש מטריצות אלכסוניות ביחס לאותו בסיס אורתונורמלי של V , אזי T נורמלי. זה מתקיים מאחר שיש ל- T מטריצה אלכסונית ביחס אל אותו בסיס אורתונורמלי, מה שגורר ש- T נורמלי [לפי השקילות של (א) ו- (ג) ב- 7.31].

הפירוק הפולרי להלן תקף במרחבי מכפלה פנימית ממשיים ומרוכבים כאחד, ועבור כל האופרטורים מעל מרחבים אלו.

7.93 פירוק פולרי

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי קיים אופרטור אוניטרי $S \in \mathcal{L}(V)$ כך ש-

$$T = S\sqrt{T^*T}.$$

הוכחה יהיו $s_1, \dots, s_m$ הערכים הסינגולריים החיוביים של T , ותהיינה $e_1, \dots, e_m$ ו- $f_1, \dots, f_m$ רשימות אורתונורמליות ב- V כך ש-

7.94 $Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + s_m \langle v, e_m \rangle f_m$
 לכל $v \in V$. נשלים את $e_1, \dots, e_m$ ו- $f_1, \dots, f_m$ בסיסים אורתונורמליים $e_1, \dots, e_n$ ו- $f_1, \dots, f_n$ של V .

נגדיר $S \in \mathcal{L}(V)$ על ידי

$$Sv = \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle f_n$$

לכל $v \in V$. אזי

$$\begin{aligned} \|Sv\|^2 &= \|\langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle f_n\|^2 \\ &= |\langle v, e_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, e_n \rangle|^2 \\ &= \|v\|^2. \end{aligned}$$

לפיכך S אופרטור אוניטרי.

7.77 הפעלת T^* על שני האגפים של 7.94 ואז שימוש בנוסחה עבור T^* הנתונה ב- 7.77 מראה לנו כי

$$T^*Tv = s_1^2 \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + s_m^2 \langle v, e_m \rangle e_m$$

לכל $v \in V$. לפיכך אם $v \in V$, אזי

$$\sqrt{T^*T}v = s_1 \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + s_m \langle v, e_m \rangle e_m$$

מאחר שהאופרטור השולח את v אל האגף הימני של המשוואה לעיל הוא אופרטור חיובי שריבועו שווה ל- T^*T . כעת

$$\begin{aligned} S\sqrt{T^*T}v &= S(s_1 \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + s_m \langle v, e_m \rangle e_m) \\ &= s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + s_m \langle v, e_m \rangle f_m \\ &= Tv, \end{aligned}$$

כאשר המשוואה האחרונה נובעת מ- 7.94. ■

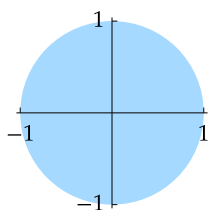
תרגיל 27 מראה שהאופרטור האוניטרי S שהופק בהוכחה לעיל הוא הקרוב ביותר האפשרי ל- T מבין האופרטורים האוניטריים.

הוכחות חלופיות לפירוק הפולרי משתמשות במשפט הפירוק הספקטרלי באופן ישיר, תוך הימנעות מהפירוק לערכים סינגולריים. בכל זאת, ההוכחה לעיל נראית נקייה יותר מאותן הוכחות חלופיות.

יישום אופרטורים על אליפסואידים ומקבילוים

7.95 הגדרה: כדור, B

הכדור ב- V שרדיוסו 1 ושמרכזו ב- 0 , מסומן על ידי B , מוגדר על ידי $B = \{v \in V : \|v\| < 1\}$.



הכדור B ב- $\mathbb{R}^2$

אם $\dim V = 2$, לעיתים נעשה שימוש במונח עיגול במקום כדור. בכל זאת, שימוש בכדור בכל הממדים הוא פחות מבלבל. באופן דומה, אם $\dim V = 2$, לעיתים נעשה שימוש במונח אליפסה במקום המונח אליפסואיד שאנו עומדים להגדיר. שוב, השימוש באליפסואיד בכל הממדים פחות מבלבל.

תוכלו לחשוב על האליפסואיד המוגדר להלן כזה שהושג בכך שמתחילים עם הכדור B ואז מותחים פי s_k לאורך כל ציר f_k .

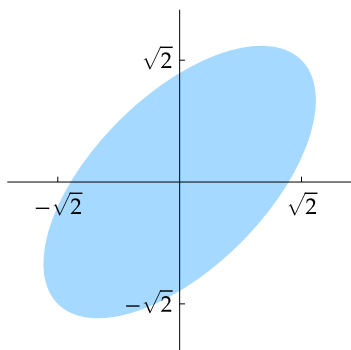
7.96 הגדרה: אליפסואיד, $E(s_1 f_1, \dots, s_n f_n)$, צירים ראשיים

נניח ש- $f_1, \dots, f_n$ בסיס אורתונורמלי של V ו- $s_1, \dots, s_n$ מספרים חיוביים. האליפסואיד $E(s_1 f_1, \dots, s_n f_n)$ עם צירים ראשיים $s_1 f_1, \dots, s_n f_n$ מוגדר על ידי

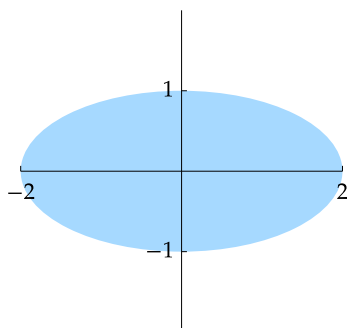
$$E(s_1 f_1, \dots, s_n f_n) = \left\{ v \in V : \frac{|\langle v, f_1 \rangle|^2}{s_1^2} + \dots + \frac{|\langle v, f_n \rangle|^2}{s_n^2} < 1 \right\}.$$

סימון האליפסואיד $E(s_1 f_1, \dots, s_n f_n)$ אינו כולל באופן מפורש את מרחב המכפלה הפנימית V , אף שההגדרה לעיל תלויה ב- V . בכל זאת, מרחב המכפלה הפנימית V אמור להיות ברור מההקשר ובנוסף מהדרישה ש- $f_1, \dots, f_n$ יהיה בסיס אורתונורמלי של V .

7.97 דוגמה: אליפסואידים

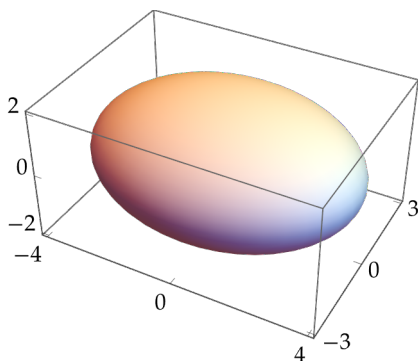


האליפסואיד $E(2f_1, f_2)$ ב- $\mathbb{R}^2$, כאשר $f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ו- $f_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



האליפסואיד $E(2f_1, f_2)$ ב- $\mathbb{R}^2$, כאשר f_1, f_2 הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$

האליפסואיד $E(4f_1, 3f_2, 2f_3)$
ב- $\mathbb{R}^3$, כאשר f_1, f_2, f_3
הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.



האליפסואיד $E(f_1, \dots, f_n)$ שווה לכדור B ב- V לכל בסיס אורתונורמלי $f_1, \dots, f_n$ של V [לפי שוויון פרסבל 6.30(ב)].

7.98 סימון: $T(\Omega)$

עבור T פונקציה המוגדרת מעל V ו- $\Omega \subseteq V$, נגדיר $T(\Omega)$ על ידי
$$T(\Omega) = \{Tv : v \in \Omega\}.$$

לפיכך אם T פונקציה המוגדרת מעל V , אזי $\text{range } T = T(V)$.
המסקנה הבאה קובעת שכל אופרטור הפיך $T \in \mathcal{L}(V)$ מעתיק את הכדור B ב- V על אליפסואיד ב- V . ההוכחה מראה כי הצירים הראשיים של אליפסואיד זה נובעים מהפירוק לערכים סינגולריים של T .

7.99 אופרטור הפיך מעתיק כדור לאליפסואיד

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ הפיך. אזי T מעתיק את הכדור B ב- V על אליפסואיד ב- V .

הוכחה נניח שיש ל- T פירוק לערכים סינגולריים

7.100
$$Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + s_n \langle v, e_n \rangle f_n$$

לכל $v \in V$. כאן $s_1, \dots, s_n$ הם הערכים הסינגולריים של T ו- $e_1, \dots, e_n$ ו- $f_1, \dots, f_n$ בסיסים אורתונורמליים של V . אנו נראה כי $T(B) = E(s_1 f_1, \dots, s_n f_n)$.
תחילה נניח כי $v \in B$. מאחר ש- T הפיך, אף אחד מהערכים הסינגולריים $s_1, \dots, s_n$ אינו שווה 0 (ראו 7.68). לפיכך 7.100 גורר ש-

$$\frac{| \langle Tv, f_1 \rangle |^2}{s_1^2} + \dots + \frac{| \langle Tv, f_n \rangle |^2}{s_n^2} = | \langle v, e_1 \rangle |^2 + \dots + | \langle v, e_n \rangle |^2 < 1.$$

לפיכך $Tv \in E(s_1 f_1, \dots, s_n f_n)$. לכן $T(B) \subseteq E(s_1 f_1, \dots, s_n f_n)$.
להוכחת ההכלה בכיוון השני, כעת נניח ש- $w \in E(s_1 f_1, \dots, s_n f_n)$. יהי

$$w = \frac{\langle w, f_1 \rangle}{s_1} e_1 + \dots + \frac{\langle w, f_n \rangle}{s_n} e_n.$$

אזי $\|w\| < 1$ ו- 7.100 גוררים ש- $w = \langle w, f_1 \rangle f_1 + \dots + \langle w, f_n \rangle f_n = Tv$. לפיכך
$$T(B) \supseteq E(s_1 f_1, \dots, s_n f_n)$$

כעת אנו משתמשים במסקנה הקודמת כדי להראות כי אופרטורים הפיכים מעתיקים את כל האליפסואידים, לא רק את הכדור שרדיוסו 1, אל אליפסואידים.

7.101 אופרטור הפיך מעתיק אליפסואידים אל אליפסואידים

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ הפיך ו- E אליפסואיד ב- V . אזי $T(E)$ אליפסואיד ב- V .

הוכחה קיימים בסיס אורתונורמלי $f_1, \dots, f_n$ של V ומספרים חיוביים $s_1, \dots, s_n$ כך ש- $E = E(s_1 f_1, \dots, s_n f_n)$. נגדיר $S \in \mathcal{L}(V)$ על ידי

$$S(a_1 f_1 + \dots + a_n f_n) = a_1 s_1 f_1 + \dots + a_n s_n f_n.$$

אזי S מעתיק את הכדור B של V על E , כפי שבאפשרותכם לוודא. לפיכך

$$T(E) = T(S(B)) = (TS)(B).$$

המשוואה לעיל ו- 7.99, מיושמות על TS , מראות כי $T(E)$ אליפסואיד ב- V .

נזכיר (ראו 3.95) כי אם $u \in V$ ו- $\Omega \subseteq V$ אזי $u + \Omega$ מוגדר על ידי

$$u + \Omega = \{u + w : w \in \Omega\}.$$

מבחינה גאומטרית, הקבוצות Ω ו- $u + \Omega$ נראות זהות, אך הן במיקומים שונים.

בהגדרה הבאה, אם $\dim V = 2$ אזי לעיתים קרובות נעשה שימוש במילה מקבילית במקום במקבילון.

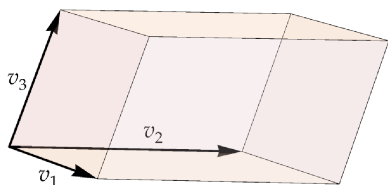
7.102 הגדרה: $P(v_1, \dots, v_n)$ מקבילון

נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V . יהי

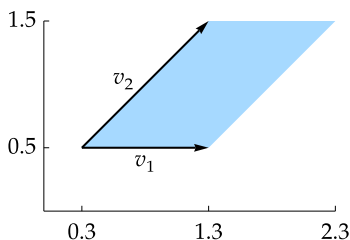
$$P(v_1, \dots, v_n) = \{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n : a_1, \dots, a_n \in (0, 1)\}.$$

מקבילון הוא קבוצה מהצורה $u + P(v_1, \dots, v_n)$ עבור $u \in V$ כלשהו. הווקטורים $v_1, \dots, v_n$ נקראים הצלעות של מקבילון זה.

7.103 דוגמה: מקבילונים



מקבילון ב- $\mathbb{R}^3$



המקבילון

ב- $\mathbb{R}^2$ $(0.3, 0.5) + P((1, 0), (1, 1))$

7.104 אופרטור הפיך מעתיק מקבילונים אל מקבילונים

נניח ש- $u \in V$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V , ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ הפיך. אזי

$$T(u + P(v_1, \dots, v_n)) = Tu + P(Tv_1, \dots, Tv_n).$$

הוכחה מאחר ש- T הפיך, הרשימה $Tv_1, \dots, Tv_n$ בסיס של V . הליניאריות של T גוררת ש-

$$T(u + a_1v_1 + \dots + a_nv_n) = Tu + a_1Tv_1 + \dots + a_nTv_n$$

לכל $a_1, \dots, a_n \in (0, 1)$. לפיכך $T(u + P(v_1, \dots, v_n)) = Tu + P(Tv_1, \dots, Tv_n)$. ■

בדומה למלבנים, המובחנים מבין המקביליות ב- $\mathbb{R}^2$, אנו מעניקים שם מיוחד למקבילון ב- V שהצלעות המגדירות שלו אורתוגונליות זו לזו.

7.105 הגדרה: תיבה

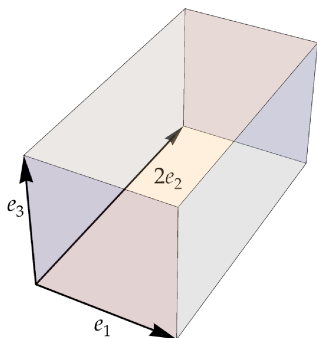
תיבה ב- V היא קבוצה מהצורה

$$u + P(r_1e_1, \dots, r_ne_n),$$

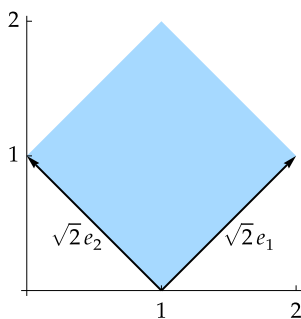
כאשר $u \in V$ ו- $r_1, \dots, r_n$ מספרים חיוביים ו- $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V .

שימו לב שבמקרה הפרטי של $\mathbb{R}^2$ כל תיבה היא מלבן, אך ניתן להשתמש במונח תיבה בכל הממדים.

7.106 דוגמה: תיבות



התיבה $P(e_1, 2e_2, e_3)$, כאשר e_1, e_2, e_3 הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.



התיבה $(1, 0) + P(\sqrt{2}e_1, \sqrt{2}e_2)$, כאשר $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ו- $e_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ הפיך. אזי T מעתיק כל מקבילון ב- V אל מקבילון ב- V (לפי 7.104). בפרט, T מעתיק כל תיבה ב- V אל מקבילון ב- V . הדבר מעלה את השאלה האם T מעתיק תיבות כלשהן ב- V אל תיבות ב- V . המסקנה הבאה עונה על שאלה זו, בסיוע הפירוק לערכים סינגולריים.

7.107 כל אופרטור הפיך מעתיק תיבות כלשהן אל תיבות

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ הפיך. נניח שיש ל- T פירוק לערכים סינגולריים

$$Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + s_n \langle v, e_n \rangle f_n,$$

כאשר $s_1, \dots, s_n$ הם הערכים הסינגולריים של T ו- $e_1, \dots, e_n$ ו- $f_1, \dots, f_n$ הם בסיסים אורתונורמליים של V והמשוואה לעיל מתקיימת לכל $v \in V$. אזי T מעתיק את התיבה $u + P(r_1 e_1, \dots, r_n e_n)$ על התיבה $Tu + P(r_1 s_1 f_1, \dots, r_n s_n f_n)$. לכל המספרים החיוביים $r_1, \dots, r_n$ ולכל $u \in V$.

הוכחה אם $a_1, \dots, a_n \in (0, 1)$ ו- $r_1, \dots, r_n$ מספרים חיוביים ו- $u \in V$, אזי

$$T(u + a_1 r_1 e_1 + \dots + a_n r_n e_n) = Tu + a_1 r_1 s_1 f_1 + \dots + a_n r_n s_n f_n.$$

$$\text{לפיכך } T(u + P(r_1 e_1, \dots, r_n e_n)) = Tu + P(r_1 s_1 f_1, \dots, r_n s_n f_n).$$

נפח באמצעות ערכים סינגולריים

מטרתנו בתת־יחידה זו של הפרק היא להבין כיצד אופרטור משנה את הנפח של תתי־קבוצות בתחומו. מאחר שמושגים של נפח שייכים לאנליזה ולא לאלגברה ליניארית, אנו נעבוד במונחים אינטואיטיביים של נפח. ניתן להמיר את גישתנו האינטואיטיבית לנפח להגדרות נכונות ומתאימות, משפטים נכונים והוכחות נכונות, תוך שימוש בכלי האנליזה.

האינטואיציה שלנו לגבי נפח עובדת באופן מיטבי במרחבי מכפלה פנימית ממשיים. לפיכך ההנחה ש- $F = \mathbb{R}$ תופיע לעיתים קרובות בתת־יחידה זו.

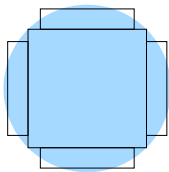
אם $\dim V = n$, אזי כשאנו מציינים נפח אנו מתכוונים לנפח n -ממדי. אתם אמורים להכיר את רעיון זה כבר ב- $\mathbb{R}^3$. כאשר $n = 2$, בדרך כלל הדבר נקרא שטח במקום נפח, אך לשם העקביות אנו נשתמש במילה נפח בכל הממדים. האינטואיציה הבסיסית ביותר לגבי נפח היא שנפח של תיבה (זו אשר הצלעות המגדירות שלה לפי הגדרה אורתוגונליות זו לזו) הוא המכפלה של אורכי הצלעות המגדירות. לפיכך נציג את ההגדרה הבאה.

7.108 הגדרה: נפח תיבה, volume

נניח ש- $F = \mathbb{R}$. אם $u \in V$ ו- $r_1, \dots, r_n$ מספרים חיוביים ו- $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V , אזי

$$\text{volume}(u + P(r_1 e_1, \dots, r_n e_n)) = r_1 \times \dots \times r_n.$$

ההגדרה לעיל תואמת את הנוסחאות המוכרות עבור חישוב השטח (שלו אנו קוראים כעת נפח) של מלבן ב- $\mathbb{R}^2$ ושל נפח תיבה ב- $\mathbb{R}^3$. לדוגמה, לתיבה הראשונה בדוגמה 7.106 נפח דו־ממדי (או שטח) שערכו 2 מאחר שאורכי הצלעות המגדירות של תיבה זו הם $\sqrt{2}$ ו- $\sqrt{2}$. נפח התיבה השנייה בדוגמה 7.106 הוא תלת־ממדי וערכו 2 מאחר שאורכי הצלעות המגדירות של תיבה זו הם 1, 2 ו- 1.



הנפח של כדור זה $\approx$ סכום הנפחים של חמש התיבות.

להגדרת הנפח של תת-קבוצה של V , בצעו קירוב של התת-קבוצה באמצעות אוסף בגודל סופי של תיבות זרות, ולאחר מכן סכמו את הנפחים של תיבות הקירוב. ככל שהקירוב של התת-קבוצה של V יהיה מדויק יותר בכך שנבצע איחוד זר של עוד תיבות, נקבל קירוב טוב יותר לנפח.

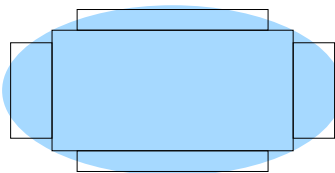
רעיונות אלו אמורים להזכיר לכם את אינטגרל רימן המוגדר על ידי קירוב השטח תחת העקום על ידי אוסף זר של מלבנים. דיון זה מוביל אל ההגדרה הלא ריגורוזית אך אינטואיטיבית הבאה.

7.109 הגדרה: נפח

נניח ש- $F = \mathbb{R}$ ו- $\Omega \subseteq V$. אזי הנפח של Ω , מסומן על ידי $\text{volume } \Omega$, הוא בקירוב סכום הנפחים של אוסף של תיבות זרות המקרבות את Ω .

אנו מתעלמים משאלות הגיוניות רבות בכך שאנו נוקטים בגישה האינטואיטיבית לנפח. לדוגמה, אם נקרב את Ω באמצעות תיבות ביחס לבסיס אחד, האם נקבל את אותו הנפח אם נקרב את Ω באמצעות תיבות ביחס לבסיס אחר? אם Ω_1 ו- Ω_2 שתי תת-קבוצות זרות של V , האם $\text{volume}(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \text{volume } \Omega_1 + \text{volume } \Omega_2$? בהינתן שאנו לוקחים בחשבון רק תת-קבוצות נחמדות של V , טכניקות של אנליזה מראות כי לשתי שאלות אלו תשובות חיוביות העולות בקנה אחד עם האינטואיציה שלנו בנוגע לנפח.

7.110 דוגמה: שינוי נפח באמצעות העתקה ליניארית



ביחס לתיבות באיור הקודם, רוחב התיבות כאן הוא כפול בעוד גובה התיבות שווה.

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ מוגדר על ידי $Tv = 2\langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2$, כאשר e_1, e_2 הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$. העתקה ליניארית זו מותחת את הווקטורים לאורך ציר ה- e_1 בפקטור של 2 ומותירה את הווקטורים לאורך ציר ה- e_2 ללא שינוי. הכדור המקורב על ידי חמש התיבות לעיל מועתק על ידי T אל האליפסואיד המוצג כאן. כל אחת מחמש התיבות באיור המקורי מועתקת אל

תיבה ברוחב כפול ובגובה זהה לזה שבאיור המקורי. לכן כל תיבה מועתקת לתיבה שנפחה (שטחה) כפול מזה שבאיור המקורי. סכום הנפחים של חמש התיבות החדשות הוא הקירוב לנפח האליפסואיד. לפיכך T משנה את נפח הכדור בפקטור של 2.

בדוגמה לעיל, T מעתיקה תיבות ביחס אל הבסיס e_1, e_2 אל תיבות ביחס לאותו הבסיס; לפיכך אנו יכולים לראות כיצד T משנה נפח. באופן כללי, אופרטור מעתיק תיבות אל מקבילונים שאינם תיבות. בכל זאת, אם נבחר את הבסיס הנכון (זה המגיע מהפירוק לערכים סינגולריים!), אזי תיבות ביחס לבסיס זה מועתקות לתיבות ביחס לבסיס זה או שונה, כפי שמוצג ב- 7.107. התבוננות זו מובילה להוכחה טבעית של המסקנה הבאה.

7.111 פקטור שינוי הנפח הוא מכפלת הערכים הסינגולריים

נניח ש- $F = R$, $T \in \mathcal{L}(V)$, הפיך, ו- $\Omega \subseteq V$. אזי
 $\text{volume } T(\Omega) = (\text{volume } \Omega) (T)$ (מכפלת הערכים הסינגולריים של T).

הוכחה נניח שיש ל- T פירוק לערכים סינגולריים

$$Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + s_n \langle v, e_n \rangle f_n$$

לכל $v \in V$, כאשר $e_1, \dots, e_n$ ו- $f_1, \dots, f_n$ בסיסים אורתונורמליים של V .
 נקרב את Ω באמצעות תיבות מהצורה $u + P(r_1 e_1, \dots, r_n e_n)$, שהנפח שלהן הוא $r_1 \times \dots \times r_n$. האופרטור T מעתיק כל תיבה $u + P(r_1 e_1, \dots, r_n e_n)$ על התיבה $Tu + P(r_1 s_1 f_1, \dots, r_n s_n f_n)$.
 האופרטור T מעתיק אוסף תיבות קירוב ל- Ω על אוסף תיבות קירוב ל- $T(\Omega)$.
 מאחר ש- T משנה את הנפח של כל תיבה באוסף המקרב את Ω בפקטור של $s_1 \times \dots \times s_n$, ההעתקה הליניארית T משנה את הנפח של Ω באותו הפקטור. ■

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. כפי שנראה כאשר נגיע לנושא הדטרמיננטות, המכפלה של הערכים הסינגולריים של T שווה ל- $|\det T|$; ראו 9.60 ו- 9.61.

תכונות של אופרטור כפי שנקבעות על ידי הערכים העצמיים שלו

אנו חותמים את פרק זה בהצגת הטבלה להלן. ההקשר של טבלה זו הוא מרחב מכפלה פנימית מרוכב מממד סופי. העמודה הראשונה של הטבלה מציגה תכונה שניתן שתהיה לאופרטור נורמלי מעל מרחב זה. העמודה השנייה של הטבלה מציגה תת־קבוצה של C כך שלאופרטור תהיה התכונה המתאימה אס־ורק־אם כל הערכים העצמיים של האופרטור נמצאים בתת־הקבוצה המצוינת. לדוגמה, השורה הראשונה בטבלה קובעת כי אופרטור נורמלי הוא הפיך אס־ורק־אם כל הערכים העצמיים שלו שונים מאפס (שורה ראשונה זו היא היחידה בטבלה שאינה זקוקה להנחה כי האופרטור נורמלי).

ודאו שביכולתכם להסביר מדוע כל התוצאות בטבלה מתקיימות. לדוגמה, השורה האחרונה של הטבלה מתקיימת מאחר שהנורמה של אופרטור שווה לערך הסינגולרי הגבוה ביותר (לפי 7.85) והערכים הסינגולריים של אופרטור נורמלי, בהנחה ש- $F = C$, שווים לערכים המוחלטים של הערכים העצמיים (לפי תרגיל 7 ביחידה 5).

תכונות של אופרטור נורמלי	ערכים עצמיים מוכלים ב־
הפיך	$C \setminus \{0\}$
צמוד לעצמו	R
אנטי־צמוד	$\{\lambda \in C : \text{Re } \lambda = 0\}$
היטל אורתוגונלי	$\{0, 1\}$
חיובי	$[0, \infty)$
אוניטרי	$\{\lambda \in C : \lambda = 1\}$
נורמה קטנה מ־ 1	$\{\lambda \in C : \lambda < 1\}$

תרגילים 6

- 1 הוכיחו כי אם $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$, אזי $\|S - T\| \leq \|S\| - \|T\|$.
האי-שוויון לעיל נקרא **אי-שוויון המשולש ההפוך**.
- 2 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ צמוד לעצמו או ש- $F = \mathbb{C}$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ נורמלי. הוכיחו כי הנורמה של T שווה לערך המוחלט הגדול ביותר מבין הערכים העצמיים של T .
- 3 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $v \in V$. הוכיחו כי
$$\|Tv\| = \|T\| \|v\| \iff T^*Tv = \|T\|^2 v.$$
- 4 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $v \in V$ ו- $\|Tv\| = \|T\| \|v\|$. הוכיחו כי אם $u \in V$ ו- $\langle u, v \rangle = 0$ אזי $\langle Tu, Tv \rangle = 0$.
- 5 נניח ש- U מרחב מכפלה פנימית מממד סופי, $T \in \mathcal{L}(V, U)$ ו- $S \in \mathcal{L}(U, W)$. הוכיחו כי
$$\|ST\| \leq \|S\| \|T\|.$$
- 6 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם $S, T \in \mathcal{L}(V)$, אזי $\|ST\| = \|TS\|$.
- 7 הראו כי הגדרת $d(S, T) = \|S - T\|$ עבור $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ הופכת את d למטריקה מעל $\mathcal{L}(V, W)$.
תרגיל זה פיועד לקוראים בעלי היכרות עם מרחבים מטריים.
- 8 א. הוכיחו כי אם $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\|I - T\| < 1$, אזי T הפיך.
ב. נניח ש- $S \in \mathcal{L}(V)$ הפיך. הוכיחו כי אם $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\|S - T\| < 1/\|S^{-1}\|$, אזי T הפיך.
תרגיל זה מראה כי הקבוצה של אופרטורים הפיכים ב- $\mathcal{L}(V)$ היא תת-קבוצה פתוחה של $\mathcal{L}(V)$, בשימוש במטריקה המוגדרת בתרגיל 7.
- 9 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי לכל $\epsilon > 0$, קיים אופרטור הפיך $S \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $0 < \|T - S\| < \epsilon$.
- 10 נניח ש- $\dim V > 1$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ אינו הפיך. הוכיחו כי לכל $\epsilon > 0$, קיים $S \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $0 < \|T - S\| < \epsilon$ ו- S אינו הפיך.
- 11 נניח ש- $F = \mathbb{C}$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי לכל $\epsilon > 0$ קיים אופרטור לכסין $S \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $0 < \|T - S\| < \epsilon$.
- 12 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור חיובי. הראו כי $\|\sqrt{T}\| = \sqrt{\|T\|}$.
- 13 נניח ש- $S, T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטורים חיוביים. הראו כי
$$\|S - T\| \leq \max\{\|S\|, \|T\|\} \leq \|S + T\|.$$
- 14 נניח ש- U ו- W תתי-מרחב של V כך ש- $\|P_U - P_W\| < 1$. הוכיחו כי $\dim U = \dim W$.

15 נגדיר $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$ על ידי

$$T(z_1, z_2, z_3) = (z_3, 2z_1, 3z_2).$$

מצאו (במפורש) אופרטור אוניטרי $S \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$ כך ש- $T = S\sqrt{T^*T}$.

16 נניח ש- $S \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור חיובי הפיך. הוכיחו כי קיים $\delta > 0$ כך ש- T אופרטור חיובי לכל אופרטור צמוד לעצמו $T \in \mathcal{L}(V)$ עם $\|S - T\| < \delta$.

17 הוכיחו כי אם $u \in V$ ו- φ_u הפונקציונל הליניארי מעל V המוגדר על ידי המשוואה $\langle \varphi_u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ אזי $\|\varphi_u\| = \|u\|$.

כאן אנו חושבים על שדה הסקלרים F כמרחב מכפלה פנימית עם $\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha\bar{\beta}$ לכל $\alpha, \beta \in F$. לפיכך $\|\varphi_u\|$ משמעותו היא הנורמה של φ_u כהעתקה ליניארית פ- V אל F .

18 נניח ש- $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

א. הוכיחו כי $\max\{\|Te_1\|, \dots, \|Te_n\|\} \leq \|T\| \leq (\|Te_1\|^2 + \dots + \|Te_n\|^2)^{1/2}$.

ב. הוכיחו כי $\|T\| = (\|Te_1\|^2 + \dots + \|Te_n\|^2)^{1/2}$ אם $\dim \text{range } T \leq 1$.

כאן $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי שרירותי של V , שאינו בהכרח קשור לפירוק לערכים סינגולריים של T . אם $s_1, \dots, s_n$ היא הרשימה של ערכים סינגולריים של T , אזי האגף הימני של האי-שוויון לעיל שווה ל- $(s_1^2 + \dots + s_n^2)^{1/2}$, כפי שהוצג בתרגיל 11(א) ביחידה 5.

19 הוכיחו כי אם $T \in \mathcal{L}(V, W)$, אזי $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

נוסחה זו עבור $\|T^*T\|$ מובילה לנושא החשוב של אלגברת סי כוכב.

20 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ נורמלי. הוכיחו כי $\|T^k\| = \|T\|^k$ לכל מספר שלם חיובי k .

21 נניח ש- $\dim V > 1$ ו- $\dim W > 1$. הוכיחו כי הנורמה מעל $\mathcal{L}(V, W)$ אינה נובעת ממכפלה פנימית. במילים אחרות, הוכיחו כי לא קיימת מכפלה פנימית מעל $\mathcal{L}(V, W)$ כך ש-

$$\max\{\|Tv\| : v \in V \text{ and } \|v\| \leq 1\} = \sqrt{\langle T, T \rangle} \quad \text{לכל } T \in \mathcal{L}(V, W).$$

22 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. יהי $n = \dim V$ ונסמן ב- $s_1 \geq \dots \geq s_n$ את הערכים הסינגולריים של T . הוכיחו כי אם $1 \leq k \leq n$, אזי

$$\min\{\|T|_U\| : \dim U = k \text{ עם } V \text{ תת-מרחב של } U\} = s_{n-k+1}.$$

23 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הראו כי T רציפה במידה שווה ביחס אל המטריקות מעל V ו- W הנובעות מהנורמות של אותם מרחבים (ראו תרגיל 23 ביחידה 21).

24 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ הפיך. הוכיחו כי

$$\|T^{-1}\| = \|T\|^{-1} \quad \text{אם } T \text{ אס-ורק-אם } \frac{T}{\|T\|} \text{ אופרטור אוניטרי.}$$

25 נקבע $u, x \in V$ עם $u \neq 0$. נגדיר $T \in \mathcal{L}(V)$ על ידי $Tv = \langle v, u \rangle x$ לכל $v \in V$. הוכיחו כי

$$\sqrt{T^*T}v = \frac{\|x\|}{\|u\|} \langle v, u \rangle u$$

לכל $v \in V$.

26 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי T הפיך אס-ז'ורק-אם קיים אופרטור אוניטרי יחיד $S \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $T = S\sqrt{T^*T}$.

27 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $s_1, \dots, s_n$ הם הערכים הסינגולריים של T . יהיו $e_1, \dots, e_n$ ו- $f_1, \dots, f_n$ בסיסים אורתונורמליים של V כך ש-

$$Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + s_n \langle v, e_n \rangle f_n$$

לכל $v \in V$. נגדיר $S \in \mathcal{L}(V)$ על ידי

$$Sv = \langle v, e_1 \rangle f_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle f_n.$$

א. הראו כי S אוניטרי וגם $\|T - S\| = \max\{|s_1 - 1|, \dots, |s_n - 1|\}$.

ב. הראו כי אם $E \in \mathcal{L}(V)$ אוניטרי, אזי $\|T - E\| \geq \|T - S\|$.

תרגיל זה מוצא אופרטור אוניטרי S הקרוב ככל הניתן (מבין האופרטורים האוניטריים) לאופרטור נתון T .

28 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי קיים אופרטור אוניטרי $S \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $T = \sqrt{TT^*}S$.

29 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$.

א. השתמשו בפירוק הפולרי כדי להראות כי קיים אופרטור אוניטרי $S \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $TT^* = ST^*TS^*$.

ב. הראו כיצד (א) גורר שיש ל- T ו- T^* אותם ערכים סינגולריים.

30 נניח ש- $S \in \mathcal{L}(V)$, $T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור אוניטרי, ו- $R \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור חיובי כך ש- $T = SR$. הוכיחו כי $R = \sqrt{T^*T}$.

תרגיל זה מראה כי אם נכתוב את T כמכפלה של אופרטור אוניטרי ואופרטור חיובי (כמו בפירוק הפולרי 7.93), אזי האופרטור החיובי שווה ל- $\sqrt{T^*T}$.

31 נניח ש- $F = \mathbb{C}$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ נורמלי. הוכיחו כי קיים אופרטור אוניטרי $S \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $T = S\sqrt{T^*T}$ וכן לשני האופרטורים S ו- $\sqrt{T^*T}$ יש מטריצות אלכסוניות ביחס אל אותו הבסיס האורתונורמלי של V .

32 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ו- $T \neq 0$. יהיו $s_1, \dots, s_m$ הערכים הסינגולריים החיוביים של T . הראו כי קיים בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_m$ של $(\text{null } T)^\perp$ כך ש-

$$T\left(E\left(\frac{e_1}{s_1}, \dots, \frac{e_m}{s_m}\right)\right)$$

שווה לכדור ב- $\text{range } T$ שרדיוסו 1 ושמוקדו ב- 0.

אופרטורים מעל מרחבים וקטוריים מרוכבים

בפרק זה נעמיק חקר בנוגע למבנה של אופרטורים, כאשר מירב תשומת הלב תוקדש למרחבים וקטוריים מרוכבים. חלק מהמסקנות בפרק זה חלות על מרחבים וקטוריים ממשיים ומרוכבים כאחד; לפיכך לא נצא מנקודת ההנחה כי $F = \mathbb{C}$. בנוסף, מכפלה פנימית אינה מסייעת בחומר זה, כך שאנו שבים אל המסגרת הכללית של מרחב וקטורי מממד סופי.

אפילו מעל מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי, ייתכן שלאופרטור לא יהיו די וקטורים עצמיים להגדרת בסיס של המרחב הווקטורי. לפיכך נתבונן באובייקטים קשורים וקרובים הנקראים וקטורים עצמיים מוכללים. נראה כי לכל אופרטור מעל מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי, יש בסיס של המרחב הווקטורי המורכב מווקטורים עצמיים מוכללים של האופרטור. הפירוק למרחבים עצמיים מוכללים יספק לנו תיאור טוב של אופרטורים שרירותיים מעל מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי.

לאופרטורים נילפוטנטיים, שהם אופרטורים השווים 0 כאשר הם מעלים בחזקה כלשהי, יש תפקיד חשוב בחקירות אלו. אופרטורים נילפוטנטיים מספקים כלי מרכזי בהוכחה כי לכל אופרטור הפיך מעל מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי יש שורש ריבועי וכן בגישתנו לצורת ז'ורדן.

פרק זה נחתם בהגדרת העקבה ובהוכחת תכונותיה המרכזיות.

הנחות המוצא לפרק זה

- F מסמן $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.
- V מסמן מרחב וקטורי מממד סופי השונה מאפס מעל F .



David Iltif CC BY-SA

החדר הארוך של הספרייה הישנה באוניברסיטת דבלין, שבה ויליאם הפילטון (1805–1865) היה בתחילה סטודנט ולאחר מכן חבר סגל. הפילטון הוכיח מקרה פרטי של מה שקרוי כעת משפט קיילי-הפילטון בשנת 1853.

ח וקטורים עצמיים מוכללים ואופרטורים נילפוטנטיים

מרחבי האפס של חזקות אופרטור

אנו פותחים פרק זה בחקר מרחבי האפס של חזקות אופרטור.

8.1 סדרת מרחבי אפס ההולכים וגדלים

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי

$$\{0\} = \text{null } T^0 \subseteq \text{null } T^1 \subseteq \dots \subseteq \text{null } T^k \subseteq \text{null } T^{k+1} \subseteq \dots$$

הוכחה נניח ש- k מספר שלם אי-שלילי ו- $v \in \text{null } T^k$. אזי $T^k v = 0$, מה שגורר ש- $T^{k+1} v = T(T^k v) = T(0) = 0$. לפיכך $v \in \text{null } T^{k+1}$. לכן $\text{null } T^k \subseteq \text{null } T^{k+1}$, כפי שרצינו. ■

לתוצאות דומות עבור סדרת טווחים ההולכים וקטנים, ראו תרגילים 6, 7 ו- 8.

המסקנה הבאה קובעת כי אם שני איברים רצופים בסדרה של תתי-מרחב לעיל שווים, אזי כל האיברים המופיעים בסדרה לאחר מכן שווים.

8.2 שוויון בסדרה של מרחבי אפס

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- m מספר שלם אי-שלילי כך ש- $\text{null } T^m = \text{null } T^{m+1}$.

אזי

$$\text{null } T^m = \text{null } T^{m+1} = \text{null } T^{m+2} = \text{null } T^{m+3} = \dots$$

הוכחה יהי k מספר שלם חיובי. ברצוננו להוכיח כי

$$\text{null } T^{m+k} = \text{null } T^{m+k+1}.$$

אנו כבר יודעים מ- 8.1 כי $\text{null } T^{m+k} \subseteq \text{null } T^{m+k+1}$.

להוכחת ההכלה בכיוון השני, נניח ש- $v \in \text{null } T^{m+k+1}$. אזי

$$T^{m+1}(T^k v) = T^{m+k+1} v = 0.$$

לכן

$$T^k v \in \text{null } T^{m+1} = \text{null } T^m.$$

לפיכך $T^{m+k} v = T^m(T^k v) = 0$, ומשמעות הדבר היא ש- $v \in \text{null } T^{m+k}$. מכאן נובע ש- $\text{null } T^{m+k+1} \subseteq \text{null } T^{m+k}$, ובכך הושלמה ההוכחה. ■

המסקנה לעיל מעלה את השאלה האם קיים מספר שלם אי-שלילי m כך ש- $\text{null } T^m = \text{null } T^{m+1}$. המסקנה הבאה מראה כי שוויון זה מתקיים לכל הפחות כאשר m שווה לממד המרחב הווקטורי שמעליו T פועל.

8.3 מרחבי אפס חדלים מלגדול

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ אזי

$$\text{null } T^{\dim V} = \text{null } T^{\dim V+1} = \text{null } T^{\dim V+2} = \dots$$

הוכחה כל שעלינו להוכיח הוא ש- $\text{null } T^{\dim V} = \text{null } T^{\dim V+1}$ (לפי 8.2). נניח בשלילה שהשוויון אינו מתקיים. אזי, לפי 8.1 ו- 8.2, נקבל

$$\{0\} = \text{null } T^0 \subsetneq \text{null } T^1 \subsetneq \dots \subsetneq \text{null } T^{\dim V} \subsetneq \text{null } T^{\dim V+1},$$

כאשר הסימן $\subsetneq$ משמעותו היא "מוכל אך אינו שווה ל...". בכל אחת מההכללות ממש בשרשרת לעיל, הממד גדל לכל הפחות ב-1. לפיכך $\dim \text{null } T^{\dim V+1} \geq \dim V + 1$. תוצאה בסתירה לכך שממד תת-מרחב של V אינו יכול להיות גדול יותר מ- $\dim V$. ■

אין זה נכון לקבוע כי $V = \text{null } T \oplus \text{range } T$ לכל $T \in \mathcal{L}(V)$. בכל זאת, המסקנה הבאה יכולה להוות תחליף שימושי.

8.4 V הסכום הישר של $\text{null } T^{\dim V}$ ו- $\text{range } T^{\dim V}$ נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ אזי

$$V = \text{null } T^{\dim V} \oplus \text{range } T^{\dim V}.$$

הוכחה יהי $n = \dim V$. ראשית נראה כי

$$8.5 \quad (\text{null } T^n) \cap (\text{range } T^n) = \{0\}.$$

נניח ש- $v \in (\text{null } T^n) \cap (\text{range } T^n)$. אזי $T^n v = 0$, ובנוסף, קיים $u \in V$ כך ש- $v = T^n u$. הפעלת T^n על שני אגפי המשוואה האחרונה מראה ש- $T^n v = T^{2n} u$. לכן $T^{2n} u = 0$, מה שגורר ש- $T^n u = 0$ (לפי 8.3). לפיכך $v = T^n u = 0$, ובכך הושלמה הוכחת 8.5.

כעת, 8.5 גורר ש- $\text{null } T^n + \text{range } T^n$ סכום ישר (לפי 1.46). בנוסף,

$$\dim(\text{null } T^n \oplus \text{range } T^n) = \dim \text{null } T^n + \dim \text{range } T^n = \dim V,$$

כאשר השוויון הראשון לעיל נובע מ- 3.94 והשוויון השני נובע מהמשפט היסודי של ההעתקות הליניאריות (3.21). המשוואה לעיל גוררת ש- $\text{null } T^n \oplus \text{range } T^n = V$ (ראו 2.39), כפי שרצינו. ■

לשיפור המסקנה לעיל, ראו תרגיל 19.

8.6 דוגמה: $\mathbb{F}^3 = \text{null } T^3 \oplus \text{range } T^3$ עבור $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$ נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$ מוגדר על ידי

$$T(z_1, z_2, z_3) = (4z_2, 0, 5z_3).$$

אזי $\text{null } T = \{(z_1, 0, 0) : z_1 \in \mathbb{F}\}$ ו- $\text{range } T = \{(z_1, 0, z_3) : z_1, z_3 \in \mathbb{F}\}$. לפיכך

$\text{null } T \cap \text{range } T \neq \{0\}$. לכן $\text{null } T + \text{range } T$ אינו סכום ישר. בנוסף, נשים לב כי $\text{null } T + \text{range } T \neq \mathbb{F}^3$. בכל זאת, מתקיים $T^3(z_1, z_2, z_3) = (0, 0, 125z_3)$. לפיכך אנו רואים ש-

$$\text{null } T^3 = \{(z_1, z_2, 0) : z_1, z_2 \in \mathbb{F}\} \quad \text{וגם} \quad \text{range } T^3 = \{(0, 0, z_3) : z_3 \in \mathbb{F}\}.$$

לכן $\mathbb{F}^3 = \text{null } T^3 \oplus \text{range } T^3$ כמצופה לפי 8.4.

וקטורים עצמיים מוכללים

קיימים אופרטורים שמספר הווקטורים העצמיים שלהם אינו מספיק כדי שנוכל לתאר את פעולתם באופן מלא. לפיכך בתתי-יחידה זו נציג את המושג וקטורים עצמיים מוכללים, אשר ימלא תפקיד ראשי בתיאור מבנה האופרטור.

כדי להבין מדוע אנו זקוקים ליותר מווקטורים עצמיים, הבה נבחן את שאלת תיאור האופרטור באמצעות פירוק התחום שלו לתתי-מרחב שמורים. נקבע $T \in \mathcal{L}(V)$. אנו מבקשים לתאר את T על ידי מציאת פירוק "נחמד" באמצעות סכום ישר

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n,$$

כאשר כל V_k הוא תת-מרחב שמור של V תחת T . תתי-המרחב השמורים מאפס הפשוטים ביותר האפשריים הם החד-ממדיים. פירוק כמו זה המובא לעיל שבו כל V_k הוא תת-מרחב חד-ממדי של V השמור תחת T הוא אפשרי אס-ורק-אם יש ל- V בסיס המורכב מווקטורים עצמיים של T (ראו 5.55). הדבר קורה אס-ורק-אם ניתן לפרק את V למרחבים עצמיים

$$V = E(\lambda_1, T) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_m, T), \quad 8.7$$

כאשר $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ הם הערכים העצמיים השונים של T (ראו 5.55).

משפט הפירוק הספקטרי בפרק הקודם הראה שאם V מרחב מכפלה פנימית, אזי פירוק בצורת 8.7 מתקיים לכל אופרטור הצמוד לעצמו אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ולכל אופרטור נורמלי אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. מאחר שלאופרטורים מסוגים אלו יש מספיק וקטורים עצמיים ליצירת בסיס של V (ראו 7.29 ו- 7.31).

בכל זאת, ייתכן שפירוק בצורת 8.7 לא יתקיים עבור אופרטורים כלליים יותר, אפילו מעל מרחב וקטורי מרוכב. דוגמה ניתנה על ידי האופרטור ב- 5.57, שאין לו מספיק וקטורים עצמיים כך ש- 8.7 יתקיים. וקטורים עצמיים מוכללים ומרחבים עצמיים מוכללים, שאותם נכיר כעת, יתקנו מצב זה.

8.8 הגדרה: וקטור עצמי מוכלל

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- λ הוא ערך עצמי של T . וקטור $v \in V$ נקרא וקטור עצמי מוכלל של T השייך ל- λ אם $v \neq 0$ וגם

$$(T - \lambda I)^k v = 0$$

עבור k מספר שלם חיובי כלשהו.

וקטור השונה מאפס $v \in V$ הוא וקטור עצמי מוכלל של T השייך ל- λ אס-ורק-אם

$$(T - \lambda I)^{\dim V} v = 0,$$

כפי שנובע מהפעלת 8.1 ו- 8.3 על האופרטור $T - \lambda I$.

ערכים עצמיים מוכללים אינם פוגזרים מאחר שהגדרתם לא תוביל לתובנות חדשות. סיבה: אם $(T - \lambda I)^k$ אינו חד-חד-ערכי עבור k מספר שלם חיובי כלשהו, אזי $T - \lambda I$ אינו חד-חד-ערכי, ולכן λ ערך עצמי של T .

כידוע, ייתכן שלאופרטור מעל מרחב וקטורי מרוכב לא יהיו די וקטורים עצמיים ליצירת בסיס של התחום. המסקנה הבאה מראה שמעל מרחב וקטורי מרוכב יש מספיק וקטורים עצמיים מוכללים לצורך כך.

8.9 בסיס של וקטורים עצמיים מוכללים

נניח ש- $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי קיים בסיס של V המורכב מווקטורים עצמיים מוכללים של T .

הוכחה יהי $n = \dim V$. נשתמש באינדוקציה על n . תחילה, נשים לב שהתוצאה הרצויה מתקיימת אם $n = 1$ מאחר שאז כל וקטור השונה מאפס ב- V הוא וקטור עצמי של T .

זה השלב שבו אנו משתמשים בהנחה ש- $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, מאחר שאם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אזי ייתכן של- T לא יהיו ערכים עצמיים כלל.

כעת נניח ש- $n > 1$ והתוצאה הרצויה מתקיימת לכל מרחב וקטורי שממדו קטן מ- n . יהי λ ערך עצמי של T . הפעלת 8.4 על $T - \lambda I$ מראה לנו ש-

$$V = \text{null}(T - \lambda I)^n \oplus \text{range}(T - \lambda I)^n.$$

אם $\text{null}(T - \lambda I)^n = V$, אזי כל וקטור השונה מאפס ב- V הוא וקטור עצמי מוכלל של T , ולפיכך במקרה זה קיים בסיס של V המורכב מווקטורים עצמיים מוכללים של T . לכן אנו יכולים להניח ש- $\text{null}(T - \lambda I)^n \neq V$, מה שגורר ש- $\text{range}(T - \lambda I)^n \neq \{0\}$.

בנוסף, $\text{null}(T - \lambda I)^n \neq \{0\}$, מאחר ש- λ הוא ערך עצמי של T . לפיכך מתקיים

$$0 < \dim \text{range}(T - \lambda I)^n < n.$$

יתר על כן, $\text{range}(T - \lambda I)^n$ שמור תחת T [לפי 5.18 כאשר $p(z) = (z - \lambda)^n$]. יהי $S \in \mathcal{L}(\text{range}(T - \lambda I)^n)$ שווה ל- T מצומצם ל- $\text{range}(T - \lambda I)^n$. הנחת האינדוקציה שלנו המוחלת על האופרטור S גוררת כי ישנו בסיס של $\text{range}(T - \lambda I)^n$ המורכב מווקטורים עצמיים מוכללים של S , שהם בוודאי וקטורים עצמיים מוכללים של T . צירוף בסיס זה של $\text{range}(T - \lambda I)^n$ לבסיס של $\text{null}(T - \lambda I)^n$ נותן לנו בסיס של V המורכב מווקטורים עצמיים מוכללים של T .

אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ו- $\dim V > 1$, אזי לאופרטורים מסוימים מעל V התכונה כי קיים בסיס של V המורכב מווקטורים עצמיים מוכללים של האופרטור, ואילו (בשונה ממה שקורה כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) לאופרטורים אחרים אין תכונה זו. ראו תרגיל 11 עבור תנאי הכרחי ומספיק הקובע האם לאופרטור יש תכונה זו.

8.10 דוגמה: וקטורים עצמיים מוכללים של אופרטור מעל $\mathbb{C}^3$

נגדיר $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ על ידי

$$T(z_1, z_2, z_3) = (4z_2, 0, 5z_3)$$

לכל $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$. שימוש שגרתי בהגדרת ערך עצמי מראה לנו שהערכים העצמיים של T הם 0 ו-5. יתר על כן, הווקטורים העצמיים השייכים לערך העצמי 0 הם הווקטורים השונים מאפס מהצורה $(z_1, 0, 0)$, והווקטורים העצמיים השייכים לערך העצמי 5 הם הווקטורים השונים מאפס מהצורה $(0, 0, z_3)$. לכן לאופרטור זה אין מספיק וקטורים עצמיים לפריסת תחומו $\mathbb{C}^3$.

בפעולת חישוב נמצא כי $T^3(z_1, z_2, z_3) = (0, 0, 125z_3)$. לפיכך 8.1 ו- 8.3 גוררים שהווקטורים העצמיים המוכללים של T השייכים לערך העצמי 0 הם הווקטורים השונים מאפס מהצורה $(z_1, z_2, 0)$.

בנוסף, נקבל ש- $(T - 5I)^3(z_1, z_2, z_3) = (-125z_1 + 300z_2, -125z_2, 0)$. לפיכך הווקטורים העצמיים המוכללים של T השייכים לערך העצמי 5 הם הווקטורים השונים מאפס מהצורה $(0, 0, z_3)$.

מהפסקאות לעיל אנו רואים כי כל וקטור מווקטורי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^3$ הוא וקטור עצמי מוכלל של T . לפיכך בהחלט יש ל- $\mathbb{C}^3$ בסיס המורכב מווקטורים עצמיים מוכללים של T , כפי שהובטח לנו על ידי 8.9.

אם v הוא וקטור עצמי של $T \in \mathcal{L}(V)$, אזי הערך העצמי השייך λ נקבע באופן יחיד על ידי המשוואה $Tv = \lambda v$, שאותה יכול לקיים רק $\lambda \in \mathbb{F}$ יחיד (שהרי $v \neq 0$). לעומת זאת, אם v וקטור עצמי מוכלל של T , אזי אין זה מובן מאליו שהמשוואה $(T - \lambda I)^{\dim V} v = 0$ יכולה להתקיים על ידי $\lambda \in \mathbb{F}$ יחיד. למזלנו הרב, המסקנה הבאה קובעת כי אין סיבה לדאגה בנוגע לשאלה זו.

8.11 וקטור עצמי מוכלל שייך לערך עצמי יחיד

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי כל וקטור עצמי מוכלל של T שייך לערך עצמי אחד בלבד של T .

הוכחה נניח ש- $v \in V$ וקטור עצמי מוכלל של T השייך לערכים העצמיים α ו- λ של T . יהי m המספר השלם החיובי הקטן ביותר כך ש- $(T - \alpha I)^m v = 0$. יהי $n = \dim V$. אזי

$$\begin{aligned} 0 &= (T - \lambda I)^n v \\ &= ((T - \alpha I) + (\alpha - \lambda)I)^n v \\ &= \sum_{k=0}^n b_k (\alpha - \lambda)^{n-k} (T - \alpha I)^k v, \end{aligned}$$

כאשר $b_0 = 1$ והערכים של מקדמי הבינום האחרים b_k אינם רלוונטיים. הפעלת האופרטור $(T - \alpha I)^{m-1}$ על שני אגפי המשוואה לעיל נותנת

$$0 = (\alpha - \lambda)^n (T - \alpha I)^{m-1} v.$$

מאחר ש- $(T - \alpha I)^{m-1} v \neq 0$, המשוואה לעיל גוררת ש- $\alpha = \lambda$, כפי שרצינו. ■

ראינו לעיל (5.11) כי וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים הם בלתי תלויים ליניארית. כעת נוכיח מסקנה דומה בנוגע לווקטורים עצמיים מוכללים, עם הוכחה הדומה באופן מסוים לתבנית ההוכחה של המסקנה היא.

8.12 וקטורים עצמיים מוכללים בלתי תלויים ליניארית

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי כל רשימה של וקטורים עצמיים מוכללים של T השייכים לערכים עצמיים שונים של T היא בלתי תלויה ליניארית.

הוכחה נניח שהתוצאה הרצויה אינה מתקיימת. אזי קיים מספר שלם חיובי קטן ביותר m כך שקיימת רשימה תלויה ליניארית $v_1, \dots, v_m$ של וקטורים עצמיים מוכללים של T השייכים לערכים עצמיים שונים $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ של T (שימו לב ש- $m \geq 2$ מאחר שווקטור עצמי מוכלל הוא, לפי הגדרה, שונה מאפס). לפיכך קיימים $a_1, \dots, a_m \in F$ שאף אחד מהם אינו 0 (לאור המינימליות של m), כך ש-

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0.$$

יהי $n = \dim V$. נפעיל $(T - \lambda_m I)^n$ על שני אגפי המשוואה לעיל ונקבל

$$8.13 \quad a_1 (T - \lambda_m I)^n v_1 + \dots + a_{m-1} (T - \lambda_m I)^n v_{m-1} = 0.$$

נניח ש- $k \in \{1, \dots, m-1\}$. אזי

$$(T - \lambda_m I)^n v_k \neq 0$$

אחרת v_k יהיה וקטור עצמי מוכלל של T השייך לערכים העצמיים השונים λ_k ו- λ_m , מה שיעמוד בסתירה ל- 8.11. עם זאת,

$$(T - \lambda_k I)^n ((T - \lambda_m I)^n v_k) = (T - \lambda_m I)^n ((T - \lambda_k I)^n v_k) = 0.$$

לפיכך שתי המשוואות האחרונות שהצגנו מראות כי $(T - \lambda_m I)^n v_k$ וקטור עצמי מוכלל של T השייך לערך עצמי λ_k . לכן

$$(T - \lambda_m I)^n v_1, \dots, (T - \lambda_m I)^n v_{m-1}$$

רשימה תלויה ליניארית (לפי 8.13) של $m-1$ וקטורים עצמיים מוכללים השייכים לערכים עצמיים שונים, בסתירה למינימליות של m . ועם סתירה זו השלמנו את ההוכחה. ■

אופרטורים נילפוטנטיים

8.14 הגדרה: נילפוטנטי

אופרטור נקרא נילפוטנטי אם חזקה כלשהי שלו שווה 0.

לפיכך אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ הוא נילפוטנטי אם ורק אם כל וקטור השונה מאפס ב- V הוא וקטור עצמי מוכלל של T השייך לערך העצמי 0.

8.15 דוגמה: אופרטורים נילפוטנטיים

א. האופרטור $T \in \mathcal{L}(F^4)$ המוגדר על ידי

$$T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, 0, z_1, z_2)$$

הוא נילפוטנטי מאחר ש- $T^2 = 0$.

ב. האופרטור מעל F^3 שהמטריצה שלו (ביחס לבסיס הסטנדרטי) היא

$$\begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 \\ -7 & 9 & 6 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

הוא נילפוטנטי, כפי שניתן לראות כאשר נעלה את המטריצה לעיל בחזקת שלוש ונקבל את מטריצת האפס.

ג. אופרטור הגזירה מעל $\mathcal{P}_m(\mathbf{R})$ הוא נילפוטנטי מאחר שהנגזרת ה- $(m+1)$ של כל פולינום ממעלה m לכל היותר שווה 0. שימו לב שמעל מרחב זה מממד $m+1$, עלינו להעלות את האופרטור הנילפוטנטי בחזקת $m+1$ כדי לקבל את אופרטור האפס.

ניל בלטינית משמעותה ריק או אפס; **פוטנס** בלטינית משמעותה עוצמה (חִזְקָה). לפיכך המשמעות המילולית של **נילפוטנטי** היא קיומה של חזקה שהיא אפס.

המסקנה הבאה מראה שכאשר מעלים אופרטור נילפוטנטי בחזקה, לעולם לא נזדקק להעלות בחזקה גבוהה יותר מממד המרחב. למסקנה מעט חזקה יותר, ראו תרגיל 18.

8.16 אופרטור נילפוטנטי הפועלה בחזקת פמד התחום הוא 0

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ נילפוטנטי. אזי $T^{\dim V} = 0$.

הוכחה מאחר ש- T נילפוטנטי, קיים מספר שלם חיובי k כך ש- $T^k = 0$. לפיכך $\text{null } T^k = V$. כעת, מ- 8.1 ו- 8.3 נובע ש- $\text{null } T^{\dim V} = V$. לפיכך $T^{\dim V} = 0$. ■

8.17 ערכים עצמיים של אופרטור נילפוטנטי

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$.

א. אם T נילפוטנטי, אזי 0 הוא ערך עצמי של T ואין ל- T ערכים עצמיים נוספים.

ב. אם $F = \mathbf{C}$ ו- 0 הוא הערך העצמי היחיד של T , אזי T נילפוטנטי.

הוכחה

א. להוכחת (א), נניח ש- T נילפוטנטי. לכן קיים m מספר שלם חיובי כך ש- $T^m = 0$. מכאן נובע ש- T אינו חד-חד ערכי. לפיכך 0 הוא ערך עצמי של T .

כדי להראות כי אין ל- T ערכים עצמיים נוספים, נניח ש- λ ערך עצמי של T . אזי קיים וקטור $v \in V$ השונה מאפס כך ש-

$$\lambda v = Tv.$$

הפעלה חוזרת ונשנית של T על שני אגפי משוואה זו מראה לנו כי

$$\lambda^m v = T^m v = 0.$$

לפיכך $\lambda = 0$, כפי שרצינו.

ב. נניח ש- $F = C$ ו- 0 הערך העצמי היחיד של T . לפי 5.27(ב), הפולינום המינימלי של T שווה ל- z^m עבור m מספר שלם חיובי כלשהו. לפיכך $T^m = 0$. לכן T נילפוטנטי. ■

תרגיל 23 מראה כי בסעיף (ב) של המסקנה לעיל, לא ניתן לוותר על ההנחה ש- $F = C$.

בהינתן אופרטור מעל V , אנו מעוניינים למצוא בסיס של V כך שהמטריצה של האופרטור ביחס לבסיס זה תהיה פשוטה ככל האפשר, כלומר שהמטריצה תכיל אפסים רבים. המסקנה הבאה מראה שאם T נילפוטנטי, אזי נוכל לבחור בסיס של V כך שביותר ממחצית איברי המטריצה של T ביחס לבסיס זה יהיו אפסים. בהמשך פרק זה נציג תוצאות טובות יותר מזו.

8.18 פולינום מינימלי ומטריצה משולשית עליונה של אופרטור נילפוטנטי

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי התנאים הבאים שקולים.
א. T נילפוטנטי.

ב. הפולינום המינימלי של T הוא z^m עבור m מספר שלם חיובי כלשהו.

ג. קיים בסיס של V אשר ביחס אליו המטריצה של T היא מהצורה

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

כאשר כל האיברים על האלכסון ומתחתיו שווים 0.

הוכחה נניח כי (א) מתקיים, ולכן T נילפוטנטי. לפיכך קיים n מספר שלם חיובי כך ש- $T^n = 0$. כעת 5.29 גוררת ש- z^n כפולת פולינום של הפולינום המינימלי של T . לפיכך הפולינום המינימלי של T הוא z^m עבור m מספר שלם חיובי כלשהו, ובכך הוכחנו כי (א) גורר את (ב).

כעת נניח כי (ב) מתקיים, ולכן הפולינום המינימלי של T הוא z^m עבור m מספר שלם חיובי כלשהו. מכאן נובע, לפי 5.27(א), כי 0 (שהוא השורש היחיד של z^m) הוא הערך העצמי היחיד של T . יתרה מזו, מכאן נובע, לפי 5.44, שישנו בסיס של V אשר ביחס אליו המטריצה של T משולשית עליונה. כמו כן, מכאן נובע, לפי 5.41, שכל האיברים על האלכסון של מטריצה זו הם 0 , ובכך הוכחנו כי (ב) גורר את (ג).

כעת נניח כי (ג) מתקיים. אזי 5.40 גורר ש- $T^{\dim V} = 0$. לפיכך T נילפוטנטי ובכך הוכחנו כי (ג) גורר את (א). ■

תרגילים חו

- 1 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי אם $\dim \text{null } T^4 = 8$ ו- $\dim \text{null } T^6 = 9$, אזי $\dim \text{null } T^m = 9$ לכל המספרים השלמים $m \geq 5$.
 - 2 נניח ש- $m \in \mathcal{L}(V)$, מספר שלם חיובי, $v \in V$, ו- $T^{m-1}v \neq 0$ אך $T^mv = 0$. הוכיחו כי $T^mv, T^{m-1}v, \dots, Tv, v$ בלתי תלויה ליניארית. הוכחת 8.45 עושה שימוש בתוצאה בתרגיל זה.
 - 3 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי $V = \text{null } T \oplus \text{range } T \iff \text{null } T^2 = \text{null } T$.
 - 4 נניח ש- $\lambda \in F$, $T \in \mathcal{L}(V)$, ו- m מספר שלם חיובי כך שהפולינום המינימלי של T הוא כפולת פולינום של $(z - \lambda)^m$. הוכיחו כי $\dim \text{null}(T - \lambda I)^m \geq m$.
 - 5 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- m מספר שלם חיובי. הוכיחו כי $\dim \text{null } T^m \leq m \dim \text{null } T$. רמז: תרגיל 21 ביחידה 2 יוכל לסייע בפתרון.
 - 6 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. הראו כי $V = \text{range } T^0 \supseteq \text{range } T^1 \supseteq \dots \supseteq \text{range } T^k \supseteq \text{range } T^{k+1} \supseteq \dots$.
 - 7 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- m מספר שלם אי-שלילי כך ש- $\text{range } T^m = \text{range } T^{m+1}$. הוכיחו כי $\text{range } T^k = \text{range } T^m$ לכל $k > m$.
 - 8 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי $\text{range } T^{\dim V} = \text{range } T^{\dim V+1} = \text{range } T^{\dim V+2} = \dots$.
 - 9 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- m מספר שלם אי-שלילי. הוכיחו כי $\text{null } T^m = \text{null } T^{m+1} \iff \text{range } T^m = \text{range } T^{m+1}$.
 - 10 נגדיר $T \in \mathcal{L}(C^2)$ על ידי $T(w, z) = (z, 0)$. מצאו את כל הווקטורים העצמיים המוכללים של T .
 - 11 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי קיים בסיס של V המורכב מווקטורים עצמיים מוכללים של T אם ורק אם הפולינום המינימלי של T שווה ל- $(z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_m)$ עבור $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$ כלשהם.
- נניח ש- $F = \mathbb{R}$ מאחר שהמקרה $F = \mathbb{C}$ נובע מ- 5.27 (ג) ו- 8.9.
- תרגיל זה קובע כי התנאי לקיומו של בסיס של V המורכב מווקטורים עצמיים מוכללים של T הוא זהה לתנאי לקיומו של בסיס אשר ביחס אליו יש ל- T מטריצה משולשית עליונה (ראו 5.44).
- אזהרה:** אם יש ל- T מטריצה משולשית עליונה ביחס לבסיס $v_1, \dots, v_n$ של V , אזי v_1 הוא וקטור עצמי של T אך לא נוכל לקבוע בהכרח כי $v_2, \dots, v_n$ גם הם וקטורים עצמיים מוכללים של T .

- 12** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ כך שכל וקטור השונה מאפס ב- V הוא וקטור עצמי מוכלל של T . הוכיחו כי קיים $\lambda \in F$ כך ש- $T - \lambda I$ נילפוטנטי.
- 13** נניח ש- $S, T \in \mathcal{L}(V)$ ו- ST נילפוטנטי. הוכיחו כי TS נילפוטנטי.
- 14** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ נילפוטנטי ו- $T \neq 0$. הוכיחו כי T אינו לכסי.
- 15** נניח ש- $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי T לכסי אס-זרק-אם כל וקטור עצמי מוכלל של T הוא וקטור עצמי של T .
- עבור $F = C$, תרגיל זה מוסיף שקילות נוספת לרשימת התנאים עבור לכסיות ב-
5.55
- 16** א. הביאו דוגמה של אופרטורים נילפוטנטיים S, T מעל אותו מרחב וקטורי כך שאף אחד מ- $S + T$ ו- ST אינו נילפוטנטי.
ב. נניח ש- $S, T \in \mathcal{L}(V)$ נילפוטנטיים ו- $ST = TS$. הוכיחו כי $S + T$ ו- ST נילפוטנטיים.
- 17** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ נילפוטנטי ו- m מספר שלם חיובי כך ש- $T^m = 0$.
א. הוכיחו כי $I - T$ הפיך וכי $I - T + \dots + T^{m-1} = (I - T)^{-1}$.
ב. הסבירו כיצד הייתם מנחשים את הנוסחה לעיל.
- 18** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ נילפוטנטי. הוכיחו כי $T^{1+\dim \text{range } T} = 0$.
אם $\dim \text{range } T < \dim V - 1$, אזי תרגיל זה משפר את 8.16.
- 19** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ אינו נילפוטנטי. הראו כי
$$V = \text{null } T^{\dim V - 1} \oplus \text{range } T^{\dim V - 1}.$$

עבור אופרטורים שאינם נילפוטנטיים, תרגיל זה משפר את 8.4.
- 20** נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ נורמלי ונילפוטנטי. הוכיחו כי $T = 0$.
- 21** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $\text{null } T^{\dim V} \neq \text{null } T^{\dim V - 1}$. הוכיחו כי T נילפוטנטי וכי $\dim \text{null } T^k = k$ לכל k מספר שלם, כאשר $0 \leq k \leq \dim V$.
- 22** נניח ש- $T \in \mathcal{L}(C^5)$ כך ש- $\text{range } T^4 \neq \text{range } T^5$. הוכיחו כי T נילפוטנטי.
- 23** הביאו דוגמה של אופרטור T מעל מרחב וקטורי ממשי מממד סופי כך ש- 0 הוא הערך העצמי היחיד של T אך T אינו נילפוטנטי.
- תרגיל זה מראה שסעיף (ג) ב- 8.17 אינו מתקיים ללא ההנחה ש- $F = C$.
- 24** לכל סעיף בדוגמה 8.15, מצאו בסיס של מרחב התחום כך שהמטריצה של האופרטור הנילפוטנטי ביחס לבסיס זה היא משולשית עליונה כמובטח על ידי 8.18(ג).
- 25** נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ נילפוטנטי. הראו כי ישנו בסיס אורתונורמלי של V אשר ביחס אליו המטריצה של T משולשית עליונה כמובטח על ידי 8.18(ג).

ח2 פירוק למרחבים עצמיים מוכללים

מרחבים עצמיים מוכללים

8.19 הגדרה: מרחב עצמי מוכלל, $G(\lambda, T)$

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\lambda \in F$. המרחב העצמי המוכלל של T השייך ל- λ , ומסומן על ידי $G(\lambda, T)$, מוגדר על ידי

$$G(\lambda, T) = \{v \in V : (T - \lambda I)^k v = 0, \text{ שלם חיובי כלשהו } k\}.$$

לפיכך $G(\lambda, T)$ הוא קבוצת הווקטורים העצמיים המוכללים של T השייכים ל- λ , יחד עם וקטור האפס.

מאחר שכל וקטור עצמי של T הוא וקטור עצמי מוכלל של T (הציבו $k = 1$ בהגדרה של וקטור עצמי מוכלל), כל מרחב עצמי מוכלל במרחב העצמי המוכלל המתאים. במילים אחרות, אם $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\lambda \in F$, אזי $E(\lambda, T) \subseteq G(\lambda, T)$. המסקנה הבאה גוררת שאם $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\lambda \in F$, אזי המרחב העצמי המוכלל $G(\lambda, T)$ הוא תת-מרחב של V (מאחר שמרחב האפס של כל העתקה ליניארית מעל V הוא תת-מרחב של V).

8.20 תיאור של מרחבים עצמיים מוכללים

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\lambda \in F$. אזי $G(\lambda, T) = \text{null}(T - \lambda I)^{\dim V}$.

הוכחה נניח ש- $v \in \text{null}(T - \lambda I)^{\dim V}$. מההגדרות נובע ש- $v \in G(\lambda, T)$. לפיכך $G(\lambda, T) \supseteq \text{null}(T - \lambda I)^{\dim V}$.

בכיוון ההפוך, נניח ש- $v \in G(\lambda, T)$. לפיכך קיים מספר שלם חיובי k כך ש- $v \in \text{null}(T - \lambda I)^k$ (מ- 8.1 ו- 8.3 (עם הצבת $T - \lambda I$ במקום T), נובע ש- $v \in \text{null}(T - \lambda I)^{\dim V}$. לפיכך $G(\lambda, T) \subseteq \text{null}(T - \lambda I)^{\dim V}$, ובכך הושלמה ההוכחה. ■

8.21 דוגמה: מרחבים עצמיים מוכללים של אופרטור מעל C^3

נגדיר $T \in \mathcal{L}(C^3)$ על ידי

$$T(z_1, z_2, z_3) = (4z_2, 0, 5z_3).$$

בדוגמה 8.10, ראינו שהערכים העצמיים של T הם 0 ו- 5, ומצאנו את קבוצות הווקטורים העצמיים המוכללים השייכים להם. ניקח את האיחוד של קבוצות אלו עם $\{0\}$ ונקבל

$$G(0, T) = \{(z_1, z_2, 0) : z_1, z_2 \in C\} \quad \text{וגם} \quad G(5, T) = \{(0, 0, z_3) : z_3 \in C\}.$$

שימו לב ש- $C^3 = G(0, T) \oplus G(5, T)$.

בדוגמה 8.21, מרחב התחום C^3 הוא הסכום הישר של המרחבים העצמיים המוכללים של האופרטור T בדוגמה ההיא. המסקנה הבאה מראה שתופעה זו מתקיימת באופן כללי. ליתר דיוק, המסקנה המרכזית הבאה מראה שאם $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$, אזי V הוא הסכום הישר של המרחבים העצמיים המוכללים של T , כאשר כל אחד מהם שמור תחת T ומעליו T הוא אופרטור נילפוטנטי בתוספת כפולת סקלר של אופרטור זהות. לפיכך המסקנה הבאה משיגה את מטרתנו לפירוק V לתתי-מרחב שמורים אשר מעליהם התנהגות T ידועה.

כפי שנראה, ההוכחה נובעת מצירוף מה שלמדנו על מרחבים עצמיים מוכללים ולאחר מכן שימוש במסקנה זו שלפיה לכל אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$, קיים בסיס של V המורכב מווקטורים עצמיים מוכללים של T .

8.22 פירוק למרחבים עצמיים מוכללים

נניח ש- $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ הערכים העצמיים השונים של T . אזי

א. $G(\lambda_k, T)$ שמור תחת T לכל $k = 1, \dots, m$

ב. $(T - \lambda_k I)|_{G(\lambda_k, T)}$ נילפוטנטי לכל $k = 1, \dots, m$

ג. $V = G(\lambda_1, T) \oplus \dots \oplus G(\lambda_m, T)$

הוכחה

א. נניח ש- $k \in \{1, \dots, m\}$. אזי מ- 8.20 נובע ש-

$$G(\lambda_k, T) = \text{null}(T - \lambda_k I)^{\dim V}.$$

לפיכך 5.18, עם $p(z) = (z - \lambda_k)^{\dim V}$, גורר ש- $G(\lambda_k, T)$ שמור תחת T , ובכך הוכחנו את (א).

ב. נניח ש- $k \in \{1, \dots, m\}$. אם $v \in G(\lambda_k, T)$, אזי $(T - \lambda_k I)^{\dim V} v = 0$ (לפי 8.20). לפיכך $0 = (T - \lambda_k I)^{\dim V}|_{G(\lambda_k, T)}$. לכן $(T - \lambda_k I)|_{G(\lambda_k, T)}$ נילפוטנטי, ובכך הוכחנו את (ב).

ג. כדי להראות כי $G(\lambda_1, T) + \dots + G(\lambda_m, T)$ סכום ישר, נניח ש-

$$v_1 + \dots + v_m = 0,$$

כאשר כל v_k ב- $G(\lambda_k, T)$. מאחר שווקטורים עצמיים מוכללים של T השייכים לערכים עצמיים שונים בלתי תלויים ליניארית (לפי 8.12), מכאן נובע שכל v_k שווה 0. לפיכך $G(\lambda_1, T) + \dots + G(\lambda_m, T)$ סכום ישר (לפי 1.45).

לסיום, כל וקטור ב- V ניתן לכתיבה כסכום סופי של וקטורים עצמיים מוכללים של T (לפי 8.9). לפיכך

$$V = G(\lambda_1, T) \oplus \dots \oplus G(\lambda_m, T),$$

ובכך הוכחנו את (ג).

למסקנה האנלוגית כאשר $F = R$, ראו תרגיל 8.

ריבוי של ערך עצמי

אם V מרחב וקטורי מרוכב ו- $T \in \mathcal{L}(V)$, אזי הפירוק של V הניתן על ידי הפירוק למרחבים עצמיים מוכללים (8.22) יכול לשמש ככלי רב-עוצמה. ממדי תתי-המרחב הכלולים בפירוק זה חשובים דיים לקבלת שם ייעודי, הניתן להם בהגדרה הבאה.

8.23 הגדרה: ריבוי

- נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. הריבוי של ערך עצמי λ של T מוגדר כממד של המרחב העצמי המוכלל המתאים $G(\lambda, T)$.
- במילים אחרות, הריבוי של ערך עצמי λ של T שווה ל-
 $\dim \text{null}(T - \lambda I)^{\dim V}$.

הסעיף השני בהגדרה לעיל מתקיים מאחר ש- $G(\lambda, T) = \dim \text{null}(T - \lambda I)^{\dim V}$ (ראו 8.20).

8.24 דוגמה: ריבוי של כל ערך עצמי של אופרטור

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ מוגדר על ידי

$$T(z_1, z_2, z_3) = (6z_1 + 3z_2 + 4z_3, 6z_2 + 2z_3, 7z_3).$$

המטריצה של T (ביחס לבסיס הסטנדרטי) היא

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

הערכים העצמיים של T הם איברי האלכסון 6 ו-7, כפי שנובע מ- 5.41. תוכלו לוודא כי המרחבים העצמיים המוכללים של T הם כדלהלן:

$$G(6, T) = \text{span}((1, 0, 0), (0, 1, 0)) \quad \text{וגם} \quad G(7, T) = \text{span}((10, 2, 1)).$$

בדוגמה זו, הריבוי של כל ערך עצמי שווה לפספר הפעמים שהערך העצמי מופיע על האלכסון של מטריצה משולשית עליונה הפייגות את האופרטור. התנהגות זו פתרחשת תפיד, כפי שנראה ב- 8.31.

לפיכך הריבוי של הערך העצמי 6 הוא 2 והריבוי של הערך העצמי 7 הוא 1. הסכום הישר $\mathbb{C}^3 = G(6, T) \oplus G(7, T)$ הוא הפירוק למרחבים עצמיים מוכללים כפי שהובטח על ידי 8.22. בסיס של $\mathbb{C}^3$ המורכב מווקטורים עצמיים מוכללים של T , כפי שהובטח על ידי 8.9, הוא $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(10, 2, 1)$. לא קיים בסיס של $\mathbb{C}^3$ המורכב מווקטורים עצמיים של אופרטור זה.

בדוגמה לעיל, סכום הריבויים של הערכים העצמיים של T שווה 3, שהוא ממד התחום של T . המסקנה הבאה מראה שהדבר מתקיים לכל האופרטורים מעל מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי.

8.25 סכום של הריבויים שווה ל- $\dim V$

נניח ש- $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי סכום הריבויים של כל הערכים העצמיים של T שווה ל- $\dim V$.

הוכחה התוצאה הרצויה נובעת מהפירוק למרחבים עצמיים מוכללים (8.22) ומהנוסחה עבור הממד של סכום ישר (ראו 3.94).

ישנם ספרים המשתמשים במונחים ריבוי אלגברי וריבוי גאומטרי. אם נתקלתם במונחים אלו, שימו לב כי הריבוי האלגברי הוא זהה לריבוי המוגדר כאן והריבוי הגאומטרי הוא הממד של המרחב העצמי המתאים. במילים אחרות, אם $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- λ ערך עצמי של T , אזי

$$\lambda \text{ ריבוי אלגברי של } T = \dim \text{null}(T - \lambda I)^{\dim V} = \dim G(\lambda, T),$$

$$\lambda \text{ ריבוי גאומטרי של } T = \dim \text{null}(T - \lambda I) = \dim E(\lambda, T).$$

שימו לב כי, כפי שהוגדר לעיל, לריבוי האלגברי יש בנוסף משמעות גאומטרית כממד של מרחב אפס מסוים. ההגדרה של ריבוי שניתנה כאן היא אלגנטית יותר מההגדרה המסורתית המערבת דטרמיננטות; 9.62 גורר שהגדרות אלו שקולות.

אם V מרחב מכפלה פנימית, $T \in \mathcal{L}(V)$ נורמלי, ו- λ ערך עצמי של T , אזי הריבוי האלגברי של λ שווה לריבוי הגאומטרי של λ , כפי שניתן לראות מהפעלת תרגיל 27 ביחידה 1 על האופרטור הנורמלי $T - \lambda I$. כמקרה מיוחד, הערכים הסינגולריים של $S \in \mathcal{L}(V, W)$ (כאן V ו- W שניהם מרחבי מכפלה פנימית מממד סופי) תלויים בריבויים (האלגברי או הגאומטרי) של הערכים העצמיים של האופרטור הצמוד לעצמו S^*S .

ההגדרה הבאה משייכת פולינום מתוקן לכל אופרטור מעל מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי.

8.26 הגדרה: פולינום אופייני

נניח ש- $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. נסמן ב- $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ את הערכים העצמיים השונים של T , עם הריבויים $d_1, \dots, d_m$. הפולינום

$$(z - \lambda_1)^{d_1} \dots (z - \lambda_m)^{d_m}$$

נקרא הפולינום האופייני של T .

8.27 דוגמה: הפולינום האופייני של אופרטור

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(C^3)$ מוגדר כמו בדוגמה 8.24. מאחר שהערכים העצמיים של T הם 6, עם ריבוי 2, ו-7, עם ריבוי 1, אנו רואים כי הפולינום האופייני של T הוא $(z - 6)^2(z - 7)$.

8.28 מעלה ושורשים של פולינום אופייני

- נניח ש- $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי
- מעלת הפולינום האופייני של T היא $\dim V$.
 - השורשים של הפולינום האופייני של T הם הערכים העצמיים של T .

הוכחה מסקנתנו בנוגע לסכום הריבויים (8.25) גוררת את (א). הגדרת הפולינום האופייני גוררת את (ב).

ברוב ספרי הלימוד הפולינום האופייני מוגדר תוך שימוש בדטרמיננטות (שתי ההגדרות שקולות לפי 9.62). הגישה הננקטת כאן, שהיא במידה משמעותית פשוטה יותר, מובילה אל ההוכחה הנחמדה הבאה של משפט קיילי-המילטון.

8.29 משפט קיילי-המילטון

נניח ש- $F = C$, $T \in \mathcal{L}(V)$, ו- q הפולינום האופייני של T . אזי $q(T) = 0$.

הוכחה יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ הערכים העצמיים השונים של T , ויהי $d_k = \dim G(\lambda_k, T)$ לכל $k \in \{1, \dots, m\}$, אנו יודעים כי $(T - \lambda_k I)|_{G(\lambda_k, T)}$ נילפוטנטי. לפיכך מתקיים

$$(T - \lambda_k I)^{d_k}|_{G(\lambda_k, T)} = 0 \quad \text{(לפי 8.16 לכל } k \in \{1, \dots, m\} \text{)}$$

ארתור קיילי (1821–1895) פרסם שלושה מאמרים במתמטיקה טרם סיים את התואר הראשון שלו.

הפירוק למרחבים עצמיים מוכללים

(8.22) קובע כי כל וקטור ב- V הוא סכום של וקטורים ב- $G(\lambda_1, T), \dots, G(\lambda_m, T)$. לפיכך כדי להוכיח כי $q(T) = 0$, כל שעלינו להראות הוא כי $q(T)|_{G(\lambda_k, T)} = 0$ לכל k . נקבע $k \in \{1, \dots, m\}$ ונקבל

$$q(T) = (T - \lambda_1 I)^{d_1} \dots (T - \lambda_m I)^{d_m}.$$

האופרטורים באגף הימני של המשוואה לעיל כולם קומוטטיביים, כך שאנו יכולים להזיז את הגורם $(T - \lambda_k I)^{d_k}$ כך שיהיה האיבר האחרון בביטוי באגף הימני. מאחר ש- $(T - \lambda_k I)^{d_k}|_{G(\lambda_k, T)} = 0$, מתקיים $q(T)|_{G(\lambda_k, T)} = 0$ כפי שרצינו.

המסקנה הבאה גוררת שאם מעלת הפולינום המינימלי של אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ היא $\dim V$ (כפי שקורה ברוב המקרים—ראו הפסקאות שאחרי 5.24), אזי הפולינום האופייני של T שווה לפולינום המינימלי של T .

8.30 הפולינום האופייני הוא כפולה של הפולינום המינימלי

נניח ש- $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי הפולינום האופייני של T הוא כפולת פולינום של הפולינום המינימלי של T .

הוכחה התוצאה הרצויה נובעת ישירות ממשפט קיילי-המילטון (8.29) ו- 5.29.

כעת נוכל להוכיח כי התוצאה המוצעת בדוגמה 8.24 מתקיימת לכל האופרטורים מעל מרחבים וקטוריים מרוכבים מממד סופי.

8.31 ריבוי של ערך עצמי שווה למספר המופעים על האלכסון

נניח ש- $F = \mathbb{C}$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V כך ש- $\mathcal{M}(T, (v_1, \dots, v_n))$ משולשית עליונה. אזי מספר הפעמים שכל ערך עצמי λ של T מופיע על האלכסון של $\mathcal{M}(T, (v_1, \dots, v_n))$ שווה לריבוי של λ כערך עצמי של T .

הוכחה יהי $A = \mathcal{M}(T, (v_1, \dots, v_n))$. לפיכך A מטריצה משולשית עליונה. נסמן ב- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ את איברי האלכסון של A . לפיכך לכל $k \in \{1, \dots, n\}$, נקבל

$$Tv_k = u_k + \lambda_k v_k$$

עבור $u_k \in \text{span}(v_1, \dots, v_{k-1})$ כלשהו. לכן אם $k \in \{1, \dots, n\}$ ו- $\lambda_k \neq 0$, אזי Tv_k אינו צירוף ליניארי של $Tv_1, \dots, Tv_{k-1}$. למת התלות הליניארית (2.19) כעת גוררת שהרשימה של Tv_k אלו כאשר $\lambda_k \neq 0$ בלתי תלויה ליניארית.

נסמן ב- d את מספר האינדקסים $k \in \{1, \dots, n\}$ כך ש- $\lambda_k = 0$. המסקנה בפסקה הקודמת גוררת ש-

$$\dim \text{range } T \geq n - d.$$

מאחר ש- $n = \dim V = \dim \text{null } T + \dim \text{range } T$, האי־שוויון לעיל גורר ש-

$$\dim \text{null } T \leq d. \quad 8.32$$

המטריצה של האופרטור T^n ביחס אל הבסיס $v_1, \dots, v_n$ היא מטריצה משולשית עליונה A^n , שאברי האלכסון שלה הם $\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n$ [ראו תרגיל 2 (ב) ביחידה 3]. מאחר ש- $\lambda_k^n = 0$ אם ורק אם $\lambda_k = 0$, מספר הפעמים ש- 0 מופיע על האלכסון של A^n שווה d . לפיכך הפעלת 8.32 כאשר T מוחלף ב- T^n נותנת לנו

$$\dim \text{null } T^n \leq d. \quad 8.33$$

עבור λ ערך עצמי של T , נסמן ב- m_λ את הריבוי של λ כערך עצמי של T ונסמן ב- d_λ את מספר הפעמים ש- λ מופיע על האלכסון של A . כשנחליף T ב- 8.33 ב- $T - \lambda I$ אנו רואים כי

$$m_\lambda \leq d_\lambda \quad 8.34$$

לכל ערך עצמי λ של T . סכום הריבויים m_λ של כל הערכים העצמיים λ של T שווה n , הממד של V (לפי 8.25). סכום המספרים d_λ של הערכים העצמיים λ של T גם הוא שווה n , מאחר שאורך האלכסון של A הוא n .

לפיכך סכימת שני האגפים של 8.34 מעל כל הערכים העצמיים λ של T מניבה שוויון. לכן 8.34 חייב להוות שוויון לכל ערך עצמי λ של T . לפיכך הריבוי של λ כערך עצמי של T שווה למספר הפעמים ש- λ מופיע על האלכסון של A , כפי שרצינו. ■

מטריצות בלוקים אלכסוניות

לעיתים קרובות נוכל להבין מטריצה טוב יותר בכך שנחשוב עליה כמורכבת ממטריצות קטנות יותר.

כדי להעניק פרשנות למסקנות שלנו בתבנית של מטריצה, אנו מנסחים את ההגדרה להלן, המכלילה את רעיון המטריצה האלכסונית. אם כל מטריצה A_k בהגדרה להלן היא מטריצה 1×1 , אזי מתקבלת בפועל מטריצה אלכסונית.

8.35 הגדרה: מטריצת בלוקים אלכסוניות

מטריצת בלוקים אלכסוניית היא מטריצה ריבועית מהצורה

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix},$$

כאשר $A_1, \dots, A_m$ הן מטריצות ריבועיות המוצבות לאורך האלכסון וכל שאר איברי המטריצה שווים 0.

8.36 דוגמה: מטריצת בלוקים אלכסוניית

המטריצה 5×5

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

היא מטריצת בלוקים אלכסונית עם

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & A_3 \end{pmatrix},$$

כאשר

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

במקרה שלנו, תחמנו את המטריצות הפנימיות במטריצה 5×5 לעיל בבלוקים כדי להמחיש כיצד ניתן לחשוב עליה כמטריצת בלוקים אלכסונית.

שימו לב שבדוגמה לעיל, כל אחת מהמטריצות A_1, A_2, A_3 היא מטריצה משולשית עליונה שאברי האלכסון שלה כולם שווים. המסקנה הבאה מראה שביחס לבסיס מתאים, לכל אופרטור מעל מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי יש מטריצה מצורה זו. שימו לב שכתוצאה מכך במטריצה יש יותר אפסים מאלו הנדרשים לקיומה של מטריצה משולשית עליונה.

8.37 מטריצת בלוקים אלכסונית עם בלוקי מטריצות משולשיות עליונות

נניח ש- $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ הערכים העצמיים השונים של T , עם הריבויים $d_1, \dots, d_m$. אזי קיים בסיס של V אשר ביחס אליו יש ל- T מטריצת בלוקים אלכסונית במבנה

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix},$$

כאשר כל A_k הוא מטריצה משולשית עליונה $d_k \times d_k$ במבנה

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

הוכחה כל $(T - \lambda_k I)|_{G(\lambda_k, T)}$ הוא נילפוטנטי (ראו 8.22). לכל k , נבחר בסיס של $G(\lambda_k, T)$, שהוא מרחב וקטורי מממד d_k , כך שהמטריצה של $(T - \lambda_k I)|_{G(\lambda_k, T)}$ ביחס לבסיס זה היא כמו ב- 8.18(ג). לפיכך ביחס לבסיס זה, המטריצה של $T|_{G(\lambda_k, T)}$ השווה $(T - \lambda_k I)|_{G(\lambda_k, T)} + \lambda_k I|_{G(\lambda_k, T)}$, נראית כמו הצורה הרצויה המוצגת לעיל עבור A_k . הפירוק למרחבים עצמיים מוכללים (8.22) מראה שצירוף של כל הבסיסים של ה- $G(\lambda_k, T)$ -ים שנבחרו לעיל ייתן בסיס של V . למטריצה של T ביחס לבסיס זה יש את המבנה המבוקש. ■

8.38 דוגמה: מטריצת בלוקים אלכסונית באמצעות וקטורים עצמיים מוכללים

יהי $T \in \mathcal{L}(C^3)$ מוגדר על ידי $T(z_1, z_2, z_3) = (6z_1 + 3z_2 + 4z_3, 6z_2 + 2z_3, 7z_3)$ (ביחס לבסיס הסטנדרטי) היא המטריצה של T

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

שהיא מטריצה משולשית עליונה אך אינה מהמבנה שהובטח על ידי 8.37.

כפי שראינו בדוגמה 8.24, הערכים העצמיים של T הם 6 ו-7, ובנוסף $G(6, T) = \text{span}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ וגם $G(7, T) = \text{span}((10, 2, 1))$. ראינו בנוסף כי בסיס של C^3 המורכב מווקטורים עצמיים מוכללים של T הוא $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (10, 2, 1)$.

המטריצה של T ביחס לבסיס זה היא

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & (7) \end{pmatrix},$$

שהיא מטריצת בלוקים אלכסונית כפי שהובטח על ידי 8.37.

תרגילים ח2

- 1 נגדיר $T \in \mathcal{L}(C^2)$ על ידי $T(w, z) = (-z, w)$. מצאו את המרחבים העצמיים המוכללים השייכים לערכים העצמיים השונים של T .
- 2 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ הפיך. הוכיחו כי $G(\lambda, T) = G(\frac{1}{\lambda}, T^{-1})$ לכל $\lambda \in F$ עם $\lambda \neq 0$.
- 3 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. נניח ש- $S \in \mathcal{L}(V)$ הפיך. הוכיחו כי ל- T ול- $S^{-1}TS$ יש אותם ערכים עצמיים עם אותם ריבויים.
- 4 נניח ש- $\dim V \geq 2$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $\text{null } T^{\dim V - 2} \neq \text{null } T^{\dim V - 1}$. הוכיחו כי יש ל- T שני ערכים עצמיים שונים לכל היותר.
- 5 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- 3 ו- 8 הם ערכים עצמיים של T . יהי $n = \dim V$. הוכיחו כי $V = (\text{null } T^{n-2}) \oplus (\text{range } T^{n-2})$.
- 6 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- λ ערך עצמי של T . הסבירו מדוע המעריך של $z - \lambda$ בפירוק לגורמים של הפולינום המינימלי של T הוא המספר השלם החיובי m הקטן ביותר כך ש- $(T - \lambda I)^m|_{G(\lambda, T)} = 0$.
- 7 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- λ ערך עצמי של T עם ריבוי d . הוכיחו כי $\text{null}(T - \lambda I)^d$. אם $d < \dim V$, אזי תרגיל זה משפר את 8.20.
- 8 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ הערכים העצמיים השונים של T . הוכיחו כי $V = G(\lambda_1, T) \oplus \dots \oplus G(\lambda_m, T)$
אס-זרק-אם הפולינום המינימלי של T שווה ל- $(z - \lambda_1)^{k_1} \dots (z - \lambda_m)^{k_m}$ מספרים שלמים חיוביים כלשהם. $k_1, \dots, k_m$
המקרה של $F = C$ נובע ישירות מ- 5.27 (ג) והפירוק למרחבים עצמיים מוכללים (8.22); לפיכך תרגיל זה מעניין רק כאשר $F = R$.
- 9 נניח ש- $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי קיימים $D, N \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $T = D + N$, האופרטור D לכסין, N נילפוטנטי, ו- $DN = ND$.
- 10 נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית מרוכב, $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V , ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ הערכים העצמיים של T , כאשר כל אחד נכלל מספר פעמים לפי ריבוי. הוכיחו כי $|\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2 \leq \|Te_1\|^2 + \dots + \|Te_n\|^2$.
ראו ההערה המופיעה אחרי תרגיל 5 ביחידה 1.
- 11 הביאו דוגמה של אופרטור מעל C^4 שהפולינום האופייני שלו שווה $(z-7)^2(z-8)^2$.

12 הביאו דוגמה של אופרטור מעל C^4 שהפולינום האופייני שלו שווה $(z-1)(z-5)^3$ והפולינום המינימלי שלו שווה $(z-1)(z-5)^2$.

13 הביאו דוגמה של אופרטור מעל C^4 שהפולינומים האופייני והמינימלי שלו שניהם שווים $z(z-1)^2(z-3)$.

14 הביאו דוגמה של אופרטור מעל C^4 שהפולינום האופייני שלו שווה $z(z-1)^2(z-3)$ והפולינום המינימלי שלו שווה $z(z-1)(z-3)$.

15 יהי T האופרטור מעל C^4 המוגדר על ידי $T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, z_1, z_2, z_3)$. מצאו את הפולינום האופייני והפולינום המינימלי של T .

16 יהי T האופרטור מעל C^6 המוגדר על ידי $T(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = (0, z_1, z_2, 0, z_4, 0)$. מצאו את הפולינום האופייני והפולינום המינימלי של T .

17 נניח ש- $F = C$ ו- $P \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $P^2 = P$. הוכיחו כי הפולינום האופייני של P הוא $z^m(z-1)^n$, כאשר $m = \dim \text{null } P$ ו- $n = \dim \text{range } P$.

18 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- λ ערך עצמי של T . הסבירו מדוע ארבעת המספרים הבאים שווים.

- א. המעריך של $z - \lambda$ בפירוק לגורמים של הפולינום המינימלי של T .
- ב. המספר השלם החיובי m הקטן ביותר כך ש- $(T - \lambda I)^m|_{G(\lambda, T)} = 0$.
- ג. המספר השלם החיובי m הקטן ביותר כך ש- $\text{null}(T - \lambda I)^m = \text{null}(T - \lambda I)^{m+1}$.
- ד. המספר השלם החיובי m הקטן ביותר כך ש- $\text{range}(T - \lambda I)^m = \text{range}(T - \lambda I)^{m+1}$.

19 נניח ש- $F = C$ ו- $S \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור אוניטרי. הוכיחו כי הערך המוחלט של האיבר הקבוע בפולינום האופייני של S הוא 1.

20 נניח ש- $F = C$ ו- $V_1, \dots, V_m$ תתי-מרחב השונים מאפס של V כך ש- $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$.

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ וכל V_k שמור תחת T . לכל k , נסמן ב- p_k את הפולינום האופייני של $T|_{V_k}$. הוכיחו כי הפולינום האופייני של T שווה ל- $p_1 \cdots p_m$.

21 נניח ש- $p, q \in \mathcal{P}(C)$ פולינומים מתוקנים עם אותם שורשים ו- q כפולת פולינום של p . הוכיחו כי קיים $T \in \mathcal{L}(C^{\deg q})$ כך שהפולינום האופייני של T הוא q והפולינום המינימלי של T הוא p .

פתרגיל זה נובע שכל פולינום מתוקן הוא פולינום אופייני של אופרטור כלשהו.

22 נניח ש- A ו- B מטריצות בלוקים אלכסוניות מהמבנה

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_m \end{pmatrix},$$

כאשר A_k ו- B_k מטריצות ריבועיות מאותו הגודל לכל $k = 1, \dots, m$. הראו כי AB היא מטריצת בלוקים אלכסונית במבנה

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m B_m \end{pmatrix}.$$

23 נניח ש- $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\lambda \in \mathbf{C}$.

- הראו כי $u + iv \in G(\lambda, T_C)$ אם ורק אם $u - iv \in G(\bar{\lambda}, T_C)$.
- הראו כי הריבוי של λ כערך עצמי של T_C שווה לריבוי של $\bar{\lambda}$ כערך עצמי של T_C .
- השתמשו ב- (ב) ובמסקנה לגבי הסכום של הריבויים (8.25) כדי להראות כי אם $\dim V$ מספר אי-זוגי, אזי יש ל- T_C ערך עצמי ממשי.
- השתמשו ב- (ג) ובמסקנה לגבי ערכים עצמיים ממשיים של T_C (תרגיל 17 ביחידה 1ה) כדי להראות כי אם $\dim V$ מספר אי-זוגי, אזי יש ל- T ערך עצמי (לפיכך זו תהיה הוכחה חלופית של 5.34).

ראו תרגיל 33 ביחידה 2ג עבור ההגדרה של המירכוך T_C .

ח3 מסקנות מהפירוק למרחבים עצמיים מוכללים

שורשים ריבועיים של אופרטורים

נזכיר כי שורש ריבועי של אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ הוא אופרטור $R \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $R^2 = T$ (ראו 7.36). לכל מספר מרוכב יש שורש ריבועי, אך לא לכל אופרטור מעל מרחב וקטורי מרוכב יש שורש ריבועי. לדוגמה, לאופרטור מעל $\mathbb{C}^3$ המוגדר על ידי $T(z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_3, 0)$ אין שורש ריבועי, כפי שנדרשתם להראות בתרגיל 1. האי-הפיכות של אופרטור זה אינה מקרית, כפי שנראה בקרוב. אנו פותחים בכך שנראה כי לאופרטור הזהות בתוספת כל אופרטור נילפוטנטי יש שורש ריבועי.

8.39 לָאָהוּת בתוספת נילפוטנטי יש שורש ריבועי

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ נילפוטנטי. אזי ל- $I + T$ יש שורש ריבועי.

הוכחה נתבונן בטור טיילור עבור הפונקציה $\sqrt{1+x}$:

8.40

$$\sqrt{1+x} = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

מאחר ש- $a_1 = \frac{1}{2}$, הנוסחה לעיל גוררת ש- $1 + \frac{x}{2}$ הוא הערכה טובה עבור $\sqrt{1+x}$ כאשר x קטן.

איננו מוצאים נוסחה מפורשת למקדמים או מוטרדים מהשאלה האם הסכום האינסופי מתכנס מאחר שאנו משתמשים במשוואה זו רק כמוטיבציה.

מאחר ש- T נילפוטנטי, $T^m = 0$ עבור

m מספר שלם חיובי כלשהו. ב-8.40, נניח שאנו מחליפים את x ב- T ואת 1 ב- I . אזי הסכום האינסופי באגף הימני הופך לסכום סופי (מאחר ש- $T^k = 0$ לכל $k \geq m$). לפיכך אנו מנחשים שקיים שורש ריבועי של $I + T$ מהצורה

$$I + a_1T + a_2T^2 + \dots + a_{m-1}T^{m-1}.$$

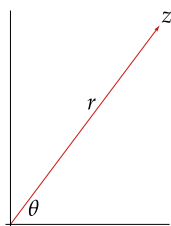
אחרי שניחשנו זאת, נוכל לנסות לבחור $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ כך שריבוע האופרטור לעיל שווה ל- $I + T$. כעת

$$(I + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + \dots + a_{m-1}T^{m-1})^2$$

$$= I + 2a_1T + (2a_2 + a_1^2)T^2 + (2a_3 + 2a_1a_2)T^3 + \dots + (2a_{m-1} + a_1, \dots, a_{m-2})T^{m-1}.$$

אנו רוצים שהאגף הימני של המשוואה לעיל יהיה שווה ל- $I + T$. לכן נבחר a_1 כך ש- $2a_1 = 1$ (לפיכך $a_1 = 1/2$). בשלב הבא, נבחר a_2 כך ש- $2a_2 + a_1^2 = 0$ (לפיכך $a_2 = -1/8$). לאחר מכן נבחר a_3 כך שהמקדם של T^3 באגף הימני של המשוואה לעיל שווה 0 (לפיכך $a_3 = 1/16$). נמשיך בדרך זו עבור כל $k = 4, \dots, m-1$, בכל שלב נפתור עבור a_k כך שהמקדם של T^k באגף הימני של המשוואה לעיל שווה 0. למעשה, אין לנו עניין בנוסחה מפורשת עבור ה- a_k 'ים. כל מה שאנו מבקשים לדעת הוא כי בחירה כלשהי של ה- a_k 'ים מספקת שורש ריבועי של $I + T$. ■

הלמה הקודמת מתקיימת מעל מרחבים וקטוריים ממשיים ומרוכבים. עם זאת, המסקנה להלן מתקיימת רק מעל מרחבים וקטוריים מרוכבים. לדוגמה, לאופרטור של כפל ב-1 מעל המרחב הווקטורי הממשי החד-ממדי $\mathbb{R}$ אין שורש ריבועי.



עבור ההוכחה להלן, עלינו לדעת כי לכל $z \in \mathbb{C}$ יש שורש ריבועי ב- $\mathbb{C}$. כדי להראות זאת, נכתוב

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

כאשר r הוא אורכו של הקטע הישר במישור המרוכב מראשית הצירים אל z ו- θ היא הזווית של אותו קטע ישר עם הציר האופקי החיובי. אזי

הצגה קוטבית של מספר מרוכב.

$$\sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

הוא שורש ריבועי של z , כפי שתוכלו לוודא בכך שתראו כי הריבוע של מספר מרוכב זה שווה ל- z .

8.41 מעל $\mathbb{C}$, לאופרטורים הפיכים יש שורשים ריבועיים

נניח ש- V מרחב וקטורי מרוכב ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ הפיך. אזי יש ל- T שורש ריבועי.

הוכחה יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ הערכים העצמיים השונים של T . לכל k , קיים אופרטור נילפוטנטי $T_k \in \mathcal{L}(G(\lambda_k, T))$ כך ש- $T|_{G(\lambda_k, T)} = \lambda_k I + T_k$ [ראו 8.22(ב)]. מאחר ש- T הפיך, כל ה- λ_k ים שונים מ-0, לכן נוכל לכתוב

$$T|_{G(\lambda_k, T)} = \lambda_k \left(I + \frac{T_k}{\lambda_k} \right)$$

לכל k . מאחר ש- T_k/λ_k נילפוטנטי, יש ל- $I + T_k/\lambda_k$ שורש ריבועי (לפי 8.39). כשנכפיל שורש ריבועי של המספר המרוכב λ_k בשורש ריבועי של $I + T_k/\lambda_k$, נקבל שורש ריבועי של R_k של $T|_{G(\lambda_k, T)}$.

לפי הפירוק למרחבים עצמיים מוכללים (8.22), וקטור טיפוס $v \in V$ ניתן לכתובה באופן יחיד בצורה

$$v = u_1 + \dots + u_m,$$

כאשר כל u_k הוא ב- $G(\lambda_k, T)$. בשימוש בפירוק זה, נגדיר אופרטור $R \in \mathcal{L}(V)$ על ידי

$$Rv = R_1 u_1 + \dots + R_m u_m.$$

עליכם לוודא כי אופרטור R זה הוא שורש ריבועי של T , ובכך הושלמה ההוכחה. ■

באמצעות חיקוי הטכניקות בתת-יחידה זו של הפרק, ביכולתכם להוכיח כי אם V מרחב וקטורי מרוכב ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ הפיך, אזי יש ל- T שורש k^{th} לכל k מספר שלם חיובי.

צורת ז'ורדן

אנו יודעים כי אם V הוא מרחב וקטורי מרוכב, אזי לכל $T \in \mathcal{L}(V)$ קיים בסיס של V אשר ביחס אליו יש ל- T מטריצה משולשית עליונה נחמדה (ראו 8.37). בתתי-יחידה זו של הפרק נראה שאנו יכולים לעשות אף טוב יותר—קיים בסיס של V אשר ביחס אליו המטריצה של T מכילה אפסים בכל מקום מלבד אולי על האלכסון הראשי ולאורך הקו שמעליו. נפתח באמצעות התבוננות בשתי דוגמאות של אופרטורים נילפוטנטיים.

8.42 דוגמה: אופרטור נילפוטנטי עם מטריצה נחמדה

יהי T האופרטור מעל $\mathbb{C}^4$ המוגדר על ידי

$$T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, z_1, z_2, z_3).$$

אזי $T^4 = 0$; לפיכך T נילפוטנטי. אם $v = (1, 0, 0, 0)$, אזי T^3v, T^2v, Tv, v בסיס של $\mathbb{C}^4$. המטריצה של T ביחס לבסיס זה היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

התנהגות האופרטור הנילפוטנטי בדוגמה הבאה מורכבת יותר מזו שבדוגמה לעיל.

8.43 דוגמה: אופרטור נילפוטנטי עם מטריצה מעט יותר מורכבת

יהי T האופרטור מעל $\mathbb{C}^6$ המוגדר על ידי

$$T(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = (0, z_1, z_2, 0, z_4, 0).$$

אזי $T^3 = 0$; לפיכך T נילפוטנטי. בניגוד להתנהגותו הנחמדה של האופרטור הנילפוטנטי מהדוגמה הקודמת, לא קיים עבור אופרטור נילפוטנטי זה וקטור $v \in \mathbb{C}^6$ כך ש- $v_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, עם זאת, אם ניקח, $v_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ ו- $v_2 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$ אזי $T^2v_1, Tv_1, v_1, Tv_2, v_2, v_3$ בסיס של $\mathbb{C}^6$. המטריצה של T ביחס לבסיס זה היא

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

המטריצות הפנימיות כאן סומנו כבלוקים כדי להראות כי נוכל לחשוב על המטריצה 6×6 לעיל כמטריצת בלוקים אלכסונית המורכבת מבלוק 3×3 עם 1-ים על הקו מעל האלכסון ואפסים בשאר האיברים, בלוק 2×2 עם 1 מעל האלכסון ואפסים בשאר האיברים, ובלוק 1×1 המכיל 0.

מטרתנו הבאה היא להראות כי כל אופרטור נילפוטנטי $T \in \mathcal{L}(V)$ מתנהג באופן דומה לאופרטור בדוגמה לעיל. ליתר דיוק, קיים אוסף סופי של וקטורים $v_1, \dots, v_n \in V$ כך שקיים בסיס של V המורכב מהווקטורים מהצורה $T^j v_k$, כאשר k משתנה מ-1 ל- n ו- j משתנה (בסדר הפוך) מ-0 למספר השלם האי-שלילי m_k הגדול ביותר כך ש- $T^{m_k} v_k \neq 0$. ביחס לבסיס זה, המטריצה של T נראית כמו המטריצה בדוגמה לעיל. ביתר פירוט, יש ל- T מטריצת בלוקים אלכסונית ביחס לבסיס זה, כאשר כל בלוק הוא מטריצה ריבועית עם 0 בכל מקום מלבד על הקו מעל האלכסון.

בהגדרה הבאה, באלכסון של כל A_k משובץ λ_k ערך עצמי כלשהו של T , הקו שמיד מעל האלכסון של A_k מלא ב-1ים, וכל שאר האיברים של A_k הם 0 (להבין מדוע כל λ_k הוא ערך עצמי של T , ראו 5.41). ה- λ_k ים לא חייבים להיות שונים. בנוסף, ייתכן ש- A_k היא מטריצה 1×1 המכילה רק (λ_k) שהוא ערך עצמי של T . אם כל λ_k הוא 0, אזי ההגדרה הבאה לוכדת את ההתנהגות שתוארה בפסקה לעיל (נזכיר כי אם T נילפוטנטי, אזי 0 הוא הערך העצמי היחיד של T).

8.44 הגדרה: בסיס ז'ורדן

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. בסיס של V נקרא בסיס ז'ורדן עבור T אם ביחס לבסיס זה יש ל- T מטריצת בלוקים אלכסונית

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}$$

כאשר כל A_k היא מטריצה משולשית עליונה מהמבנה

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

רוב מלאכת ההוכחה לכך שלכל אופרטור מעל מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי יש בסיס ז'ורדן מתבצעת במהלך הוכחת המקרה הפרטי להלן של אופרטורים נילפוטנטיים. מקרה פרטי זה מתקיים מעל מרחבים וקטוריים ממשיים ומרוכבים.

8.45 לכל אופרטור נילפוטנטי יש בסיס ז'ורדן

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ נילפוטנטי. אזי קיים בסיס של V שהוא בסיס ז'ורדן עבור T .

הוכחה אנו נוכיח מסקנה זו באמצעות אינדוקציה על $\dim V$. בתחילה, נשים לב שהתוצאה הרצויה מתקיימת אם $\dim V = 1$ (מאחר שבמקרה זה, האופרטור הנילפוטנטי היחיד הוא אופרטור האפס). כעת נניח ש- $\dim V > 1$ וכי התוצאה הרצויה מתקיימת מעל כל המרחבים הווקטוריים מממד קטן יותר.

יהי m המספר השלם החיובי הקטן ביותר כך ש- $T^m = 0$. לפיכך קיים $u \in V$ כך ש- $T^{m-1}u \neq 0$. יהי

$$U = \text{span}(u, Tu, \dots, T^{m-1}u).$$

הרשימה $u, Tu, \dots, T^{m-1}u$ בלתי תלויה ליניארית (ראו תרגיל 2 ביחידה 1ח). אם $U = V$, אזי כתיבת רשימה זו בסדר הפוך נותנת לנו בסיס ז'ורדן עבור T וסיימנו. לפיכך אנו יכולים להניח ש- $U \neq V$.

שימו לב ש- U שמור תחת T . באמצעות הנחת האינדוקציה, קיים בסיס של U שהוא בסיס ז'ורדן עבור $T|_U$. אסטרטגיית ההוכחה שלנו היא למצוא תת-מרחב W של V כך שגם W שמור תחת T ו- $V = U \oplus W$. שוב, באמצעות הנחת האינדוקציה, יהיה בסיס של W שהוא בסיס ז'ורדן עבור $T|_W$. צירופם יחד של בסיסי ז'ורדן של $T|_U$ ושל $T|_W$ יעניק לנו בסיס ז'ורדן עבור T .

יהי $\varphi \in V'$ כך ש- $\varphi(T^{m-1}u) \neq 0$. יהי

$$W = \{v \in V : \varphi(T^k v) = 0 \text{ לכל } k = 0, \dots, m-1\}.$$

אזי W תת-מרחב של V (השימור מתקיים מאחר שאם $v \in W$ אזי $\varphi(T^k(Tv)) = 0$ עבור $k = 0, \dots, m-1$, כאשר המקרה של $k = m-1$ מתקיים מאחר ש- $T^m = 0$). אנו נראה כי $V = U \oplus W$, מהלך שעל פי הפסקה לעיל ישלים את ההוכחה.

כדי להראות כי $U + W$ סכום ישר, נניח ש- $v \in U \cap W$ עם $v \neq 0$. מאחר ש- $v \in U$, קיימים $c_0, \dots, c_{m-1} \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$v = c_0 u + c_1 Tu + \dots + c_{m-1} T^{m-1}u.$$

יהי j האינדקס הנמוך ביותר כך ש- $c_j \neq 0$. נפעיל את T^{m-j-1} על שני אגפי המשוואה לעיל ונקבל

$$T^{m-j-1}v = c_j T^{m-1}u,$$

כאשר השתמשנו במשוואה $T^m = 0$. כעת נפעיל את φ על שני אגפי המשוואה לעיל ונקבל

$$\varphi(T^{m-j-1}v) = c_j \varphi(T^{m-1}u) \neq 0.$$

המשוואה לעיל מראה ש- $v \notin W$. לכן הוכחנו כי $U \cap W = \{0\}$, מה שגורר ש- $U + W$ סכום ישר (ראו 1.46).

כדי להראות כי $U \oplus W = V$, נגדיר $S: V \rightarrow \mathbb{F}^m$ על ידי

$$Sv = (\varphi(v), \varphi(Tv), \dots, \varphi(T^{m-1}v)).$$

לפיכך $\text{null } S = W$. לכן

$$\dim W = \dim \text{null } S = \dim V - \dim \text{range } S \geq \dim V - m,$$

כאשר השוויון השני נובע מהמשפט היסודי של ההעתקות הליניאריות (3.21). בשימוש באי-שוויון לעיל, נקבל

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W \geq m + (\dim V - m) = \dim V.$$

לפיכך $U \oplus W = V$ (לפי 2.39), ובכך הושלמה ההוכחה. ■

קאמי ז'ורדן (1838–1922) פרסם הוכחה של 8.46 בשנת 1870.

כעת הפירוק למרחבים עצמיים מוכללים מאפשר לנו להרחיב את המסקנה הקודמת לאופרטורים שניתן שאינם נילפוטנטיים. למשימה זו נידרש לעסוק במרחבים וקטוריים מרוכבים.

8.46 צורת ז'ורדן

נניח ש- $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי ישנו בסיס של V שהוא בסיס ז'ורדן עבור T .

הוכחה יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ הערכים העצמיים השונים של T . הפירוק למרחבים עצמיים מוכללים קובע כי

$$V = G(\lambda_1, T) \oplus \dots \oplus G(\lambda_m, T),$$

כאשר כל $(T - \lambda_k I)|_{G(\lambda_k, T)}$ נילפוטנטי (ראו 8.22). לפיכך 8.45 גורר שבסיס כלשהו של כל $G(\lambda_k, T)$ הוא בסיס ז'ורדן עבור $(T - \lambda_k I)|_{G(\lambda_k, T)}$. צירוף בסיסים אלו יחדיו ייתן לנו בסיס של V שהוא בסיס ז'ורדן עבור T . ■

תרגילים ח3

- נניח ש- $T \in \mathcal{L}(C^3)$ הוא האופרטור המוגדר על ידי $T(z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_3, 0)$. הוכיחו כי אין ל- T שורש ריבועי.
- נגדיר $T \in \mathcal{L}(F^5)$ על ידי $T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2x_2, 3x_3, -x_4, 4x_5, 0)$.
א. הראו כי T נילפוטנטי.
ב. מצאו שורש ריבועי של $I + T$.
- נניח ש- V מרחב וקטורי מרוכב. הוכיחו כי לכל אופרטור הפיך מעל V יש שורש שלישי.
- נניח ש- V מרחב וקטורי ממשי. הוכיחו כי לאופרטור $-I$ מעל V יש שורש ריבועי אם ורק אם $\dim V$ מספר זוגי.
- נניח ש- $T \in \mathcal{L}(C^2)$ הוא האופרטור המוגדר על ידי $T(w, z) = (-w - z, 9w + 5z)$. מצאו בסיס ז'ורדן עבור T .
- מצאו בסיס של $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ שהוא בסיס ז'ורדן עבור אופרטור הגזירה D מעל $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ המוגדר על ידי $Dp = p'$.
- נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ נילפוטנטי ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס ז'ורדן עבור T . הוכיחו כי הפולינום המינימלי של T הוא z^{m+1} , כאשר m הוא אורכה של המחרוזת הארוכה ביותר של 1-ים רצופים המופיעים על הקו שמעל האלכסון במטריצה של T ביחס $v_1, \dots, v_n$.
- נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V שהוא בסיס ז'ורדן עבור T . תארו את המטריצה של T^2 ביחס לבסיס זה.

- 9 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ נילפוטנטי. הסבירו מדוע קיימים $v_1, \dots, v_n \in V$ ומספרים שלמים אי-שליליים $m_1, \dots, m_n$ כך ש- (א) ו- (ב) להלן שניהם מתקיימים.
 א. $T^{m_1}v_1, \dots, Tv_1, v_1, \dots, T^{m_n}v_n, \dots, Tv_n, v_n$ בסיס של V .
 ב. $T^{m_1+1}v_1 = \dots = T^{m_n+1}v_n = 0$.
- 10 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V שהוא בסיס ז'ורדן עבור T . תארו את המטריצה של T ביחס לבסיס $v_n, \dots, v_1$ המושג באמצעות היפוך הסדר של ה- v -ים.
- 11 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. הסבירו מדוע כל וקטור בכל בסיס ז'ורדן עבור T הוא וקטור עצמי מוכלל של T .
- 12 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ לכסי. הראו כי $\mathcal{M}(T)$ מטריצה אלכסונית ביחס לכל בסיס ז'ורדן עבור T .
- 13 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ נילפוטנטי. הוכיחו כי אם $v_1, \dots, v_n$ וקטורים ב- V ו- $m_1, \dots, m_n$ מספרים שלמים אי-שליליים כך ש-
 $T^{m_1}v_1, \dots, Tv_1, v_1, \dots, T^{m_n}v_n, \dots, Tv_n, v_n$
 בסיס של V , וגם
 $T^{m_1+1}v_1 = \dots = T^{m_n+1}v_n = 0$,
 אזי $T^{m_1}v_1, \dots, T^{m_n}v_n$ בסיס של $\text{null } T$.
 תרגיל זה מראה כי $\dim \text{null } T = n$. לפיכך המספר השלם החיובי n המופיע לעיל תלוי רק ב- T ולא בבסיס ז'ורדן ספציפי שנבחר עבור T .
- 14 נניח ש- $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי לא קיים פירוק סכום ישר של V לשני תתי-מרחב השונים מאפס השמורים תחת T אס-ורק-אם הפולינום המינימלי של T הוא מהצורה $(z - \lambda)^{\dim V}$ עבור $\lambda \in \mathbb{C}$ כלשהו.

4ח עקבה: הקשר בין מטריצות ואופרטורים

אנו פותחים יחידה זו בהגדרת העקבה של מטריצה ריבועית. אחרי שנפתח מספר תכונות של עקבת מטריצה ריבועית, נשתמש ברעיון זה כדי להגדיר עקבה של אופרטור.

8.47 הגדרה: עקבת מטריצה

נניח ש- A מטריצה ריבועית עם איברים ב- F . העקבה של A , המסומנת $\text{tr} A$, מוגדרת כסכום איברי האלכסון של A .

8.48 דוגמה: עקבה של מטריצה 3×3

נניח ש-

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

איברי האלכסון של A , המוצגים באדום לעיל, הם 3, 2 ו-0. לפיכך $\text{tr} A = 3+2+0 = 5$.

כפל מטריצות אינו קומוטטיבי, אך המסקנה הבאה מראה שהסדר של כפל מטריצות אינו משפיע על העקבה.

8.49 עקבה של AB שווה לעקבה של BA

נניח ש- A מטריצה $m \times n$ ו- B מטריצה $n \times m$. אזי

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

הוכחה נניח ש-

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n,1} & \cdots & B_{n,m} \end{pmatrix}.$$

האיבר ה- j^{th} על האלכסון של המטריצה AB , שהיא מטריצה $m \times m$, שווה ל- $\sum_{k=1}^n A_{j,k} B_{k,j}$. לפיכך

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n A_{j,k} B_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m B_{k,j} A_{j,k} \\ &= \sum_{k=1}^n (\text{האיבר ה- } k^{\text{th}} \text{ על אלכסון } BA \text{ מטריצה } n \times n) \\ &= \text{tr}(BA), \end{aligned}$$

כפי שרצינו.

ברצוננו להגדיר את עקבת האופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ כעקבת המטריצה של T ביחס לבסיס כלשהו של V . עם זאת, הגדרה זו צריכה להיות בלתי תלויה בבסיס הנבחר. המסקנה הבאה מאפשרת לנו להשיג זאת.

8.50 עקבת מטריצה של אופרטור אינה תלויה בבסיס

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. נניח ש- $u_1, \dots, u_n$ ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיסים של V . אזי

$$\operatorname{tr} \mathcal{M}(T, (u_1, \dots, u_n)) = \operatorname{tr} \mathcal{M}(T, (v_1, \dots, v_n)).$$

הוכחה יהיו $A = \mathcal{M}(T, (u_1, \dots, u_n))$ ו- $B = \mathcal{M}(T, (v_1, \dots, v_n))$. הנוסחה לשינוי בסיס אומרת לנו שקיימת C מטריצה $n \times n$ הפיכה כך ש- $A = C^{-1}BC$ (ראו 3.84). לפיכך

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A &= \operatorname{tr}((C^{-1}B)C) \\ &= \operatorname{tr}(C(C^{-1}B)) \\ &= \operatorname{tr}((CC^{-1})B) \\ &= \operatorname{tr} B, \end{aligned}$$

כאשר השורה השנייה נובעת מ- 8.49.

לאור 8.50, ההגדרה הבאה כעת הגיונית.

8.51 הגדרה: עקבת אופרטור

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. העקבה של T , המסומנת ב- $\operatorname{tr} T$, מוגדרת על ידי

$$\operatorname{tr} T = \operatorname{tr} \mathcal{M}(T, (v_1, \dots, v_n)),$$

כאשר $v_1, \dots, v_n$ הוא בסיס כלשהו של V .

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- λ ערך עצמי של T . ניזכר כי הגדרנו את הריבוי של λ כממד של המרחב העצמי המוכלל $G(\lambda, T)$ (ראו 8.23); הוכחנו כי ריבוי זה שווה ל- $\dim \operatorname{null}(T - \lambda I)^{\dim V}$ (ראו 8.20). נזכיר בנוסף כי אם V מרחב וקטורי מרוכב, אזי סכום הריבויים של כל הערכים העצמיים של T שווה ל- $\dim V$ (ראו 8.25).

במסקנה להלן, הסכום של הערכים העצמיים "כאשר מספר המופעים של כל ערך עצמי שווה לריבוי" משמעותו היא שאם $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ הם הערכים העצמיים השונים של T עם הריבויים $d_1, \dots, d_m$, אזי הסכום הוא

$$d_1 \lambda_1 + \dots + d_m \lambda_m.$$

לחילופין, אם נעדיף לעבוד עם רשימה של ערכים עצמיים שאינם בהכרח שונים, כאשר מספר המופעים של כל ערך עצמי שווה לריבוי, אזי נוכל לסמן את הערכים העצמיים על ידי $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (כאשר n שווה ל- $\dim V$) והסכום הוא

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

8.52 מעל מרחבים וקטוריים מרוכבים, העקבה שווה לסכום הערכים העצמיים

נניח ש- $F = \mathbb{C}$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי $\text{tr } T$ שווה לסכום הערכים העצמיים של T , כאשר מספר המופעים של כל ערך עצמי שווה לריבוי.

הוכחה קיים בסיס של V אשר ביחס אליו יש ל- T מטריצה משולשית עליונה כאשר איברי אלכסון המטריצה מורכבים מהערכים העצמיים של T , כאשר מספר המופעים של כל ערך עצמי שווה לריבוי—ראו 8.37. לפיכך ההגדרה של עקבת אופרטור יחד עם 8.50, המאפשרת לנו להשתמש בבסיס לפי בחירה, גוררת ש- $\text{tr } T$ שווה לסכום הערכים העצמיים של T , כאשר מספר המופעים של כל ערך עצמי שווה לריבוי. ■

8.53 דוגמה: עקבת אופרטור מעל $\mathbb{C}^3$

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ מוגדר על ידי

$$T(z_1, z_2, z_3) = (3z_1 - z_2 - 2z_3, 3z_1 + 2z_2 - 3z_3, z_1 + 2z_2).$$

אזי המטריצה של T ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^3$ היא

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

חיבור איברי האלכסון של מטריצה זו מראה לנו כי $\text{tr } T = 5$.

הערכים העצמיים של T הם $2 + 3i$, $1 - 3i$, כל אחד עם ריבוי 1, כפי שתוכלו לוודא. הסכום של ערכים עצמיים אלו, כאשר מספר המופעים של כל ערך עצמי שווה לריבוי, הוא $1 + (2 + 3i) + (2 - 3i) = 5$, השווה לפי 8.52. כמצופה לפי 8.52.

לעקבה יש קשר הדוק עם הפולינום האופייני. נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$, $F = \mathbb{C}$, ו- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ הערכים העצמיים של T , כאשר מספר המופעים של כל ערך עצמי שווה לריבוי. אזי לפי ההגדרה (ראו 8.26), הפולינום האופייני של T שווה ל-

$$(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n).$$

בפתיחת סוגריים של הפולינום לעיל, נוכל לכתוב את הפולינום האופייני של T באופן הבא

$$z^n - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)z^{n-1} + \cdots + (-1)^n(\lambda_1 \cdots \lambda_n).$$

ביטוי זה המובא לעיל מוביל באופן ישיר למסקנה הבאה. בנוסף, ראו מסקנה 9.65, שאינה דורשת את ההנחה כי $F = \mathbb{C}$.

8.54 עקבה ופולינום אופייני

נניח ש- $F = \mathbb{C}$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. יהי $n = \dim V$. אזי $\text{tr } T$ שווה לנגדי של המקדם של z^{n-1} בפולינום האופייני של T .

המסקנה הבאה מספקת נוסחה נחמדה עבור עקבת האופרטור מעל מרחב מכפלה פנימית.

8.55 עקבה מעל מרחב מכפלה פנימית

נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית, $T \in \mathcal{L}(V)$, ו- $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V . אזי

$$\operatorname{tr} T = \langle Te_1, e_1 \rangle + \dots + \langle Te_n, e_n \rangle.$$

הוכחה הנוסחה המבוקשת נובעת מההבחנה כי האיבר בשורה k , עמודה k של $\mathcal{M}(T, (e_1, \dots, e_n))$ שווה ל- $\langle Te_k, e_k \rangle$ [השתמשו ב-6.30 (א) כאשר $v = Te_k$]. ■

התכונות האלגבריות של העקבה כפי שהיא מוגדרת מעל מטריצה ריבועית מתורגמות לתכונות אלגבריות של העקבה כפי שהיא מוגדרת מעל אופרטורים, כפי שנראה במסקנה הבאה.

8.56 העקבה היא ליניארית

הפונקציה $\operatorname{tr}: \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathbb{F}$ היא פונקציונל ליניארי מעל $\mathcal{L}(V)$ כך ש-

$$\operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}(TS)$$

לכל $S, T \in \mathcal{L}(V)$.

הוכחה נבחר בסיס של V . כל המטריצות של האופרטורים בהוכחה זו תהיינה ביחס לבסיס זה. נניח ש- $S, T \in \mathcal{L}(V)$.

אם $\lambda \in \mathbb{F}$, אזי

$$\operatorname{tr}(\lambda T) = \operatorname{tr} \mathcal{M}(\lambda T) = \operatorname{tr}(\lambda \mathcal{M}(T)) = \lambda \operatorname{tr} \mathcal{M}(T) = \lambda \operatorname{tr} T,$$

כאשר השוויונות הראשון והאחרון נובעים מהגדרת עקבת האופרטור, השוויון השני נובע מ-3.38, והשוויון השלישי נובע מהגדרת העקבה של מטריצה ריבועית.

בנוסף,

$$\operatorname{tr}(S+T) = \operatorname{tr} \mathcal{M}(S+T) = \operatorname{tr}(\mathcal{M}(S) + \mathcal{M}(T)) = \operatorname{tr} \mathcal{M}(S) + \operatorname{tr} \mathcal{M}(T) = \operatorname{tr} S + \operatorname{tr} T,$$

כאשר השוויונות הראשון והאחרון נובעים מהגדרת עקבת האופרטור, השוויון השני נובע מ-3.35, והשוויון השלישי נובע מהגדרת העקבה של מטריצה ריבועית. שת הפסקאות לעיל הראו כי $\operatorname{tr}: \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathbb{F}$ פונקציונל ליניארי מעל $\mathcal{L}(V)$.

יתר על כן,

$$\operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr} \mathcal{M}(ST) = \operatorname{tr}(\mathcal{M}(S)\mathcal{M}(T)) = \operatorname{tr}(\mathcal{M}(T)\mathcal{M}(S)) = \operatorname{tr} \mathcal{M}(TS) = \operatorname{tr}(TS),$$

כאשר השוויונות השני והרביעי נובעים מ-3.43 והשוויון השלישי החשוב נובע מ-8.49. ■

המשוואות $\operatorname{tr} I = \dim V$ ו- $\operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}(TS)$ מאפיינות באופן יחיד את העקבה מבין כל הפונקציונלים הליניאריים מעל $\mathcal{L}(V)$ —ראו תרגיל 10.

הניסוח של המסקנה הבאה אינו כולל עקבות, אך ההוכחה הקצרה משתמשת בעקבות. כאשר תופעה כזו מתרחשת במתמטיקה, בדרך כלל ברקע אורבת לה הגדרה טובה.

המשוואה $\text{tr}(ST) = \text{tr}(TS)$ מובילה אל מסקנתנו הבאה, אשר אינה מתקיימת מעל מרחבים וקטוריים מממד אינסופי (ראו תרגיל 13). בכל זאת, הנחות נוספות לגבי S, T ו- V מובילות להכללה של המסקנה להלן לממד אינסופי, עם יישומים חשובים בתורת הקוונטים.

8.57 אופרטור הזהות אינו ההפרש של ST ו- TS

לא קיימים אופרטורים $S, T \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $ST - TS = I$.

הוכחה נניח ש- $S, T \in \mathcal{L}(V)$ אזי

$$\text{tr}(ST - TS) = \text{tr}(ST) - \text{tr}(TS) = 0,$$

כאשר שני השוויונות נובעים מ-8.56. העקבה של I שווה ל- $\dim V$, השונה מ-0. מאחר שהעקבות של $ST - TS$ ו- I שונות, האופרטורים $ST - TS$ ו- I אינם יכולים להיות שווים.

תרגילים 4ח

1 נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ו- $v, w \in V$. נגדיר אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ על ידי $Tu = \langle u, v \rangle w$. מצאו נוסחה עבור $\text{tr} T$.

2 נניח ש- $P \in \mathcal{L}(V)$ מקיים $P^2 = P$. הוכיחו כי

$$\text{tr} P = \dim \text{range } P.$$

3 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $T^5 = T$. הוכיחו כי החלקים הממשי והמדומה של $\text{tr} T$ שניהם מספרים שלמים.

4 נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי $\text{tr} T^* = \overline{\text{tr} T}$.

5 נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית. נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור חיובי ו- $\text{tr} T = 0$. הוכיחו כי $T = 0$.

6 נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ו- $P, Q \in \mathcal{L}(V)$ היטלים אורתוגונליים. הוכיחו כי $\text{tr}(PQ) \geq 0$.

7 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ הוא האופרטור שהמטריצה שלו היא

$$\begin{pmatrix} 51 & -12 & -21 \\ 60 & -40 & -28 \\ 57 & -68 & 1 \end{pmatrix}.$$

מישהו אומר לכם (במדויק) כי -48 ו-24 הם ערכים עצמיים של T . בלי שתשתמשו במחשב או בכלי כתיבה כלשהם, מצאו את הערך העצמי השלישי של T .

- 8 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם $S, T \in \mathcal{L}(V)$, אזי $\text{tr}(ST) = (\text{tr } S)(\text{tr } T)$.
- 9 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $\text{tr}(ST) = 0$ לכל $S \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי $T = 0$.
- 10 הוכיחו כי העקבה היא הפונקציונל הליניארי היחיד $\tau: \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathbb{F}$ כך ש-

$$\tau(ST) = \tau(TS)$$

 לכל $S, T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\tau(I) = \dim V$.
- רמז: נניח ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V . עבור $j, k \in \{1, \dots, n\}$ גדיר $P_{j,k} \in \mathcal{L}(V)$ על ידי $P_{j,k}(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_k v_j$. הוכיחו כי

$$\tau(P_{j,k}) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = k, \\ 0 & \text{if } j \neq k. \end{cases}$$
- ואז עבור $T \in \mathcal{L}(V)$, השתמשו במשוואה $\mathcal{M}(T)_{j,k} P_{j,k}$ כדי להראות כי $\tau(T) = \text{tr } T$.
- 11 נניח ש- V ו- W מרחבי מכפלה פנימית ו- $T \in \mathcal{L}(V, W)$. הוכיחו כי אם $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V ו- $f_1, \dots, f_m$ בסיס אורתונורמלי של W , אזי

$$\text{tr}(T^*T) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m |\langle T e_k, f_j \rangle|^2.$$
- המספרים $\langle T e_k, f_j \rangle$ הם איברי המטריצה של T ביחס אל הבסיסים האורתונורמליים $e_1, \dots, e_n$ ו- $f_1, \dots, f_m$. מספרים אלו תלויים בבסיסים, אך $\text{tr}(T^*T)$ אינה תלויה בבחירה של בסיסים. לפיכך תרגיל זה מראה כי הסכום של הריבועים של הערכים המוחלטים של איברי המטריצה אינו תלוי בבסיסים האורתונורמליים שבשימוש.
- 12 נניח ש- V ו- W מרחבי מכפלה פנימית מממד סופי.
 א. הוכיחו כי $\langle S, T \rangle = \text{tr}(T^*S)$ מגדיר מכפלה פנימית מעל $\mathcal{L}(V, W)$.
 ב. נניח ש- $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V ו- $f_1, \dots, f_m$ בסיס אורתונורמלי של W . הראו כי המכפלה הפנימית מעל $\mathcal{L}(V, W)$ (מסעיף (א) היא זהה למכפלה הפנימית הסטנדרטית מעל $\mathbb{F}^{mn}$, כאשר אנו מזהים כל איבר של $\mathcal{L}(V, W)$ עם המטריצה שלו (ביחס אל הבסיסים שזה עתה הוזכרו) ואז עם איבר של $\mathbb{F}^{mn}$.
- אזהרה: הנורמה של העתקה ליניארית $T \in \mathcal{L}(V, W)$ המוגדרת ב- 7.86 אינה זהה לנורמה הנובעת מהמכפלה הפנימית בסעיף (א) לעיל. אם לא צוין במפורש אחרת, תמיד נניח ש- $\|T\|$ מתייחסת לנורמה כפי שהוגדרה ב- 7.86. הנורמה הנובעת מהמכפלה הפנימית בסעיף (א) נקראת **נורמת פרוכניוס** או **נורמת הילברט-שמידט**.
- 13 מצאו $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{F}))$ כך ש- $ST - TS = I$.
 רמז: בצעו את השינויים המתאימים לאופרטורים בדוגמה 3.9.
 תרגיל זה מראה שזנדרשות הנחות נוספות לגבי S ו- T כדי להרחיב את 8.57 למסגרת של מרחבים וקטוריים מממד אינסופי.

אלגברה מולטי-ליניארית ודטרמיננטות

את הפרק אנו פותחים בחקירת תבניות ביליניאריות ותבניות ריבועיות מעל מרחב וקטורי. לאחר מכן אנו פונים אל תבניות מולטי-ליניאריות. אנו נראה כי המרחב הווקטורי של תבניות n -ליניאריות מתחלפות הוא חד-ממדי מעל מרחב וקטורי מממד n . מסקנה זו תאפשר לנו לספק הגדרה נקייה שאינה תלויה בבחירת בסיס עבור הדטרמיננטה של אופרטור.

גישה זו לדטרמיננטה באמצעות תבניות מולטי-ליניאריות מתחלפות מובילה להוכחות פשוטות של תכונות מפתח של דטרמיננטות. לדוגמה, אנו נראה כי הדטרמיננטה היא כפלית, כלומר $\det(ST) = (\det S)(\det T)$ לכל האופרטורים S ו- T מעל אותו מרחב וקטורי. בנוסף נראה כי T הפיך אם ורק אם $\det T \neq 0$. מסקנה חשובה נוספת קובעת כי הדטרמיננטה של אופרטור מעל מרחב וקטורי מרוכב שווה למכפלת הערכים העצמיים של האופרטור, כאשר כל ערך עצמי נכלל מספר פעמים השווה לריבוי.

את הפרק אנו חותמים בהיכרות עם מכפלות טנזוריות.

הנחות המוצא לפרק זה

- F מסמן R או C .
- V ו- W מסמנים מרחבים וקטוריים מממד סופי השונים מאפס מעל F .



Daniel Schwen CC BY-SA

הפכו למתמטיקה באוניברסיטת גטינגן. בניין זה נפתח בשנת 1930, כאשר אָמִי נֶתֶר (1882–1935) כבר הייתה מתמטיקאית העוסקת במחקר וחברת סגל באוניברסיטה מזה 15 שנים (בשמונה השנים הראשונות ללא שכר). ב-1933, לאחר עליית הנאצים לשלטון, נתר, בזומה לפרצים יהודים אחרים, פוטרה מאוניברסיטת גטינגן משום היותה יהודייה. בשלב זה נתר ועמיתיה כבר יצרו רבים מייסודות האלגברה המודרנית, כולל נקודת מבט של אלגברה מופשטת שתרמה לפיתוחה של אלגברה ליניארית.

10 תבניות ביליניאריות ותבניות ריבועיות

תבניות ביליניאריות

תבנית ביליניארית מעל V היא פונקציה מ- $V \times V$ אל F שהיא ליניארית בכל רכיב בנפרד, משמעות הדבר היא כי בקיבוע כל אחד משני הרכיבים מתקבלת פונקציה ליניארית ברכיב האחר. להלן ההגדרה הרשמית.

9.1 הגדרה: תבנית ביליניארית

תבנית ביליניארית מעל V היא פונקציה $\beta: V \times V \rightarrow F$ כך ש-
 $v \mapsto \beta(u, v)$ וגם $v \mapsto \beta(v, u)$
 שניהם פונקציות ליניאריות מעל V לכל $u \in V$.

נזכיר כי המונח **פונקציונל ליניארי**, המובא בהגדרה לעיל, משמעותו פונקציה ליניארית המפעיקה אל שדה הסקלרים F . לפיכך המונח **פונקציונל ביליניארי** היה פניב, פינוח עקבי יותר מאשר **תבנית ביליניארית**, שלמרב המצער הפך לסטנדרט.

לדוגמה, אם V מרחב מכפלה פנימית ממשי, אזי הפונקציה המעתיקה זוג סדור $(u, v) \in V \times V$ אל $\langle u, v \rangle$ היא תבנית ביליניארית מעל V . אם V מרחב מכפלה פנימית מרוכב השונה מאפס, אזי פונקציה זו אינה תבנית ביליניארית מאחר שהמכפלה הפנימית אינה ליניארית ברכיב השני (סקלרים מרוכבים נשלפים מהרכיב השני כצמוד המרוכב שלהם).

אם $F = \mathbb{R}$, אזי תבנית ביליניארית שונה ממכפלה פנימית בכך שבעוד מכפלה פנימית דורשת סימטריה [כלומר $\beta(v, w) = \beta(w, v)$ לכל $v, w \in V$ חיוביות לחלוטין] כלומר $\beta(v, v) > 0$ לכל $v \in V \setminus \{0\}$, תכונות אלו אינן נדרשות עבור תבנית ביליניארית.

9.2 דוגמה: תבניות ביליניאריות

• הפונקציה $\beta: \mathbb{F}^3 \times \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}$ המוגדרת על ידי

$$\beta((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_2 - 5x_2 y_3 + 2x_3 y_1$$

היא תבנית ביליניארית מעל $\mathbb{F}^3$.

• נניח ש- A מטריצה $n \times n$ עם $A_{j,k} \in F$ בשורה j , עמודה k . נגדיר תבנית ביליניארית β_A מעל F^n על ידי

$$\beta_A((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n A_{j,k} x_j y_k.$$

הסעיף הראשון הוא מקרה פרטי של סעיף זה עם $n = 3$ ו-

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ממשי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי הפונקציה $\beta: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ המוגדרת על ידי

$$\beta(u, v) = \langle u, Tv \rangle$$

היא תבנית ביליניארית מעל V .

- אם n מספר שלם חיובי, אזי הפונקציה $\beta: \mathcal{P}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{P}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ המוגדרת על ידי

$$\beta(p, q) = p(2) \cdot q'(3)$$

היא תבנית ביליניארית מעל $\mathcal{P}_n(\mathbf{R})$.

- נניח ש- V' ו- $\varphi, \tau \in V'$. אזי הפונקציה $\beta: V \times V \rightarrow \mathbf{F}$ המוגדרת על ידי

$$\beta(u, v) = \varphi(u) \cdot \tau(v)$$

היא תבנית ביליניארית מעל V .

- באופן כללי יותר, נניח ש- $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \tau_1, \dots, \tau_n \in V'$. אזי הפונקציה $\beta: V \times V \rightarrow \mathbf{F}$ המוגדרת על ידי

$$\beta(u, v) = \varphi_1(u) \cdot \tau_1(v) + \dots + \varphi_n(u) \cdot \tau_n(v)$$

היא תבנית ביליניארית מעל V .

תבנית ביליניארית מעל V היא פונקציה מ- $V \times V$ אל $\mathbf{F}$. מאחר ש- $V \times V$ מרחב וקטורי, הדבר מעורר את השאלה האם תבנית ביליניארית יכולה גם היא להיות העתקה ליניארית מ- $V \times V$ אל $\mathbf{F}$. נשים לב שאף אחת מהתבניות הביליניאריות ב-9.2 אינה העתקה ליניארית למעט מקרים פרטיים מסוימים כאשר התבנית הביליניארית היא העתקת האפס. תרגיל 3 מראה כי תבנית ביליניארית β מעל V היא העתקה ליניארית מעל $V \times V$ רק אם $\beta = 0$.

9.3 הגדרה: $V^{(2)}$

קבוצת התבניות הביליניאריות מעל V מסומנת על ידי $V^{(2)}$.

עם הפעולות הרגילות של חיבור וכפל בסקלר של פונקציות, $V^{(2)}$ הוא מרחב וקטורי.

עבור T אופרטור מעל מרחב וקטורי n -ממדי V ובסיס $e_1, \dots, e_n$ של V , השתמשנו במטריצה $n \times n$ כדי לספק מידע לגבי T . כעת אנו עושים את אותו הדבר עבור תבניות ביליניאריות מעל V .

9.4 הגדרה: מטריצה של תבנית ביליניארית, $\mathcal{M}(\beta)$

נניח ש- β תבנית ביליניארית מעל V ו- $e_1, \dots, e_n$ בסיס של V . המטריצה של β ביחס לבסיס זה היא $\mathcal{M}(\beta)$ מטריצה $n \times n$ שהאיבר $\mathcal{M}(\beta)_{j,k}$ בשורה j , עמודה k נתון על ידי

$$\mathcal{M}(\beta)_{j,k} = \beta(e_j, e_k).$$

אם הבסיס $e_1, \dots, e_n$ אינו ברור מההקשר, אזי נעשה שימוש בסימון $\mathcal{M}(\beta, (e_1, \dots, e_n))$.

נזכיר כי $F^{n,n}$ מסמן את המרחב הווקטורי של מטריצות $n \times n$ עם איברים ב- F וכי $\dim F^{n,n} = n^2$ (ראו 3.39 ו- 3.40).

$$\dim V^{(2)} = (\dim V)^2 \quad 9.5$$

נניח ש- $e_1, \dots, e_n$ בסיס של V . אזי ההעתקה $\beta \mapsto \mathcal{M}(\beta)$ היא איזומורפיזם של $V^{(2)}$ על $F^{n,n}$. יתר על כן, $\dim V^{(2)} = (\dim V)^2$.

הוכחה ההעתקה $\beta \mapsto \mathcal{M}(\beta)$ היא בבירור העתקה ליניארית של $V^{(2)}$ אל $F^{n,n}$. עבור $A \in F^{n,n}$, נגדיר תבנית בילינארית β_A מעל V על ידי

$$\beta_A(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n A_{j,k} x_j y_k$$

עבור $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in F$ (אם $V = F^n$ ו- $e_1, \dots, e_n$ הוא הבסיס הסטנדרטי של F^n , אזי β_A זו זהה לתבנית הבילינארית β_A בסעיף השני של דוגמה 9.2).

ההעתקה הליניארית $\beta \mapsto \mathcal{M}(\beta)$ מ- $V^{(2)}$ אל $F^{n,n}$ וההעתקה הליניארית $A \mapsto \beta_A$ מ- $F^{n,n}$ אל $V^{(2)}$ הופכות אחת של השנייה מאחר ש- $\beta_{\mathcal{M}(\beta)} = \beta$ לכל $\beta \in V^{(2)}$ ו- $\mathcal{M}(\beta_A) = A$ לכל $A \in F^{n,n}$. כפי שעליכם לוודא.

לפיכך שתי ההעתקות הן איזומורפיזמים ולשני המרחבים שהן מחברות ממד זהה. לכן $\dim V^{(2)} = \dim F^{n,n} = n^2 = (\dim V)^2$. ■

נזכיר כי C^t מסמן את המטריצה המשוחלפת של C . המטריצה C^t מושגת על ידי החלפת השורות והעמודות של C .

9.6 הרכבה של תבנית בילינארית ואופרטור

נניח ש- β תבנית בילינארית מעל V ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. נגדיר תבניות בילינאריות α ו- ρ מעל V על ידי

$$\alpha(u, v) = \beta(u, Tv) \quad \text{וגם} \quad \rho(u, v) = \beta(Tu, v).$$

יהי $e_1, \dots, e_n$ בסיס של V . אזי

$$\mathcal{M}(\alpha) = \mathcal{M}(\beta)\mathcal{M}(T) \quad \text{וגם} \quad \mathcal{M}(\rho) = \mathcal{M}(T)^t \mathcal{M}(\beta).$$

הוכחה אם $j, k \in \{1, \dots, n\}$ אזי

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\alpha)_{j,k} &= \alpha(e_j, e_k) \\ &= \beta(e_j, Te_k) \\ &= \beta\left(e_j, \sum_{m=1}^n \mathcal{M}(T)_{m,k} e_m\right) \\ &= \sum_{m=1}^n \beta(e_j, e_m) \mathcal{M}(T)_{m,k} \\ &= (\mathcal{M}(\beta)\mathcal{M}(T))_{j,k}. \end{aligned}$$

לפיכך $\mathcal{M}(\alpha) = \mathcal{M}(\beta)\mathcal{M}(T)$. ההוכחה כי $\mathcal{M}(\rho) = \mathcal{M}(T)^t \mathcal{M}(\beta)$ דומה. ■

המסקנה להלן מראה כיצד המטריצה של תבנית ביליניארית משתנה אם אנו משנים את הבסיס. את הנוסחה במסקנה להלן יש להשוות לנוסחת שינוי בסיס עבור המטריצה של אופרטור (ראו 3.84). שתי הנוסחאות דומות, מלבד העובדה כי המשוואות C^t מופיעה בנוסחה להלן וההופכית C^{-1} מופיעה בנוסחת שינוי בסיס עבור המטריצה של אופרטור.

9.7 נוסחת שינוי בסיס

נניח ש- $\beta \in V^{(2)}$. נניח ש- $e_1, \dots, e_n$ ו- $f_1, \dots, f_n$ בסיסים של V . תהיינה $A = \mathcal{M}(\beta, (e_1, \dots, e_n))$ ו- $B = \mathcal{M}(\beta, (f_1, \dots, f_n))$ אזי $C = \mathcal{M}(I, (e_1, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_n))$ ו- $A = C^t B C$.

הוכחה למת ההעתקה הליניארית (3.4) מורה לנו כי קיים אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ כך ש- $Tf_k = e_k$ לכל $k = 1, \dots, n$. הגדרת המטריצה של אופרטור ביחס לבסיס גוררת ש-

$$\mathcal{M}(T, (f_1, \dots, f_n)) = C.$$

נגדיר תבניות ביליניאריות α, ρ מעל V על ידי

$$\alpha(u, v) = \beta(u, Tv) \quad \text{ו-} \quad \rho(u, v) = \alpha(Tu, v) = \beta(Tu, Tv).$$

אזי $\beta(e_j, e_k) = \beta(Tf_j, Tf_k) = \rho(f_j, f_k)$ לכל $j, k \in \{1, \dots, n\}$. לפיכך

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{M}(\rho, (f_1, \dots, f_n)) \\ &= C^t \mathcal{M}(\alpha, (f_1, \dots, f_n)) \\ &= C^t B C, \end{aligned}$$

כאשר השורות השנייה והשלישית נובעות מ- 9.6.

9.8 דוגמה: המטריצה של תבנית ביליניארית מעל $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$

נגדיר תבנית ביליניארית β מעל $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ על ידי $\beta(p, q) = p(2) \cdot q'(3)$. יהיו

$$A = \mathcal{M}(\beta, (1, x - 2, (x - 3)^2)) \quad \text{ו-} \quad B = \mathcal{M}(\beta, (1, x, x^2))$$

$$\text{ו-} \quad C = \mathcal{M}(I, (1, x - 2, (x - 3)^2), (1, x, x^2)) \quad \text{אזי}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{וגם} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 4 & 24 \end{pmatrix} \quad \text{וגם} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

קעת, נוסחת שינוי הבסיס 9.7 קובעת כי $A = C^t B C$, קביעה שתוכלו לוודא באמצעות כפל מטריצות של המטריצות לעיל.

תבניות ביליניאריות סימטריות

9.9 הגדרה: תבנית ביליניארית סימטרית, $V_{\text{sym}}^{(2)}$

תבנית ביליניארית $\rho \in V^{(2)}$ נקראת סימטרית אם

$$\rho(u, w) = \rho(w, u)$$

לכל $u, w \in V$. קבוצת התבניות הביליניאריות הסימטריות מעל V מסומנת על ידי $V_{\text{sym}}^{(2)}$.

9.10 דוגמה: תבניות ביליניאריות סימטריות

- אם V מרחב מכפלה פנימית ממשי ו- $\rho \in V^{(2)}$ מוגדר על ידי

$$\rho(u, w) = \langle u, w \rangle,$$

אזי ρ תבנית ביליניארית סימטרית מעל V .

- נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ממשי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. נגדיר $\rho \in V^{(2)}$ על ידי

$$\rho(u, w) = \langle u, Tw \rangle.$$

אזי ρ תבנית ביליניארית סימטרית מעל V אם-ורק-אם T אופרטור צמוד לעצמו (הסעיף הקודם בדוגמה הוא המקרה הפרטי של $T = I$).

- נניח ש- $\rho: \mathcal{L}(V) \times \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathbb{F}$ מוגדרת על ידי

$$\rho(S, T) = \text{tr}(ST).$$

אזי ρ תבנית ביליניארית סימטרית מעל $\mathcal{L}(V)$ מאחר שהעקבה היא פונקציונל ליניארי מעל $\mathcal{L}(V)$ ו- $\text{tr}(ST) = \text{tr}(TS)$ לכל $S, T \in \mathcal{L}(V)$; ראו 8.56.

9.11 הגדרה: מטריצה סימטרית

מטריצה ריבועית A נקראת סימטרית אם היא שווה למשוחלפת שלה.

לאופרטור מעל V ייתכן שתהיה מטריצה סימטרית ביחס לבסיס כלשהו אך לא ביחס לכל הבסיסים של V . מנגד, המסקנה הבאה מראה שלתבנית ביליניארית מעל V יש מטריצה סימטרית או ביחס לכל בסיס V או ביחס לאף לא אחד מהבסיסים של V .

9.12 תבניות ביליניאריות סימטריות הן לכסינות

נניח ש- $\rho \in V^{(2)}$. אזי התנאים הבאים שקולים.

א. תבנית ביליניארית סימטרית מעל V .

ב. $\mathcal{M}(\rho, (e_1, \dots, e_n))$ מטריצה סימטרית לכל בסיס $e_1, \dots, e_n$ של V .

ג. $\mathcal{M}(\rho, (e_1, \dots, e_n))$ מטריצה סימטרית עבור בסיס כלשהו $e_1, \dots, e_n$ של V .

ד. $\mathcal{M}(\rho, (e_1, \dots, e_n))$ מטריצה אלכסונית עבור בסיס כלשהו $e_1, \dots, e_n$ של V .

הוכחה תחילה נניח כי (א) מתקיים, ולכן ρ תבנית ביליניארית סימטרית. נניח ש- $e_1, \dots, e_n$ בסיס של V ו- $j, k \in \{1, \dots, n\}$. אזי $\rho(e_j, e_k) = \rho(e_k, e_j)$ מאחר ש- ρ סימטרית. לפיכך $\mathcal{M}(\rho, (e_1, \dots, e_n))$ מטריצה סימטרית, ובכך הראינו כי (א) גורר את (ב).

(ב) גורר את (ג) בבירור.

כעת נניח כי (ג) מתקיים ו- $e_1, \dots, e_n$ בסיס של V כך ש- $\mathcal{M}(\rho, (e_1, \dots, e_n))$ מטריצה סימטרית. נניח ש- $u, w \in V$. קיימים $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in F$ כך ש- $u = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ ו- $w = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$. כעת

$$\begin{aligned} \rho(u, w) &= \rho\left(\sum_{j=1}^n a_j e_j, \sum_{k=1}^n b_k e_k\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j b_k \rho(e_j, e_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j b_k \rho(e_k, e_j) \\ &= \rho\left(\sum_{k=1}^n b_k e_k, \sum_{j=1}^n a_j e_j\right) \\ &= \rho(w, u), \end{aligned}$$

כאשר השורה השלישית מתקיימת מאחר ש- $\mathcal{M}(\rho)$ מטריצה סימטרית. המשוואה לעיל מראה ש- ρ תבנית ביליניארית סימטרית, ובכך הראינו כי (ג) גורר את (א).
בנקודה זו, הוכחנו כי (א), (ב) ו- (ג) שקולים. מאחר שכל מטריצה אלכסונית היא סימטרית, (ד) גורר את (ג). להשלמת ההוכחה, נראה כי (א) גורר את (ד) על ידי אינדוקציה על $n = \dim V$.

אם $n = 1$, אזי (א) גורר את (ד) מאחר שכל מטריצה 1×1 היא אלכסונית. כעת נניח ש- $n > 1$ והגרירה (א) $\implies$ (ד) מתקיימת עבור ממד נמוך באחד. נניח ש- (א) מתקיים, ולכן ρ תבנית ביליניארית סימטרית. אם $\rho = 0$, אזי המטריצה של ρ ביחס אל כל בסיס של V היא מטריצת האפס, שהיא מטריצה אלכסונית. לכן אנו יכולים להניח ש- $\rho \neq 0$, כלומר קיימים $u, w \in V$ כך ש- $\rho(u, w) \neq 0$. כעת

$$2\rho(u, w) = \rho(u + w, u + w) - \rho(u, u) - \rho(w, w).$$

מאחר שהאגף השמאלי של המשוואה לעיל שונה מאפס, שלושת הביטויים באגף הימני לא יכולים להיות כולם 0. לכן קיים $v \in V$ כך ש- $\rho(v, v) \neq 0$.

יהי $U = \{u \in V : \rho(u, v) = 0\}$. לפיכך U הוא מרחב האפס של הפונקציונל הליניארי $u \mapsto \rho(u, v)$ מעל V . פונקציונל ליניארי זה אינו פונקציונל האפס מאחר ש- $v \notin U$. לפיכך $\dim U = n - 1$. לפי הנחת האינדוקציה, קיים בסיס $e_1, \dots, e_{n-1}$ של U כך שיש לתבנית הביליניארית הסימטרית $\rho|_{U \times U}$ מטריצה אלכסונית ביחס לבסיס זה.

מאחר ש- $v \notin U$, הרשימה $e_1, \dots, e_{n-1}, v$ בסיס של V . נניח ש- $k \in \{1, \dots, n-1\}$. אזי $\rho(e_k, v) = 0$ מאחר ש- $e_k \in U$. מאחר ש- ρ סימטרית, נקבל גם ש- $\rho(v, e_k) = 0$. לפיכך המטריצה של ρ ביחס ל- $e_1, \dots, e_{n-1}, v$ מטריצה אלכסונית ובכך הושלמה ההוכחה כי (א) גורר את (ד).

המסקנה הקודמת קובעת כי לכל תבנית ביליניארית סימטרית יש מטריצה אלכסונית ביחס לבסיס כלשהו. אם המרחב הווקטורי הוא במקרה גם מרחב מכפלה פנימית ממשי, אזי המסקנה הבאה מראה שלכל תבנית ביליניארית סימטרית יש מטריצה אלכסונית ביחס לבסיס אורתונורמלי כלשהו. שימו לב שהמכפלה הפנימית כאן אינה קשורה לתבנית הביליניארית.

9.13 לכסון של תבנית ביליניארית סימטרית על ידי בסיס אורתונורמלי

נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ממשי ו- ρ תבנית ביליניארית סימטרית מעל V . אזי יש ל- ρ מטריצה אלכסונית ביחס לבסיס אורתונורמלי כלשהו של V .

הוכחה תהי $f_1, \dots, f_n$ בסיס אורתונורמלי של V . תהי $B = \mathcal{M}(\rho, (f_1, \dots, f_n))$ אזי B היא מטריצה סימטרית (לפי 9.12). יהי $T \in \mathcal{L}(V)$ האופרטור כך ש- $B = \mathcal{M}(T, (f_1, \dots, f_n))$. לפיכך T צמוד לעצמו.

משפט הפירוק הספקטרי הממשי (7.29) קובע כי יש ל- T מטריצה אלכסונית ביחס לבסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ כלשהו של V . תהי $C = \mathcal{M}(I, (e_1, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_n))$. לפיכך $C^{-1}BC$ היא המטריצה של T ביחס לבסיס $e_1, \dots, e_n$ (לפי 3.84). לכן $C^{-1}BC$ מטריצה אלכסונית. כעת

$$\mathcal{M}(\rho, (e_1, \dots, e_n)) = C^t B C = C^{-1} B C,$$

כאשר השוויון הראשון מתקיים לפי 9.7 והשוויון השני מתקיים מאחר ש- C מטריצה אוניטרית עם איברים ממשיים (מה שגורר ש- $C^{-1} = C^t$; ראו 7.57). ■

כעת נעבור להתמקד בתבניות ביליניאריות מתחלפות. לתבניות מולטי-ביליניאריות מתחלפות יהיה תפקיד מרכזי בגישתנו לדטרמיננטות בהמשך פרק זה.

9.14 הגדרה: תבנית ביליניארית מתחלפת, $V_{\text{alt}}^{(2)}$

תבנית ביליניארית $\alpha \in V^{(2)}$ נקראת מתחלפת אם

$$\alpha(v, v) = 0$$

לכל $v \in V$. קבוצת התבניות הביליניאריות המתחלפות מעל V מסומנת על ידי $V_{\text{alt}}^{(2)}$.

9.15 דוגמה: תבניות ביליניאריות מתחלפות

- נניח ש- $n \geq 3$ ו- $\alpha: \mathbf{F}^n \times \mathbf{F}^n \rightarrow \mathbf{F}$ מוגדרת על ידי $\alpha((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_1 y_3 - x_3 y_1$. אזי α תבנית ביליניארית מתחלפת מעל $\mathbf{F}^n$.
- נניח ש- $\varphi, \tau \in V'$. אזי התבנית הביליניארית α מעל V המוגדרת על ידי $\alpha(u, w) = \varphi(u)\tau(w) - \varphi(w)\tau(u)$ היא מתחלפת.

המסקנה הבאה מראה שתבנית ביליניארית היא מתחלפת אס-ורק-אם שינוי סדר הרכיבים מכפיל את התוצאה ב-1.

9.16 אפיון תבניות ביליניאריות מתחלפות

תבנית ביליניארית α מעל V היא מתחלפת אס-ורק-אם

$$\alpha(u, w) = -\alpha(w, u)$$

לכל $u, w \in V$.

הוכחה תחילה נניח כי α מתחלפת. אם $u, w \in V$ אזי

$$0 = \alpha(u + w, u + w)$$

$$= \alpha(u, u) + \alpha(u, w) + \alpha(w, u) + \alpha(w, w)$$

$$= \alpha(u, w) + \alpha(w, u).$$

לפיכך $\alpha(u, w) = -\alpha(w, u)$, כפי שרצינו.

להוכחת הגרירה בכיוון השני, נניח ש- $\alpha(u, w) = -\alpha(w, u)$ לכל $u, w \in V$. אזי $\alpha(v, v) = -\alpha(v, v)$ לכל $v \in V$, מה שגורר ש- $\alpha(v, v) = 0$ לכל $v \in V$. לפיכך α מתחלפת. ■

כעת נראה כי המרחב הווקטורי של תבניות ביליניאריות מעל V הוא סכום ישר של התבניות הביליניאריות הסימטריות מעל V והתבניות הביליניאריות המתחלפות מעל V .

$$V^{(2)} = V_{\text{sym}}^{(2)} \oplus V_{\text{alt}}^{(2)} \quad 9.17$$

הקבוצות $V_{\text{sym}}^{(2)}$ ו- $V_{\text{alt}}^{(2)}$ הן תת-מרחב של $V^{(2)}$. יתר על כן,

$$V^{(2)} = V_{\text{sym}}^{(2)} \oplus V_{\text{alt}}^{(2)}.$$

הוכחה ההגדרה של תבנית ביליניארית סימטרית גוררת שהסכום של כל שתי תבניות ביליניאריות סימטריות מעל V הוא תבנית ביליניארית סימטרית מעל V , וכל כפולת סקלר של תבנית ביליניארית סימטרית כלשהי מעל V היא תבנית ביליניארית סימטרית מעל V . בנוסף, התבנית הביליניארית האפס נמצאת ב- $V_{\text{sym}}^{(2)}$. לפיכך $V_{\text{sym}}^{(2)}$ הוא תת-מרחב של $V^{(2)}$. באופן דומה, הווידוא ש- $V_{\text{alt}}^{(2)}$ הוא תת-מרחב של $V^{(2)}$ הוא ישיר. כעת, ברצוננו להראות ש- $V^{(2)} = V_{\text{sym}}^{(2)} + V_{\text{alt}}^{(2)}$. לצורך כך, נניח ש- $\beta \in V^{(2)}$ נגדיר $\rho, \alpha \in V^{(2)}$ על ידי

$$\rho(u, w) = \frac{\beta(u, w) + \beta(w, u)}{2} \quad \text{וגם} \quad \alpha(u, w) = \frac{\beta(u, w) - \beta(w, u)}{2}.$$

אזי $\rho \in V_{\text{sym}}^{(2)}$ ו- $\alpha \in V_{\text{alt}}^{(2)}$, וגם $\beta = \rho + \alpha$. לפיכך $V^{(2)} = V_{\text{sym}}^{(2)} + V_{\text{alt}}^{(2)}$. לבסוף, כדי להראות שהחיתוך של שני תת-המרחב הנדונים שווה ל- $\{0\}$, נניח ש- $\beta \in V_{\text{sym}}^{(2)} \cap V_{\text{alt}}^{(2)}$. אזי 9.16 גורר ש-

$$\beta(u, w) = -\beta(w, u) = -\beta(u, w)$$

ולכן $\beta(u, w) = 0$. לפיכך $\beta = 0$. לכן $V^{(2)} = V_{\text{sym}}^{(2)} \oplus V_{\text{alt}}^{(2)}$ (לפי 1.46).

תבניות ריבועיות

9.18 הגדרה: תבנית ריבועית המתאימה לתבנית ביליניארית, q_β

עבור β תבנית ביליניארית מעל V , נגדיר פונקציה $q_\beta: V \rightarrow F$ על ידי $q_\beta(v) = \beta(v, v)$. פונקציה $q: V \rightarrow F$ נקראת תבנית ריבועית מעל V אם קיימת תבנית ביליניארית β מעל V כך ש- $q = q_\beta$.

נשים לב כי אם β תבנית ביליניארית, אזי $q_\beta = 0$ אם-ורק אם β מתחלפת.

9.19 דוגמה: תבנית ריבועית

נניח ש- β היא התבנית הביליניארית מעל $\mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי $\beta((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 - 4x_1 y_2 + 8x_1 y_3 - 3x_3 y_3$. אזי q_β התבנית הריבועית מעל $\mathbb{R}^3$ הניתנת באמצעות הנוסחה $q_\beta(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1 x_2 + 8x_1 x_3 - 3x_3^2$.

התבנית הריבועית בדוגמה לעיל היא תבנית טיפוסית לתבניות ריבועיות מעל F^n , כפי שנראה במסקנה הבאה.

9.20 תבניות ריבועיות מעל F^n

נניח ש- n מספר שלם חיובי ו- q פונקציה מ- F^n אל F . אזי q תבנית ריבועית מעל F^n אם-ורק אם קיימים מספרים $A_{j,k} \in F$ עבור $j, k \in \{1, \dots, n\}$ כך ש-

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n A_{j,k} x_j x_k$$

לכל $(x_1, \dots, x_n) \in F^n$.

הוכחה תחילה נניח כי q תבנית ריבועית מעל F^n . לפיכך קיימת תבנית ביליניארית β מעל F^n כך ש- $q = q_\beta$. תהי A המטריצה של β ביחס לבסיס הסטנדרטי של F^n . אזי לכל $(x_1, \dots, x_n) \in F^n$, מתקיימת המשוואה המבוקשת

$$q(x_1, \dots, x_n) = \beta((x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n A_{j,k} x_j x_k.$$

בכיוון ההפוך, נניח כי קיימים מספרים $A_{j,k} \in F$ עבור $j, k \in \{1, \dots, n\}$ כך ש-

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n A_{j,k} x_j x_k$$

לכל $(x_1, \dots, x_n) \in F^n$. נגדיר תבנית ביליניארית β מעל F^n על ידי

$$\beta((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n A_{j,k} x_j y_k.$$

אזי $q = q_\beta$, כפי שרצינו.

אף שתבניות ריבועיות מוגדרות במונחים של תבנית ביליניארית שרירותית, השקילות של (א) ו- (ב) במסקנה להלן מראה לנו כי תמיד נוכל להשתמש בתבנית ביליניארית סימטרית.

9.21 אפיונים של תבניות ריבועיות

נניח ש- $q: V \rightarrow F$ פונקציה. התנאים הבאים שקולים.
א. תבנית ריבועית.

ב. קיימת תבנית ביליניארית סימטרית יחידה ρ מעל V כך ש- $q = q_\rho$.

ג. $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ לכל $\lambda \in F$ ולכל $v \in V$, והפונקציה
 $(u, w) \mapsto q(u + w) - q(u) - q(w)$
היא תבנית ביליניארית סימטרית מעל V .

ד. $q(2v) = 4q(v)$ לכל $v \in V$, והפונקציה
 $(u, w) \mapsto q(u + w) - q(u) - q(w)$
תבנית ביליניארית סימטרית מעל V .

הוכחה תחילה נניח כי (א) מתקיים, כך ש- q תבנית ריבועית. לכן קיימת תבנית ביליניארית β כך ש- $q = q_\beta$. לפי 9.17, קיימות תבנית ביליניארית סימטרית ρ מעל V ותבנית ביליניארית מתחלפת α מעל V כך ש- $\beta = \rho + \alpha$. כעת

$$q = q_\beta = q_\rho + q_\alpha = q_\rho.$$

אם גם $\rho' \in V_{\text{sym}}^{(2)}$ מקיימת $q, q_{\rho'} = 0$ אזי $q_{\rho' - \rho} = 0$. לפיכך $\rho' - \rho \in V_{\text{sym}}^{(2)} \cap V_{\text{alt}}^{(2)}$ מה שגורר ש- $\rho' = \rho$ (לפי 9.17). בכך הושלמה ההוכחה כי (א) גורר את (ב).

כעת נניח כי (ב) מתקיים, ולכן קיימת תבנית ביליניארית סימטרית ρ מעל V כך ש- $q = q_\rho$. אם $\lambda \in F$ ו- $v \in V$ אזי

$$q(\lambda v) = \rho(\lambda v, \lambda v) = \lambda \rho(v, \lambda v) = \lambda^2 \rho(v, v) = \lambda^2 q(v),$$

ובכך הראינו כי החלק הראשון של (ג) מתקיים.

אם $u, w \in V$ אזי

$$q(u + w) - q(u) - q(w) = \rho(u + w, u + w) - \rho(u, u) - \rho(w, w) = 2\rho(u, w).$$

לפיכך הפונקציה $(u, w) \mapsto q(u + w) - q(u) - q(w)$ שווה ל- 2ρ , שהיא תבנית ביליניארית סימטרית מעל V , ובכך השלמנו את ההוכחה כי (ב) גורר את (ג).

(ג) גורר את (ד) בבירור.

כעת נניח כי (ד) מתקיים. תהי ρ התבנית הביליניארית הסימטרית מעל V המוגדרת על ידי

$$\rho(u, w) = \frac{q(u + w) - q(u) - q(w)}{2}.$$

$$\text{אם } v \in V \text{ אזי } \rho(v, v) = \frac{q(2v) - q(v) - q(v)}{2} = \frac{4q(v) - 2q(v)}{2} = q(v).$$

לפיכך $q = q_\rho$, ובכך השלמנו את ההוכחה כי (ד) גורר את (א).

9.22 דוגמה: תבנית ביליניארית סימטרית המתאימה לתבנית ריבועית

נניח ש- q התבנית הריבועית מעל $\mathbf{R}^3$ הניתנת באמצעות הנוסחה

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_3^2.$$

תבנית ביליניארית β מעל $\mathbf{R}^3$ כך ש- $q = q_\beta$ על ידי דוגמה 9.19, אולם תבנית ביליניארית זו אינה סימטרית, כמובטח על ידי 9.21(ב). בכל זאת, התבנית הביליניארית ρ מעל $\mathbf{R}^3$ המוגדרת על ידי

$$\rho((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1 - 3x_3y_3$$

היא סימטרית ומקיימת $q = q_\rho$.

המסקנה הבאה קובעת שעבור כל תבנית ריבועית נוכל לבחור בסיס כך שהתבנית הריבועית תיראה כסכום משוקלל של ריבועי הקואורדינטות, כלומר אין איברים מעורבים מהצורה x_jx_k עם $j \neq k$.

9.23 לכסון של תבנית ריבועית

נניח ש- q תבנית ריבועית מעל V .

א. קיימים בסיס $e_1, \dots, e_n$ של V וסקלרים $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{F}$ כך ש-

$$q(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = \lambda_1x_1^2 + \dots + \lambda_nx_n^2$$

לכל $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{F}$.

ב. אם $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ ו- V מרחב מכפלה פנימית, אזי נוכל לבחור את הבסיס בסעיף (א) כבסיס אורתונורמלי של V .

הוכחה

א. קיימת תבנית ביליניארית סימטרית ρ מעל V כך ש- $q = q_\rho$ (לפי 9.21). כעת קיים בסיס $e_1, \dots, e_n$ של V כך ש- $\mathcal{M}(\rho, (e_1, \dots, e_n))$ מטריצה אלכסונית (לפי 9.12). נסמן ב- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ את איברי האלכסון של מטריצה זו. לפיכך

$$\rho(e_j, e_k) = \begin{cases} \lambda_j & \text{if } j = k, \\ 0 & \text{if } j \neq k \end{cases}$$

לכל $j, k \in \{1, \dots, n\}$ אם $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{F}$ אזי

$$\begin{aligned} q(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) &= \rho(x_1e_1 + \dots + x_ne_n, x_1e_1 + \dots + x_ne_n) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_jx_k\rho(e_j, e_k) \\ &= \lambda_1x_1^2 + \dots + \lambda_nx_n^2, \end{aligned}$$

כפי שרצינו.

ב. נניח ש- $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ ו- V מרחב מכפלה פנימית. אזי 9.13 מורה לנו כי נוכל לבחור את הבסיס ב- (α) כבסיס אורתונורמלי של V .

תרגילים 10

- 1 הוכיחו כי אם β תבנית ביליניארית מעל F , אזי קיים $c \in F$ כך ש-

$$\beta(x, y) = cxy$$

לכל $x, y \in F$.

- 2 יהי $n = \dim V$. נניח ש- β תבנית ביליניארית מעל V . הוכיחו כי קיימים

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n, \tau_1, \dots, \tau_n \in V'$$

$$\beta(u, v) = \varphi_1(u) \cdot \tau_1(v) + \dots + \varphi_n(u) \cdot \tau_n(v)$$

לכל $u, v \in V$.

תרגיל זה מראה כי אם $n = \dim V$, אזי כל תבנית ביליניארית מעל V היא מהצורה שניתנה בסעיף האחרון של דוגמה 9.2.

- 3 נניח ש- $\beta: V \times V \rightarrow F$ תבנית ביליניארית מעל V ובנוסף פונקציונל ליניארי מעל $V \times V$. הוכיחו כי $\beta = 0$.

- 4 נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ממשי ו- β תבנית ביליניארית מעל V . הראו כי קיים אופרטור יחיד $T \in \mathcal{L}(V)$ כך ש-

$$\beta(u, v) = \langle u, Tv \rangle$$

לכל $u, v \in V$.

תרגיל זה קובע כי אם V מרחב מכפלה פנימית ממשי, אזי כל תבנית ביליניארית מעל V היא מהצורה שניתנה בסעיף השלישי של דוגמה 9.2.

- 5 נניח ש- β תבנית ביליניארית מעל מרחב מכפלה פנימית ממשי V ו- T הוא האופרטור היחיד מעל V כך ש- $\beta(u, v) = \langle u, Tv \rangle$ לכל $u, v \in V$ (ראו תרגיל 4). הראו כי β היא מכפלה פנימית מעל V אם ורק אם T אופרטור חיובי הפיך מעל V .

- 6 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם ρ תבנית ביליניארית סימטרית מעל V , אזי $\{v \in V : \rho(v, v) = 0\}$ תת-מרחב של V .

- 7 הסבירו מדוע ההוכחה של 9.13 (לכסון של תבנית ביליניארית סימטרית על ידי בסיס אורתונורמלי מעל מרחב מכפלה פנימית ממשי) נכשלת אם משמיטים את ההנחה ש- $F = \mathbb{R}$.

- 8 מצאו נוסחאות עבור $\dim V_{\text{sym}}^{(2)}$ ו- $\dim V_{\text{alt}}^{(2)}$ במונחים של $\dim V$.

- 9 נניח ש- n מספר שלם חיובי ו- $V = \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : p(0) = p(1)\}$. נגדיר $\alpha: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי

$$\alpha(p, q) = \int_0^1 pq'.$$

הראו כי α תבנית ביליניארית מתחלפת מעל V .

10 נניח ש- n מספר שלם חיובי וגם

$$V = \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbf{R}) : p(0) = p(1) \text{ and } p'(0) = p'(1)\}.$$

נגדיר $\rho: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ על ידי

$$\rho(p, q) = \int_0^1 pq''.$$

הראו כי ρ תבנית ביליניארית סימטרית מעל V .

ט2 תבניות מולטי-ליניאריות מתחלפות

תבניות מולטי-ליניאריות

9.24 הגדרה: V^m

עבור m מספר שלם חיובי, נגדיר V^m על ידי

$$V^m = \underbrace{V \times \dots \times V}_m$$

כעת ביכולתנו להגדיר תבניות m -ליניאריות כהכללה של התבניות הביליניאריות שעליהן דיברנו ביחידה הקודמת.

9.25 הגדרה: תבנית m -ליניארית, $V^{(m)}$, תבנית מולטי-ליניארית

- עבור m מספר שלם חיובי, תבנית m -ליניארית מעל V היא פונקציה $\beta: V^m \rightarrow F$ כך שהיא ליניארית בכל רכיב כאשר שאר הרכיבים מקובעים. משמעות הדבר היא כי לכל $k \in \{1, \dots, m\}$ ולכל $u_1, \dots, u_m \in V$, הפונקציה $v \mapsto \beta(u_1, \dots, u_{k-1}, v, u_{k+1}, \dots, u_m)$ היא העתקה ליניארית מ- V אל F .
- קבוצת התבניות ה- m -ליניאריות מעל V מסומנת על ידי $V^{(m)}$.
- פונקציה β נקראת תבנית מולטי-ליניארית מעל V אם היא תבנית m -ליניארית מעל V עבור m מספר שלם חיובי כלשהו.

בהגדרה המובאת לעיל, משמעות הביטוי $\beta(u_1, \dots, u_{k-1}, v, u_{k+1}, \dots, u_m)$ היא $\beta(v, u_2, \dots, u_m)$ אם $k=1$ ו- $\beta(u_1, \dots, u_{m-1}, v)$ אם $k=m$. תבנית חד-ליניארית מעל V היא פונקציונל ליניארי מעל V . תבנית דו-ליניארית מעל V היא תבנית ביליניארית מעל V . באפשרותכם לוודא כי עם פעולות החיבור והכפל בסקלר הרגילות של פונקציות, $V^{(m)}$ מרחב וקטורי.

9.26 דוגמה: תבניות m -ליניאריות

- נניח ש- $\alpha, \rho \in V^{(2)}$. נגדיר פונקציה $\beta: V^4 \rightarrow F$ על ידי $\beta(v_1, v_2, v_3, v_4) = \alpha(v_1, v_2) \rho(v_3, v_4)$. אזי $\beta \in V^{(4)}$.

- נגדיר $\beta: (\mathcal{L}(V))^m \rightarrow F$ על ידי $\beta(T_1, \dots, T_m) = \text{tr}(T_1 \dots T_m)$. אזי β היא תבנית m -ליניארית מעל $\mathcal{L}(V)$.

לתבניות מולטי-ליניאריות מתחלפות, שאותן נגדיר כעת, תפקיד מרכזי כאשר ניגש אל הגדרת הדטרמיננטות.

9.27 הגדרה: תבניות מתחלפות, $V_{\text{alt}}^{(m)}$

נניח ש- m מספר שלם חיובי.

- תבנית m -ליניארית α מעל V נקראת מתחלפת אם $\alpha(v_1, \dots, v_m) = 0$ בכל עת ש- $v_1, \dots, v_m$ היא רשימה של וקטורים ב- V עם $v_j = v_k$ עבור שני ערכים שונים של j ו- k ב- $\{1, \dots, m\}$.
- $V_{\text{alt}}^{(m)} = \{\alpha \in V^{(m)} : \alpha \text{ תבנית } m\text{-ליניארית מתחלפת מעל } V\}$.

עליכם לוודא כי $V_{\text{alt}}^{(m)}$ הוא תת-מרחב של $V^{(m)}$. ראו בדוגמה 9.15 דוגמאות של תבניות דו-ליניאריות מתחלפות. ראו תרגיל 2 עבור דוגמה של תבנית תלת-ליניארית מתחלפת.

המסקנה הבאה אומרת לנו שאם רשימה תלויה ליניארית משמשת כקלט לתבנית מולטי-ליניארית מתחלפת, אזי התוצאה שווה 0.

9.28 תבניות מולטי-ליניאריות מתחלפות ותלות ליניארית

- נניח ש- m מספר שלם חיובי ו- α תבנית m -ליניארית מתחלפת מעל V . אם $v_1, \dots, v_m$ רשימה תלויה ליניארית ב- V , אזי
- $$\alpha(v_1, \dots, v_m) = 0.$$

הוכחה נניח ש- $v_1, \dots, v_m$ רשימה תלויה ליניארית ב- V . לפי למת התלות הליניארית (2.19), וקטור v_k כלשהו הוא צירוף ליניארי של $v_1, \dots, v_{k-1}$. לפיכך קיימים $b_1, \dots, b_{k-1}$ כך ש-

$$\begin{aligned} v_k &= b_1 v_1 + \dots + b_{k-1} v_{k-1} \\ \alpha(v_1, \dots, v_m) &= \alpha\left(v_1, \dots, v_{k-1}, \sum_{j=1}^{k-1} b_j v_j, v_{k+1}, \dots, v_m\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} b_j \alpha(v_1, \dots, v_{k-1}, v_j, v_{k+1}, \dots, v_m) \\ &= 0. \end{aligned}$$

המסקנה הבאה קובעת שאם $m > \dim V$, אזי אין תבניות m -ליניאריות מתחלפות מעל V מלבד הפונקציה מעל V^m שהיא זהותית 0.

9.29 עבור $m > \dim V$ אין תבניות m -ליניאריות מתחלפות שונות מאפס

- נניח ש- $m > \dim V$. אזי 0 היא התבנית ה- m -ליניארית המתחלפת היחידה מעל V .

הוכחה נניח ש- α תבנית m -ליניארית מתחלפת מעל V ו- $v_1, \dots, v_m \in V$. מאחר ש- $m > \dim V$, רשימה זו אינה בלתי תלויה ליניארית (לפי 2.22). לפיכך 9.28 גוררת ש- $\alpha(v_1, \dots, v_m) = 0$. לכן α היא פונקציית האפס מ- V^m אל F .

תבניות מולטי-ליניאריות מתחלפות ותמורות

9.30 החלפה בין וקטורי קלט בתבנית מולטי-ליניארית מתחלפת

נניח ש- m מספר שלם חיובי, α תבנית m -ליניארית מתחלפת מעל V , ו- $v_1, \dots, v_m$ רשימה של וקטורים ב- V . אזי החלפה בין הווקטורים בכל שני רכיבים של $\alpha(v_1, \dots, v_m)$ משנה את הערך של α בפקטור של -1 .

הוכחה נציב $v_1 + v_2$ בשני הרכיבים הראשונים ונקבל

$$0 = \alpha(v_1 + v_2, v_1 + v_2, v_3, \dots, v_m).$$

נשתמש בתכונות המולטי-ליניאריות של α לפתיחת האגף הימני של המשוואה לעיל (כמו בהוכחת 9.16) ונקבל

$$\alpha(v_2, v_1, v_3, \dots, v_m) = -\alpha(v_1, v_2, v_3, \dots, v_m).$$

באופן דומה, החלפה בין הווקטורים בכל שני רכיבים של $\alpha(v_1, \dots, v_m)$ משנה את הערך של α בפקטור של -1 .

כדי לראות מה יכול לקרות עם מספר החלפות, נניח ש- α היא תבנית תלת-ליניארית מתחלפת מעל V ו- $v_1, v_2, v_3 \in V$. כדי לחשב את $\alpha(v_3, v_1, v_2)$ במונחים של $\alpha(v_1, v_2, v_3)$, נתחיל עם $\alpha(v_3, v_1, v_2)$ ונחליף בין הרכיבים הראשון והשלישי ונקבל $\alpha(v_3, v_1, v_2) = -\alpha(v_2, v_1, v_3)$. כעת, בביטוי האחרון, נחליף בין איברי הרכיבים הראשון והשני ונקבל

$$\alpha(v_3, v_1, v_2) = -\alpha(v_2, v_1, v_3) = \alpha(v_1, v_2, v_3).$$

באופן כללי יותר, אנו רואים כי אם אנו מבצעים מספר אי-זוגי של החלפות, אזי הערך של α משתנה בפקטור של -1 , ואם אנו מבצעים מספר זוגי של החלפות, אזי הערך של α אינו משתנה.

כדי לעסוק במספר שרירותי של החלפות, נזדקק למעט מידע הנוגע לתמורות.

9.31 הגדרה: תמורה, $\text{perm } m$

נניח ש- m מספר שלם חיובי.

- תמורה של $(1, \dots, m)$ היא רשימה $(j_1, \dots, j_m)$ המכילה את כל אחד מהמספרים $1, \dots, m$ בדיוק פעם אחת.
- קבוצת כל התמורות של $(1, \dots, m)$ מסומנת על ידי $\text{perm } m$.

לדוגמה, $(2, 3, 4, 5, 1) \in \text{perm } 5$. עליכם לחשוב על איבר של $\text{perm } m$ כסידור מחדש של m השלמים החיוביים הראשונים.

מספר ההחלפות שנבצע כדי לשנות תמורה $(j_1, \dots, j_m)$ לסדר הטבעי $(1, \dots, m)$ יכול להיות תלוי בהחלפות הספציפיות שנבחרו. היתרון בהגדרה הבאה הוא השמת סימן מוגדר היטב לכל תמורה.

9.32 הגדרה: סימן של תמורה

הסימן של תמורה $(j_1, \dots, j_m)$ מוגדר על ידי

$$\text{sign}(j_1, \dots, j_m) = (-1)^N,$$

כאשר N הוא מספר זוגות המספרים השלמים (k, ℓ) עבור $1 \leq k < \ell \leq m$ כך ש- k מופיע אחרי ℓ ברשימה $(j_1, \dots, j_m)$.

לכן הסימן של תמורה שווה 1 אם מספר השינויים של הסדר הטבעי הוא זוגי ושווה -1 אם מספר השינויים של הסדר הטבעי הוא אי־זוגי.

9.33 דוגמה: סימנים

- סימן התמורה $(1, \dots, m)$ [ללא שינוי בסדר הטבעי] הוא 1.
- זוג המספרים השלמים היחידים (k, ℓ) עם $k < \ell$ כך ש- k מופיע אחרי ℓ ברשימה $(2, 1, 3, 4)$ הוא $(1, 2)$. לפיכך סימן התמורה $(2, 1, 3, 4)$ הוא -1.
- בתמורה $(2, 3, \dots, m, 1)$, הזוגות היחידים (k, ℓ) עם $k < \ell$ המופיעים בסדר שונה הם $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, m)$. מאחר שיש לנו $m - 1$ זוגות שכאלה, הסימן של תמורה זו שווה $(-1)^{m-1}$.

9.34 החלפת שני איברים בתמורה

החלפת שני איברים בתמורה מכפילה את סימן התמורה ב-1.

הוכחה נניח שיש בידינו שתי תמורות, כאשר התמורה השנייה מושגת כתוצאה מהחלפת שני איברים של הראשונה. שני האיברים המוחלפים הופיעו כסדרם הטבעי בתמורה הראשונה אם־ורק־אם הם אינם כסדרם הטבעי בתמורה השנייה. לפיכך מתקבל שינוי נטו (עד כה) של 1 או -1 (שניהם מספרים אי־זוגיים) עבור המספר של הזוגות שאינם כסדרם הטבעי.

נתבונן בכל איבר בין אותם שני איברים מוחלפים. אם איבר המוצב ביניהם היה במקור מוצב בסדר הטבעי ביחס לשני האיברים המוחלפים, אזי איבר זה כעת אינו בסדר הטבעי ביחס לאף אחד משני האיברים המוחלפים. באופן דומה, אם איבר המוצב ביניהם היה במקור שלא בסדר הטבעי ביחס לכל אחד משני האיברים המוחלפים, אזי איבר זה הוא כעת בסדר הטבעי ביחס לכל אחד משני האיברים המוחלפים. אם איבר המוצב ביניהם היה במקור מוצב בסדר הטבעי ביחס לאיבר מוחלף אחד בלבד, אזי מצב זה עדיין מתקיים. לפיכך השינוי נטו (לכל זוג שבו אחד מהאיברים הוא בין אותם שני איברים מוחלפים) במספר הזוגות שאינם כסדרם הטבעי הוא -2, 2 או 0 (כולם מספרים זוגיים).

עבור כל שאר זוגות האיברים אין שינוי בשאלה אם הם כסדרם הטבעי אם לא. לפיכך סך השינוי נטו במספר הזוגות שאינם כסדרם הטבעי הוא מספר אי־זוגי. לכן הסימן של התמורה השנייה הוא -1 כפול סימן התמורה הראשונה.

9.35 תמורות ותבניות מולטי-ליניאריות מתחלפות

נניח ש- m מספר שלם חיובי ו- $\alpha \in V_{\text{alt}}^{(m)}$. אזי

$$\alpha(v_{j_1}, \dots, v_{j_m}) = (\text{sign}(j_1, \dots, j_m))\alpha(v_1, \dots, v_m)$$

לכל רשימת וקטורים $v_1, \dots, v_m$ ב- V ולכל $(j_1, \dots, j_m) \in \text{perm } m$.

הוכחה נניח ש- $v_1, \dots, v_m \in V$ ו- $(j_1, \dots, j_m) \in \text{perm } m$. נוכל להגיע מ- $(j_1, \dots, j_m)$ אל $(1, \dots, m)$ באמצעות סדרה של החלפות איברים ברכיבים שונים. כל החלפה שכזו משנה את ערכו של α בפקטור של -1 (לפי 9.30) ובנוסף משנה את הסימן של התמורה שנותרה בפקטור של -1 (לפי 9.34). אחרי מספר החלפות מתאים, נגיע לתמורה $1, \dots, m$, שסימנה 1. לפיכך ערך α משנה סימן מספר זוגי של פעמים אם $\text{sign}(j_1, \dots, j_m) = 1$ ומספר אי-זוגי של פעמים אם $\text{sign}(j_1, \dots, j_m) = -1$, מה שמעניק לנו את התוצאה הרצויה. ■

השימוש שלנו בתמורות מוביל כעת באורח טבעי אל הנוסחה היפה המובאת להלן עבור תבניות n -ליניאריות מתחלפות מעל מרחב וקטורי מממד n .

9.36 נוסחה עבור תבניות $(\dim V)$ -ליניאריות מתחלפות מעל V

יהי $n = \dim V$. נניח ש- $e_1, \dots, e_n$ בסיס של V ו- $v_1, \dots, v_n \in V$. לכל $k \in \{1, \dots, n\}$, יהיו $b_{1,k}, \dots, b_{n,k} \in F$ כך ש-

$$v_k = \sum_{j=1}^n b_{j,k} e_j.$$

אזי

$$\alpha(v_1, \dots, v_n) = \alpha(e_1, \dots, e_n) \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \text{perm } n} (\text{sign}(j_1, \dots, j_n)) b_{j_1,1} \cdots b_{j_n,n}$$

לכל תבנית n -ליניארית מתחלפת α מעל V .

הוכחה נניח ש- α תבנית n -ליניארית מתחלפת מעל V . אזי

$$\begin{aligned} \alpha(v_1, \dots, v_n) &= \alpha\left(\sum_{j_1=1}^n b_{j_1,1} e_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^n b_{j_n,n} e_{j_n}\right) \\ &= \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n b_{j_1,1} \cdots b_{j_n,n} \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \text{perm } n} b_{j_1,1} \cdots b_{j_n,n} \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) \\ &= \alpha(e_1, \dots, e_n) \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \text{perm } n} (\text{sign}(j_1, \dots, j_n)) b_{j_1,1} \cdots b_{j_n,n}, \end{aligned}$$

כאשר השורה השלישית מתקיימת מאחר ש- $\alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = 0$ אם $j_1, \dots, j_n$ אינם מספרים שלמים שונים, והשורה האחרונה מתקיימת לפי 9.35. ■

המסקנה הבאה תהיה עמוד התווך בהגדרה שלנו לדטרמיננטה ביחידה הבאה.

$$\dim V_{\text{alt}}^{(\dim V)} = 1 \quad 9.37$$

המרחב הווקטורי $V_{\text{alt}}^{(\dim V)}$ הוא חד-ממדי.

הוכחה יהי $\dim V = n$. נניח ש- α ו- α' תבניות n -ליניאריות מתחלפות מעל V עם $\alpha \neq 0$. יהיו $e_1, \dots, e_n$ כך ש- $\alpha(e_1, \dots, e_n) \neq 0$. קיים $c \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$\alpha'(e_1, \dots, e_n) = c\alpha(e_1, \dots, e_n).$$

יתר על כן, 9.28 גורר ש- $e_1, \dots, e_n$ בלתי תלויה ליניארית ולפיכך בסיס של V .

נניח ש- $v_1, \dots, v_n \in V$. יהי $b_{j,k}$ כמו ב- 9.36 עבור $j, k = 1, \dots, n$. אזי

$$\begin{aligned} \alpha'(v_1, \dots, v_n) &= \alpha'(e_1, \dots, e_n) \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \text{perm } n} (\text{sign}(j_1, \dots, j_n)) b_{j_1,1} \cdots b_{j_n,n} \\ &= c\alpha(e_1, \dots, e_n) \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \text{perm } n} (\text{sign}(j_1, \dots, j_n)) b_{j_1,1} \cdots b_{j_n,n} \\ &= c\alpha(v_1, \dots, v_n), \end{aligned}$$

כאשר השורות הראשונה והאחרונה לעיל נובעות מ- 9.36. המשוואה לעיל גוררת ש- $\alpha' = c\alpha$. לפיכך α', α אינה רשימה בלתי תלויה ליניארית, מה שגורר ש- $\dim V_{\text{alt}}^{(n)} \leq 1$.

להשלמת ההוכחה, כל שנותר לנו להראות הוא כי קיימת תבנית n -ליניארית מתחלפת שונה מאפס α מעל V (ובכך תישלל האפשרות ש- $\dim V_{\text{alt}}^{(n)} = 0$). לצורך כך, תהי $e_1, \dots, e_n$ בסיס כלשהו של V , ויהיו $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V'$ הפונקציונלים הליניאריים מעל V המאפשרים לנו לבטא כל איבר של V כצירוף ליניארי של $e_1, \dots, e_n$. במילים אחרות,

$$v = \sum_{j=1}^n \varphi_j(v) e_j$$

לכל $v \in V$ (ראו 3.114). כעת, עבור $v_1, \dots, v_n \in V$, נגדיר

$$9.38 \quad \alpha(v_1, \dots, v_n) = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \text{perm } n} (\text{sign}(j_1, \dots, j_n)) \varphi_{j_1}(v_1) \cdots \varphi_{j_n}(v_n).$$

הוודוא כי α תבנית n -ליניארית מעל V הוא פשוט.

כדי לראות ש- α מתחלפת, נניח ש- $v_1, \dots, v_n \in V$ עם $v_1 = v_2$. לכל $(j_1, \dots, j_n) \in \text{perm } n$, לתמורה $(j_2, j_1, j_3, \dots, j_n)$ סימן הפוך. מאחר ש- $v_1 = v_2$, התרומות של שתי התמורות לסכום 9.38 מבטלות האחת את השנייה. לכן $\alpha(v_1, v_1, v_3, \dots, v_n) = 0$. באופן דומה, $\alpha(v_1, \dots, v_n) = 0$ אם שני וקטורים כלשהם ברשימה $v_1, \dots, v_n$ שווים. לפיכך α מתחלפת.

לסיים, נתבונן ב- 9.38 כאשר כל $v_k = e_k$. מאחר ש- $\varphi_j(e_k) = 0$ אם $j \neq k$ ושווה 1 אם $j = k$, רק התמורה $(1, \dots, n)$ תורמת תרומה השונה מאפס לאגף הימני של 9.38 במקרה הזה, ומעניקה למשוואה את הערך $\alpha(e_1, \dots, e_n) = 1$. לפיכך הפקנו תבנית n -ליניארית מתחלפת שונה מאפס α מעל V , כפי שרצינו. ■

הנוסחה 9.38 שבה השתמשנו בהוכחה האחרונה לבניית תבנית n -ליניארית מתחלפת נובעת מהנוסחה ב- 9.36, ונוסחה זו נובעת באופן טבעי מהתכונות של תבנית מולטי-ליניארית מתחלפת.

מוקדם יותר הראינו כי הערך של תבנית מולטי-ליניארית מתחלפת המוחלת על רשימה תלויה ליניארית הוא 0; ראו 9.28. המסקנה הבאה מספקת כיוון הפוך ל- 9.28 עבור תבניות n -ליניאריות מתחלפות כאשר $\dim V = n$. במסקנה הבאה, הקביעה כי α שונה מאפס משמעותה (כמו עבור כל פונקציה) ש- α אינה הפונקציה מעל V^n שהיא זהותית 0.

9.39 תבניות $(\dim V)$ -ליניאריות מתחלפות ואי-תלות ליניארית

יהי $\dim V = n$. נניח ש- α תבנית n -ליניארית מתחלפת מעל V השונה מאפס ו- $e_1, \dots, e_n$ רשימה של וקטורים ב- V . אזי

$$\alpha(e_1, \dots, e_n) \neq 0$$

אס-ורק-אם $e_1, \dots, e_n$ בלתי תלויה ליניארית.

הוכחה תחילה נניח כי $\alpha(e_1, \dots, e_n) \neq 0$. אזי 9.28 גורר ש- $e_1, \dots, e_n$ בלתי תלויה ליניארית.

להוכחת הגרירה בכיוון השני, כעת נניח ש- $e_1, \dots, e_n$ בלתי תלויה ליניארית. מאחר ש- $\dim V = n$, מכאן נובע ש- $e_1, \dots, e_n$ בסיס של V (ראו 2.38). מאחר ש- α אינה תבנית n -ליניארית האפס, קיימים $v_1, \dots, v_n \in V$ כך ש- $\alpha(v_1, \dots, v_n) \neq 0$. כעת 9.36 גוררת ש- $\alpha(e_1, \dots, e_n) \neq 0$.

תרגילים טז

1 נניח ש- m מספר שלם חיובי. הראו כי $\dim V^{(m)} = (\dim V)^m$.

2 נניח ש- $n \geq 3$ ו- $\alpha: F^n \times F^n \times F^n \rightarrow F$ מוגדרת על ידי

$$\alpha((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n)) = x_1 y_2 z_3 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1 - x_1 y_3 z_2 + x_3 y_1 z_2 + x_2 y_3 z_1.$$

הראו כי α תבנית 3-ליניארית מתחלפת מעל F .

3 נניח ש- m הוא מספר שלם חיובי ו- α היא תבנית m -ליניארית מעל V כך ש- $\alpha(v_1, \dots, v_m) = 0$ בכל עת ש- $v_1, \dots, v_m$ רשימה של וקטורים ב- V עם $v_j = v_{j+1}$ עבור $j \in \{1, \dots, m-1\}$ כלשהו. הוכיחו כי α תבנית m -ליניארית מתחלפת מעל V .

4 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם $\alpha \in V_{\text{alt}}^{(4)}$, אזי

$$\{(v_1, v_2, v_3, v_4) \in V^4 : \alpha(v_1, v_2, v_3, v_4) = 0\}$$

תת-מרחב של V^4 .

- 5 נניח ש- m מספר שלם חיובי ו- β תבנית m -ליניארית מעל V . נגדיר תבנית m -ליניארית α מעל V על ידי

$$\alpha(v_1, \dots, v_m) = \sum_{(j_1, \dots, j_m) \in \text{perm } m} (\text{sign}(j_1, \dots, j_m)) \beta(v_{j_1}, \dots, v_{j_m})$$

עבור $v_1, \dots, v_m \in V$. הסבירו מדוע $\alpha \in V_{\text{alt}}^{(m)}$.

- 6 נניח ש- m מספר שלם חיובי ו- β תבנית m -ליניארית מעל V . נגדיר תבנית m -ליניארית α מעל V על ידי

$$\alpha(v_1, \dots, v_m) = \sum_{(j_1, \dots, j_m) \in \text{perm } m} \beta(v_{j_1}, \dots, v_{j_m})$$

עבור $v_1, \dots, v_m \in V$. הסבירו מדוע

$$\alpha(v_{k_1}, \dots, v_{k_m}) = \alpha(v_1, \dots, v_m)$$

לכל $v_1, \dots, v_m \in V$ ולכל $(k_1, \dots, k_m) \in \text{perm } m$.

- 7 הביאו דוגמה של תבנית 2-ליניארית מתחלפת שונה מאפס α מעל $\mathbb{R}^3$ ורשימה בלתי תלויה ליניארית v_1, v_2 ב- $\mathbb{R}^3$ כך ש- $\alpha(v_1, v_2) = 0$.

תרגיל זה מראה כי 9.39 עלולה להיכשל אם נסיר את ההנחה כי $n = \dim V$.

טז דטרמיננטות

הגדרת הדטרמיננטה

הנתיב אל הגדרה נקייה ויפה של הדטרמיננטה של אופרטור, שאינה תלויה בבחירת בסיס, עובר דרך ההגדרה הבאה.

9.40 הגדרה: α_T

נניח ש- m מספר שלם חיובי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. עבור $\alpha \in V_{\text{alt}}^{(m)}$, נגדיר $\alpha_T \in V_{\text{alt}}^{(m)}$ על ידי

$$\alpha_T(v_1, \dots, v_m) = \alpha(Tv_1, \dots, Tv_m)$$

לכל רשימת וקטורים $v_1, \dots, v_m$ ב- V .

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. אם $\alpha \in V_{\text{alt}}^{(m)}$ ו- $v_1, \dots, v_m$ רשימת וקטורים ב- V עם $v_j = v_k$ עבור $j \neq k$ כלשהם, אזי $Tv_j = Tv_k$, מה שגורר ש- $\alpha_T(v_1, \dots, v_m) = 0$. לפיכך הפונקציה $\alpha \mapsto \alpha_T$ היא העתקה ליניארית של $V_{\text{alt}}^{(m)}$ לעצמו.

אנו יודעים כי $\dim V_{\text{alt}}^{(\dim V)} = 1$ (ראו 9.37). כל העתקה ליניארית ממרחב וקטורי חד-ממדי לעצמו היא כפל בסקלר יחיד כלשהו. עבור ההעתקה הליניארית $\alpha \mapsto \alpha_T$, נגדיר כעת את $\det T$ כסקלר זה.

9.41 הגדרה: דטרמיננטה של אופרטור, $\det T$

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. הדטרמיננטה של T , מסומנת על ידי $\det T$, מוגדרת כמספר היחיד ב- F כך ש-

$$\alpha_T = (\det T) \alpha$$

לכל $\alpha \in V_{\text{alt}}^{(\dim V)}$.

9.42 דוגמה: דטרמיננטות של אופרטורים

יהי $n = \dim V$.

- אם I הוא אופרטור הזהות מעל V , אזי $\alpha_I = \alpha$ לכל $\alpha \in V_{\text{alt}}^{(n)}$. לפיכך $\det I = 1$.
- באופן כללי יותר, אם $\lambda \in F$, אזי $\alpha_{\lambda I} = \lambda^n \alpha$ לכל $\alpha \in V_{\text{alt}}^{(n)}$. לפיכך $\det(\lambda I) = \lambda^n$.
- באופן כללי עוד יותר, אם $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\lambda \in F$, אזי $\alpha_{\lambda T} = \lambda^n \alpha_T = \lambda^n (\det T) \alpha$. לפיכך $\det(\lambda T) = \lambda^n \det T$.
- נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ וקיים בסיס $e_1, \dots, e_n$ של V המורכב מווקטורים עצמיים של T , השייכים לערכים העצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. אם $\alpha \in V_{\text{alt}}^{(n)}$, אזי $\alpha_T(e_1, \dots, e_n) = \alpha(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n) = (\lambda_1 \cdots \lambda_n) \alpha(e_1, \dots, e_n)$. אם $\alpha \neq 0$, אזי 9.39 גוררת ש- $\alpha(e_1, \dots, e_n) \neq 0$. לפיכך המשוואה לעיל גוררת ש- $\det T = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

משימתנו הבאה היא להגדיר ולתת נוסחה עבור הדטרמיננטה של מטריצה ריבועית. לצורך כך, נשייך לכל מטריצה ריבועית אופרטור ואז נגדיר את הדטרמיננטה של המטריצה כדטרמיננטה של האופרטור המשוך.

9.43 הגדרה: דטרמיננטה של מטריצה, $\det A$

נניח ש- n מספר שלם חיובי ו- A היא מטריצה ריבועית $n \times n$ עם איברים ב- F . יהי $T \in \mathcal{L}(F^n)$ האופרטור שהמטריצה שלו ביחס לבסיס הסטנדרטי של F^n שווה ל- A . הדטרמיננטה של A , מסומנת על ידי $\det A$, מוגדרת על ידי $\det A = \det T$.

9.44 דוגמה: דטרמיננטות של מטריצות

- אם I היא מטריצת הזהות $n \times n$, אזי האופרטור המתאים מעל F^n הוא אופרטור הזהות I מעל F^n . לפיכך הסעיף הראשון של 9.42 גורר שהדטרמיננטה של מטריצת הזהות היא 1.

- נניח ש- A מטריצה אלכסונית עם $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ על האלכסון. אזי לאופרטור המתאים מעל F^n יש את הבסיס הסטנדרטי של F^n כווקטורים עצמיים, עם ערכים עצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. לפיכך הסעיף האחרון של 9.42 גורר ש- $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

עבור המסקנה הבאה, חשבו על כל רשימה $v_1, \dots, v_n$ של n וקטורים ב- F^n כרשימה של וקטורי עמודה $n \times 1$. הסימון $(v_1 \cdots v_n)$ אם כן מסמן מטריצה ריבועית $n \times n$ שהעמודה ה- k^{th} שלה היא v_k לכל $k = 1, \dots, n$.

9.45 דטרמיננטה היא תבנית מולטי-ליניארית מתחלפת

נניח ש- n מספר שלם חיובי. ההעתקה השולחת רשימה של וקטורים $v_1, \dots, v_n$ ב- F^n אל $\det(v_1 \cdots v_n)$ היא תבנית n -ליניארית מתחלפת מעל F^n .

הוכחה יהי $e_1, \dots, e_n$ הבסיס הסטנדרטי של F^n ונניח ש- $v_1, \dots, v_n$ רשימת וקטורים ב- F^n . יהי $T \in \mathcal{L}(F^n)$ האופרטור כך ש- $Te_k = v_k$ עבור $k = 1, \dots, n$. לפיכך T הוא האופרטור שהמטריצה שלו ביחס ל- $e_1, \dots, e_n$ היא $(v_1 \cdots v_n)$. לכן $\det(v_1 \cdots v_n) = \det T$, לפי ההגדרה של הדטרמיננטה של מטריצה.

תהי α תבנית n -ליניארית מתחלפת מעל F^n כך ש- $\alpha(e_1, \dots, e_n) = 1$. אזי

$$\begin{aligned} \det(v_1 \cdots v_n) &= \det T \\ &= (\det T) \alpha(e_1, \dots, e_n) \\ &= \alpha(Te_1, \dots, Te_n) \\ &= \alpha(v_1, \dots, v_n), \end{aligned}$$

כאשר השורה השלישית נובעת מהגדרת הדטרמיננטה של אופרטור. המשוואה לעיל מראה שההעתקה השולחת רשימת וקטורים $v_1, \dots, v_n$ ב- F^n אל $\det(v_1 \cdots v_n)$ היא התבנית ה- n -ליניארית המתחלפת α מעל F^n .

למסקנה הקודמת יש מספר השלכות חשובות. לדוגמה, המסקנה גוררת באופן ישיר שהדטרמיננטה של מטריצה עם שתי עמודות זהות היא 0. מאוחר יותר עוד נשוב אל מספר השלכות נוספות, אך לעת עתה אנו מעוניינים להעניק נוסחה לדטרמיננטה של מטריצה ריבועית. נזכיר כי אם A מטריצה, אזי $A_{j,k}$ מסמן את האיבר בשורה j , עמודה k של A .

9.46 נוסחה עבור דטרמיננטה של מטריצה

נניח ש- n מספר שלם חיובי ו- A מטריצה ריבועית $n \times n$. אזי

$$\det A = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \text{perm } n} (\text{sign}(j_1, \dots, j_n)) A_{j_1, 1} \cdots A_{j_n, n}.$$

הוכחה נפעיל את 9.36 עם $V = \mathbb{F}^n$ ו- $e_1, \dots, e_n$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$ ו- α התבנית n -ליניארית המתחלפת מעל $\mathbb{F}^n$ השולחת את $v_1, \dots, v_n$ אל $(v_1 \cdots v_n)$ $\det$ [ראו 9.45]. אם כל v_k הוא העמודה ה- k^{th} של A , אזי כל $b_{j,k}$ ב-9.36 שווה ל- $A_{j,k}$. לסיום,

$$\alpha(e_1, \dots, e_n) = \det(e_1 \cdots e_n) = \det I = 1.$$

לפיכך הנוסחה ב-9.36 הופכת לנוסחה שנקבעה במסקנה זו.

9.47 דוגמה: נוסחה מפורשת עבור דטרמיננטה

• אם A מטריצה 2×2 , אזי הנוסחה ב-9.46 הופכת ל-

$$\det A = A_{1,1}A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,2}.$$

• אם A מטריצה 3×3 , אזי הנוסחה ב-9.46 הופכת ל-

$$\begin{aligned} \det A = & A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} - A_{2,1}A_{1,2}A_{3,3} - A_{3,1}A_{2,2}A_{1,3} \\ & - A_{1,1}A_{3,2}A_{2,3} + A_{3,1}A_{1,2}A_{2,3} + A_{2,1}A_{3,2}A_{1,3}. \end{aligned}$$

הסכום בנוסחה ב-9.46 מכיל $n!$ איברים. מאחר ש- $n!$ גדל במהירות ככל ש- n גדל, הנוסחה ב-9.46 אינה שיטה בת-קיימא לחישוב דטרמיננטות אפילו עבור n בסדר גודל צנוע. לדוגמה, $10!$ הוא מעל לשלושה מיליון, ו- $100!$ הוא בערך 10^{158} , המוביל לסכום שאפילו המחשב המהיר ביותר אינו יכול לחשב. בקרוב נכיר מסקנות שיובילו אותנו לשיטות חישוב דטרמיננטות מהירות יותר מהחישוב הישיר של הסכום ב-9.46.

9.48 דטרמיננטה של מטריצה משולשית עליונה

נניח ש- A מטריצה משולשית עליונה עם $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ על האלכסון. אזי $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

הוכחה אם $(j_1, \dots, j_n) \in \text{perm } n$ עם $(j_1, \dots, j_n) \neq (1, \dots, n)$, אזי $j_k > k$ עבור $k \in \{1, \dots, n\}$ כלשהו, מה שגורר ש- $A_{j_k, k} = 0$. לפיכך התמורה היחידה שיכולה להוסיף ערך השונה מאפס לסכום ב-9.46 היא התמורה $(1, \dots, n)$. מאחר ש-

$$\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

מכאן נובע ש- $A_{k,k} = \lambda_k$ לכל $k = 1, \dots, n$.

תכונות של דטרמיננטות

הגדרת הדטרמיננטה שלנו מובילה להוכחה הקסומה הבאה לכך שהדטרמיננטה כפלית.

9.49 דטרמיננטה היא כפלית

א. נניח ש- $S, T \in \mathcal{L}(V)$. אזי $\det(ST) = (\det S)(\det T)$.

ב. נניח ש- A ו- B מטריצות ריבועיות באותו הגודל. אזי $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

הוכחה

$$\begin{aligned} \text{א. יהי } n = \dim V. \text{ נניח ש- } \alpha \in V_{\text{alt}}^{(n)} \text{ ו- } v_1, \dots, v_n \in V. \text{ אזי} \\ \alpha_{ST}(v_1, \dots, v_n) &= \alpha(STv_1, \dots, STv_n) \\ &= (\det S)\alpha(Tv_1, \dots, Tv_n) \\ &= (\det S)(\det T)\alpha(v_1, \dots, v_n), \end{aligned}$$

כאשר המשוואה הראשונה נובעת מהגדרת α_{ST} , המשוואה השנייה נובעת מהגדרת $\det S$, והמשוואה השלישית נובעת מהגדרת $\det T$. המשוואה לעיל גוררת ש- $\det(ST) = (\det S)(\det T)$.

ב. יהיו $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$ כך ש- $\mathcal{M}(S) = A$ ו- $\mathcal{M}(T) = B$, כאשר כל המטריצות של האופרטורים בהוכחה זו הן ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. אזי $\mathcal{M}(ST) = \mathcal{M}(S)\mathcal{M}(T) = AB$ (ראו 3.43). לפיכך

$$\det(AB) = \det(ST) = (\det S)(\det T) = (\det A)(\det B),$$

כאשר השוויון השני נובע מהמסקנה בסעיף (א).

הדטרמיננטה של אופרטור קובעת האם האופרטור הפיך.

9.50 הפיך $\Leftrightarrow$ דטרמיננטה שונה מאפס

אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ הוא הפיך אם ורק אם $\det T \neq 0$. יתר על כן, אם T הפיך, אזי $\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det T}$.

הוכחה תחילה נניח כי T הפיך. לפיכך $TT^{-1} = I$. כעת 9.49 גורר ש- $1 = \det I = \det(TT^{-1}) = (\det T)(\det(T^{-1}))$.

לכן $\det T \neq 0$ ו- $\det(T^{-1})$ הוא האיבר ההופכי לכפל של $\det T$.

להוכחת הכיוון האחר, כעת נניח ש- $\det T \neq 0$. נניח ש- $v \in V$ ו- $v \neq 0$. תהי $e_1, e_2, \dots, e_n$ בסיס של V ותהי $\alpha \in V_{\text{alt}}^{(n)}$ כך ש- $\alpha \neq 0$. אזי $\alpha(v, e_2, \dots, e_n) \neq 0$ (לפי 9.39). כעת

$$\alpha(Tv, Te_2, \dots, Te_n) = (\det T)\alpha(v, e_2, \dots, e_n) \neq 0.$$

לפיכך $Tv \neq 0$. לכן T הפיך.

A מטריצה $n \times n$ הפיכה (ראו 3.80 עבור ההגדרה של מטריצה הפיכה) אס-ורק-אם האופרטור מעל F^n המשוך למטריצה A (באמצעות הבסיס הסטנדרטי של F^n) הפיך. לפיכך המסקנה הקודמת מראה שמטריצה ריבועית A הפיכה אס-ורק-אם $\det A \neq 0$.

9.51 ערכים עצמיים ודטרמיננטות

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\lambda \in F$. אזי λ ערך עצמי של T אס-ורק-אם $\det(\lambda I - T) = 0$.

הוכחה המספר λ הוא ערך עצמי של T אס-ורק-אם $T - \lambda I$ אינו הפיך (ראו 5.7), מה שקורה אס-ורק-אם $\lambda I - T$ אינו הפיך, מה שקורה אס-ורק-אם $\det(\lambda I - T) = 0$ (לפי 9.50).

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $S: W \rightarrow V$ העתקה ליניארית הפיכה. כדי להוכיח כי $\det(S^{-1}TS) = \det T$, נוכל לנסות להשתמש ב- 9.49 ו- 9.50 ולכתוב

$$\begin{aligned} \det(S^{-1}TS) &= (\det S^{-1})(\det T)(\det S) \\ &= \det T. \end{aligned}$$

הוכחה זו עובדת אם $W = V$, אך אם $W \neq V$ היא חסרת משמעות מאחר שהדטרמיננטה מוגדרת רק עבור העתקות ליניאריות ממרחב וקטורי לעצמו, בעוד S מעתיקה את W אל V , ההופכת את $\det S$ לבלתי מוגדרת. ההוכחה הניתנת להלן עוקפת את הבעיה הזו ותקפה גם כאשר $W \neq V$.

9.52 הדטרמיננטה שמורה תחת דִּמְיוֹן

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $S: W \rightarrow V$ העתקה ליניארית הפיכה. אזי $\det(S^{-1}TS) = \det T$.

הוכחה יהי $n = \dim W = \dim V$. נניח ש- $\tau \in W_{\text{alt}}^{(n)}$. נגדיר $\alpha \in V_{\text{alt}}^{(n)}$ על ידי

$$\alpha(v_1, \dots, v_n) = \tau(S^{-1}v_1, \dots, S^{-1}v_n)$$

עבור $v_1, \dots, v_n \in V$. נניח ש- $w_1, \dots, w_n \in W$. אזי

$$\begin{aligned} \tau_{S^{-1}TS}(w_1, \dots, w_n) &= \tau(S^{-1}TSw_1, \dots, S^{-1}TSw_n) \\ &= \alpha(TSw_1, \dots, TSw_n) \\ &= \alpha_T(Sw_1, \dots, Sw_n) \\ &= (\det T)\alpha(Sw_1, \dots, Sw_n) \\ &= (\det T)\tau(w_1, \dots, w_n). \end{aligned}$$

מהמשוואה לעיל ומהגדרת הדטרמיננטה של האופרטור $S^{-1}TS$ אנו מסיקים כי $\det(S^{-1}TS) = \det T$.

עבור המקרה הפרטי שבו $V = \mathbb{F}^n$ ו- $e_1, \dots, e_n$ הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$, המסקנה הבאה מתקיימת מתוקף הגדרת הדטרמיננטה של מטריצה. האגף השמאלי של המשוואה במסקנה הבאה אינו תלוי בבחירת בסיס, ומשמעות הדבר היא שהאגף הימני אינו תלוי בבחירת בסיס.

9.53 דטרמיננטה של אופרטור שווה לדטרמיננטה של המטריצה שלו

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $e_1, \dots, e_n$ בסיס של V . אזי

$$\det T = \det \mathcal{M}(T, (e_1, \dots, e_n)).$$

הוכחה תהי $f_1, \dots, f_n$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. תהי $S: \mathbb{F}^n \rightarrow V$ ההעתקה הליניארית כך ש- $Sf_k = e_k$ לכל $k = 1, \dots, n$. לפיכך $\mathcal{M}(S, (f_1, \dots, f_n), (e_1, \dots, e_n))$ ו- $\mathcal{M}(S^{-1}, (e_1, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_n))$ שתיהן שוות למטריצת הזהות $n \times n$. לכן

$$\mathcal{M}(S^{-1}TS, (f_1, \dots, f_n)) = \mathcal{M}(T, (e_1, \dots, e_n)), \quad 9.54$$

כפי שנגרר משני יישומים של 3.43. לפיכך

$$\begin{aligned} \det T &= \det(S^{-1}TS) \\ &= \det \mathcal{M}(S^{-1}TS, (f_1, \dots, f_n)) \\ &= \det \mathcal{M}(T, (e_1, \dots, e_n)), \end{aligned}$$

כאשר השורה הראשונה נובעת מ- 9.52, השורה השנייה נובעת מהגדרת הדטרמיננטה של מטריצה, והשורה השלישית נובעת מ- 9.54. ■

המסקנה הבאה מעניקה דרך לחשוב על דטרמיננטות באופן אינטואיטיבי יותר מאשר ההגדרה או הנוסחה ב- 9.46. יכולנו להציג את האפיון במסקנה להלן כהגדרה של הדטרמיננטה של אופרטור מעל מרחב וקטורי מרוכב מממד סופי, ובמקרה זה ההגדרה הנוכחית הייתה הופכת לתוצאה של הגדרה זו.

9.55 אם $F = C$, אזי הדטרמיננטה שווה למכפלת הערכים העצמיים

נניח ש- $F = C$ ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי $\det T$ שווה למכפלת הערכים העצמיים של T , כאשר כל ערך עצמי נכלל במכפלה מספר פעמים השווה לריבוי.

הוכחה קיים בסיס של V אשר ביחס אליו יש ל- T מטריצה משולשית עליונה כאשר איברי אלכסון המטריצה מורכבים מהערכים העצמיים של T , כאשר מספר המופעים של כל ערך עצמי שווה לריבוי—ראו 8.37. לפיכך 9.53 ו- 9.48 גוררים ש- $\det T$ שווה למכפלה של הערכים העצמיים של T , כאשר מספר המופעים של כל ערך עצמי שווה לריבוי. ■

כפי שהמסקנה הבאה מראה, הדטרמיננטה עובדת יפה עם המשוחלפת של מטריצה ריבועית, עם האופרטור הדואלי ועם האופרטור הצמוד של אופרטור מעל מרחב מכפלה פנימית.

9.56 דטרמיננטה של משוחלפת, זואלי, או אופרטור צמוד

- א. נניח ש- A מטריצה ריבועית. אזי $\det A^t = \det A$.
- ב. נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי $\det T' = \det T$.
- ג. נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי $\det(T^*) = \overline{\det T}$.

הוכחה

- א. יהי n מספר שלם חיובי. נגדיר $\alpha: (\mathbb{F}^n)^n \rightarrow \mathbb{F}$ על ידי $\alpha(v_1, \dots, v_n) = \det \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}^t$.
לכל $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{F}^n$. הנוסחה ב-9.46 עבור הדטרמיננטה של מטריצה מראה כי α היא תבנית n -ליניארית מעל $\mathbb{F}^n$.
- נניח ש- $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{F}^n$ ו- $v_j = v_k$ עבור $j \neq k$ כלשהם. אם B מטריצה $n \times n$, אזי $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}^t B$ אינה יכולה להיות שווה למטריצת הזהות מאחר ששורה j ושורה k של $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}^t B$ שוות. לפיכך $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}^t$ אינה הפיכה, מה שגורר ש- $\alpha(v_1, \dots, v_n) = 0$. לכן α היא תבנית n -ליניארית מתחלפת מעל $\mathbb{F}^n$.
- שימו לב ש- α מופעלת על הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$ שווה 1. מאחר שהמרחב הווקטורי של תבניות n -ליניאריות מתחלפות מעל $\mathbb{F}^n$ הוא חד-ממדי (לפי 9.37), מכאן נובע ש- α היא פונקציית הדטרמיננטה. לפיכך (א) מתקיים.
- ב. המשוואה $\det T' = \det T$ נובעת מ- (א) ו-9.53 ו-3.132.
- ג. נבחר בסיס אורתונורמלי של V . המטריצה של T^* ביחס לבסיס זה היא הצמודה-משוחלפת של המטריצה של T ביחס לבסיס זה (לפי 7.9). לפיכך 9.53, 9.46, ו- (א) גוררים ש- $\det(T^*) = \overline{\det T}$.

9.57 תוצאות שימושיות בחישוב דטרמיננטות

- א. אם שתי עמודות או שתי שורות של מטריצה ריבועית שוות, אזי הדטרמיננטה של המטריצה שווה 0.
- ב. נניח ש- A מטריצה ריבועית ו- B המטריצה שהושגה מ- A באמצעות החלפת שתי עמודות או שתי שורות. אזי $\det A = -\det B$.
- ג. אם עמודה אחת או שורה אחת של מטריצה ריבועית מוכפלת בסקלר, אזי ערך הדטרמיננטה מוכפל על ידי אותו סקלר.
- ד. אם נחבר כפולת סקלר של עמודה אחת של מטריצה ריבועית לעמודה אחרת, אזי ערך הדטרמיננטה אינו משתנה.
- ה. אם נחבר כפולת סקלר של שורה אחת של מטריצה ריבועית לשורה אחרת, אזי ערך הדטרמיננטה אינו משתנה.

הוכחה הטענות במסקנה זו נובעות מהתוצאה כי $v_1, \dots, v_n \mapsto \det \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}$ ו- $v_1, \dots, v_n \mapsto \det \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}^t$ F^n שתייהן תבניות ליניאריות מתחלפות מעל F^n [ראו 9.45 ו-9.56(א)].

$$\begin{aligned} & \text{לדוגמה, להוכחת (ד) נניח ש- } v_1, \dots, v_n \in F^n \text{ ו- } c \in F. \text{ אזי} \\ & \det \begin{pmatrix} v_1 + cv_2 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} v_2 & v_2 & v_3 & \dots & v_n \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

כאשר המשוואה הראשונה נובעת מהתכונה המולטי-ליניארית והמשוואה השנייה נובעת מהתכונה המתחלפת. המשוואה לעיל מראה שחיבור כפולה של העמודה השנייה לעמודה הראשונה אינו משנה את ערך הדטרמיננטה. אותה מסקנה מתקיימת עבור כל שתי עמודות. לפיכך (ד) מתקיים.

ההוכחה של (ה) נובעת מ- (ד) ומ-9.56(א). ההוכחות של (א), (ב) ו- (ג) משתמשות בכלים דומים ומושאות לקוראים.

עבור מטריצות שאיבריהן מספרים קונקרטיים, המסקנה לעיל מובילה לשיטה לחישוב הדטרמיננטה שמהירה באופן משמעותי מן היישום הישיר של הנוסחה ב-9.46. בפרט, הפעילו את שיטת החילוץ של גאוס: החלפת שורות [לפי 9.57(ב)], הדבר משנה את הדטרמיננטה בפקטור של -1 , הכפלת שורה בקבוע השונה מאפס [לפי 9.57(ג)], הדטרמיננטה מוכפלת באותו הקבוע, והוספת כפולת שורה אחת לשורה אחרת [לפי 9.57(ה)], אינה משנה את הדטרמיננטה] – להפקת מטריצה משולשית עליונה, שהדטרמיננטה שלה היא מכפלת איברי האלכסון (לפי 9.48). אם התוכנה שבה אתם משתמשים מבצעת מעקב אחרי מספר השורות שהוחלפו והקבועים שבהם נעשה שימוש להכפלת שורות, אזי חישוב הדטרמיננטה של המטריצה המקורית בר השגה.

מאחר שמספר $\lambda \in F$ הוא ערך עצמי של אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ אם-ורק אם $\det(\lambda I - T) = 0$ (לפי 9.51), אתם עלולים להתפתות לחשוב שדרך מהירה למצוא ערכים עצמיים היא לבחור בסיס של V , לסמן $A = \mathcal{M}(T)$, לחשב את $\det(\lambda I - A)$, ואז לפתור את המשוואה $\det(\lambda I - A) = 0$ עבור λ . אולם הליך זה יעיל רק לעיתים נדירות, מלבד כאשר $\dim V = 2$ (או כאשר $\dim V$ שווה 3 או 4 אם ברצונכם להשתמש בנוסחאות למציאת שורשים למשוואות ממעלה שלישית או רביעית). בעיה אחת היא שההליך לחישוב דטרמיננטה שתואר בפסקה שלעיל אינו עובד כאשר המטריצה מכילה סמל (כמו ה- λ ב- $\lambda I - A$). בעיה זו נובעת מכך שבשיטת החילוץ של גאוס יש להכריע אם גדלים מסוימים שווים 0, והכרעות אלה נעשות מסובכות בביטויים המערבים סמל λ .

נזכיר כי אופרטור מעל מרחב מכפלה פנימית מממד סופי הוא אוניטרי אם הוא משמר נורמות (ראו 7.51 והפסקה שאחריה). לכל ערך עצמי של אופרטור אוניטרי יש ערך מוחלט 1 (לפי 7.54). לפיכך למכפלת הערכים העצמיים של אופרטור אוניטרי יש ערך מוחלט 1. לכן (לכל הפחות במקרה של $F = \mathbb{C}$) לדטרמיננטה של אופרטור אוניטרי יש ערך מוחלט 1 (לפי 9.55). המסקנה הבאה מספקת הוכחה התקפה ללא ההנחה ש- $F = \mathbb{C}$.

9.58 לכל אופרטור אוניטרי יש דטרמיננטה עם ערך מוחלט 1

נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ו- $S \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור אוניטרי. אזי $|\det S| = 1$.

הוכחה מאחר ש- S אוניטרי, $I = S^*S$ (ראו 7.53). לפיכך

$$1 = \det(S^*S) = (\det S^*)(\det S) = \overline{(\det S)}(\det S) = |\det S|^2,$$

כאשר השוויון השני נובע מ-9.49(א) והשוויון השלישי נובע מ-9.56(ג). המשוואה לעיל גוררת ש- $|\det S| = 1$.

הדטרמיננטה של אופרטור חיובי מעל מרחב מכפלה פנימית משתלבת היטב באנלוגיה שלפיה אופרטורים כאלה מקבילים למספרים הממשיים האי-שליליים.

9.59 לכל אופרטור חיובי יש דטרמיננטה אי-שלילית

נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור חיובי. אזי $\det T \geq 0$.

הוכחה לפי משפט הפירוק הספקטרלי (7.29 או 7.31), יש ל- V בסיס אורתונורמלי המורכב מווקטורים עצמיים של T . לפיכך לפי הסעיף האחרון של 9.42, $\det T$ שווה למכפלת הערכים העצמיים של T , עם אפשרות לחזרות. כל ערך עצמי של T הוא מספר אי-שלילי (לפי 7.38). לפיכך אנו מסיקים ש- $\det T \geq 0$.

נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. ניזכר כי רשימת השורשים הריבועיים האי-שליליים של הערכים העצמיים של T^*T (כאשר מספר המופעים של כל ערך עצמי שווה לריבוי) נקראת רשימת הערכים הסינגולריים של T (ראו יחידה 5).

9.60 $|\det T| =$ מכפלת ערכים סינגולריים של T

נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. אזי

$$|\det T| = \sqrt{\det(T^*T)} = \text{מכפלת ערכים סינגולריים של } T.$$

הוכחה מתקיים

$$|\det T|^2 = \overline{(\det T)}(\det T) = (\det(T^*))(\det T) = \det(T^*T),$$

כאשר השוויון האמצעי נובע מ-9.56(ג) והשוויון האחרון נובע מ-9.49(א). הוצאת שורשים לשני אגפי המשוואה לעיל מראה ש-

$$|\det T| = \sqrt{\det(T^*T)}$$

נסמן ב- $s_1, \dots, s_n$ את רשימת הערכים הסינגולריים של T . לפיכך $s_1^2, \dots, s_n^2$ היא רשימת הערכים העצמיים של T^*T (עם חזרות בהתאם), המשווית לבסיס אורתונורמלי של V המורכב מווקטורים עצמיים של T^*T . לכן הסעיף האחרון של 9.42 גורר ש-

$$\det(T^*T) = s_1^2 \cdots s_n^2.$$

לפיכך $|\det T| = s_1 \cdots s_n$, כפי שרצינו.

אופרטור T מעל מרחב מכפלה פנימית ממשי משנה נפח בפקטור של מכפלת הערכים הסינגולריים (לפי 7.111). לפיכך המסקנה הבאה נובעת ישירות מ־ 7.111 ו־ 9.60. מסקנה זו מסבירה מדוע הערך המוחלט של דטרמיננטה מופיע במשפט החלפת המשתנים הכללי בחדו"א.

9.61 T משנה נפח בפקטור של $|\det T|$

נניח ש־ $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ו־ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. אזי
 $\text{volume } T(\Omega) = |\det T|(\text{volume } \Omega).$

עבור אופרטורים מעל מרחבים וקטוריים מרוכבים מממד סופי, אנו נחבר כעת את הדטרמיננטה לפולינום שאותו כבר פגשנו.

9.62 אם $F = \mathbb{C}$, אזי הפולינום האופייני של T שווה ל־ $\det(zI - T)$

נניח ש־ $F = \mathbb{C}$ ו־ $T \in \mathcal{L}(V)$. נסמן ב־ $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ את הערכים העצמיים השונים של T , וב־ $d_1, \dots, d_m$ את הריבויים שלהם. אזי
 $\det(zI - T) = (z - \lambda_1)^{d_1} \dots (z - \lambda_m)^{d_m}.$

הוכחה קיים בסיס של V אשר ביחס אליו יש ל־ T מטריצה משולשית עליונה כאשר כל λ_k מופיע על האלכסון בדיוק d_k פעמים (לפי 8.37). ביחס לבסיס זה, יש ל־ $zI - T$ מטריצה משולשית עליונה כאשר $z - \lambda_k$ מופיע על האלכסון בדיוק d_k פעמים לכל k . לפיכך מ־ 9.48 נקבל את המשוואה הרצויה.

נניח ש־ $F = \mathbb{C}$ ו־ $T \in \mathcal{L}(V)$. הפולינום האופייני של T הוגדר ב־ 8.26 כפולינום באגף הימני של המשוואה ב־ 9.62. לא הגדרנו עד כה פולינום אופייני של אופרטור מעל מרחב וקטורי ממשי מממד סופי מאחר שלאופרטורים אלו ייתכן שלא יהיו ערכים עצמיים, מה שהופך הגדרה תוך שימוש באגף הימני של המשוואה ב־ 9.62 לבלתי מתאימה.

כעת נציג הגדרה חדשה של הפולינום האופייני, כשהמוטיבציה שלה נובעת מ־ 9.62. הגדרה חדשה זו תקפה במרחבים וקטוריים ממשיים ומרוכבים כאחד. המשוואה ב־ 9.62 מראה לנו כי הגדרה חדשה זו שקולה להגדרה הקודמת כאשר $(F = \mathbb{C})$.

9.63 הגדרה: פולינום אופייני

נניח ש־ $T \in \mathcal{L}(V)$. הפולינום המוגדר על ידי
 $z \mapsto \det(zI - T)$
 נקרא הפולינום האופייני של T .

הנוסחה ב־ 9.46 מראה שהפולינום האופייני של אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ הוא פולינום מתוקן ממעלה $\dim V$. השורשים ב־ F של הפולינום האופייני של T הם בדיוק הערכים העצמיים של T (לפי 9.51).

מוקדם יותר הוכחנו את משפט קיילי-המילטון (8.29) במקרה המרוכב. כעת אנו יכולים להרחיב מסקנה זו לאופרטורים מעל מרחבים וקטוריים ממשיים.

9.64 משפט קיילי-המילטון

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- q הוא הפולינום האופייני של T . אזי $q(T) = 0$.

הוכחה אם $F = C$, אזי המשוואה $q(T) = 0$ נובעת מ- 9.62 ו- 8.29. כעת נניח ש- $F = R$. נקבע בסיס של V , ותהי A המטריצה של T ביחס לבסיס זה. יהי S האופרטור מעל $C^{\dim V}$ כך שהמטריצה של S (ביחס לבסיס הסטנדרטי של $C^{\dim V}$) היא A . לכל $z \in R$ מתקיים

$$q(z) = \det(zI - T) = \det(zI - A) = \det(zI - S).$$

לפיכך q הוא הפולינום האופייני של S . המקרה של $F = C$ (המשפט הראשון בהוכחה זו) כעת גורר ש- $0 = q(S) = q(A) = q(T)$.

משפט קיילי-המילטון (9.64) גורר שהפולינום האופייני של אופרטור $T \in \mathcal{L}(V)$ הוא כפולת פולינום של הפולינום המינימלי של T (לפי 5.29). לפיכך אם מעלת הפולינום המינימלי של T שווה ל- $\dim V$, אזי הפולינום האופייני של T שווה לפולינום המינימלי של T . הדבר קורה לאחוז גבוה מאוד של אופרטורים, כולל מעל ל- 99.999% של מטריצות 4×4 שאיבריהן מספרים שלמים בקטע $[-100, 100]$ (ראו הפסקה שאחרי 5.25).

המשפט האחרון במסקנה הבאה הוכח מקודם עבור המקרה המרוכב (ראו 8.54). כעת נספק הוכחה העובדת במרחבים וקטוריים ממשיים ומרוכבים כאחד.

9.65 פולינום אופייני, עקבה ודטרמיננטה

נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. יהי $n = \dim V$. אזי הפולינום האופייני של T ניתן לכתיבה כ-

$$z^n - (\operatorname{tr} T)z^{n-1} + \dots + (-1)^n (\det T).$$

הוכחה האיבר הקבוע של פונקציית פולינום של z הוא ערך הפולינום כאשר $z = 0$. לפיכך האיבר הקבוע של הפולינום האופייני של T שווה ל- $\det(-T)$, השווה ל- $(-1)^n \det T$ (לפי הסעיף השלישי ב- 9.42).

נקבע בסיס של V , ותהי A המטריצה של T ביחס לבסיס זה. המטריצה של $zI - T$ ביחס לבסיס זה היא $zI - A$. האיבר הנובע מתמורת הזהות $(1, \dots, n)$ בנוסחה 9.46 עבור $\det(zI - A)$ הוא

$$(z - A_{1,1}) \cdots (z - A_{n,n}).$$

המקדם של z^{n-1} בביטוי לעיל הוא $-(A_{1,1} + \dots + A_{n,n})$, השווה ל- $-\operatorname{tr} T$. האיברים בנוסחה עבור $\det(zI - A)$ הנובעים מאיברים אחרים של $\operatorname{perm} n$ מכילים לכל היותר $n - 2$ גורמים מהצורה $z - A_{k,k}$ ולפיכך אינם תורמים למקדם של z^{n-1} בפולינום האופייני של T .

הפסקה הבאה הוכחה על ידי ז'אק סלומון
אָדָמָר (1865–1963) בשנת 1893.

במסקנה להלן, חשבו על עמודות A מטריצה $n \times n$ כאיברים של F^n . הנורמות המופיעות להלן הן תוצאת המכפלה הפנימית הסטנדרטית מעל F^n . ניזכר כי הסימון $R_{\cdot,k}$ בהוכחה להלן משמעותו היא העמודה ה- k^{th} של המטריצה R (כפי שהוגדר ב-3.44).

9.66 אי־שוויון אָדָמָר

נניח ש- A מטריצה $n \times n$. נסמן ב- $v_1, \dots, v_n$ את עמודות A . אזי

$$|\det A| \leq \prod_{k=1}^n \|v_k\|.$$

הוכחה אם A אינה הפיכה, אזי $\det A = 0$ ולכן האי־שוויון הרצוי מתקיים במקרה זה.

לפיכך נניח ש- A הפיכה. הפירוק QR (ראו 7.58) אומר לנו כי קיימת מטריצה אוניטרית Q ומטריצה משולשית עליונה R שהאלכסון שלה מכיל רק איברים חיוביים כך ש- $A = QR$. מתקיים

$$\begin{aligned} |\det A| &= |\det Q| |\det R| \\ &= |\det R| \\ &= \prod_{k=1}^n R_{k,k} \\ &\leq \prod_{k=1}^n \|R_{\cdot,k}\| \\ &= \prod_{k=1}^n \|QR_{\cdot,k}\| \\ &= \prod_{k=1}^n \|v_k\|, \end{aligned}$$

כאשר השורה הראשונה נובעת מ-9.49 (ב), השורה השנייה נובעת מ-9.58, השורה השלישית נובעת מ-9.48 והשורה החמישית מתקיימת מאחר ש- Q איזומטריה. ■

להענקת פרשנות גאומטרית לאי־שוויון אדמר, נניח ש- $F = \mathbb{R}$. יהי $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ האופרטור כך ש- $Te_k = v_k$ לכל $k = 1, \dots, n$, כאשר $e_1, \dots, e_n$ הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$. אזי T מעתיק את התיבה $P(e_1, \dots, e_n)$ על המקבילון $P(v_1, \dots, v_n)$ [ראו 7.102 ו-7.105 לסקירה של סימון וטרמינולוגיה אלו]. מאחר שנפח התיבה $P(e_1, \dots, e_n)$ הוא 1, מכאן נובע (לפי 9.61) שנפח המקבילון $P(v_1, \dots, v_n)$ הוא $|\det T|$, השווה ל- $|\det A|$. לפיכך נוכל להעניק פרשנות לאי־שוויון אדמר לעיל ככזה הקובע כי מבין כל המקבילונים שאורכי צלעותיהם $\|v_1\|, \dots, \|v_n\|$, בעלי הנפח הגדול ביותר הם אלו שצלעותיהם ניצבות זו לזו (ולפיכך נפחם הוא $(\prod_{k=1}^n \|v_k\|)$).

עבור תנאי הכרחי ומספיק שאי־שוויון אָדָמָר יהיה שוויון, ראו תרגיל 18.

המטריצה במסקנה הבאה נקראת מטריצת וֶנְדֶרְמוֹנֶד. למטריצות וֶנְדֶרְמוֹנֶד יש יישומים חשובים באיטרפולציה פולינומית, התמרת פורייה הבדידה ותחומים נוספים במתמטיקה. הוכחת המסקנה הבאה היא המחשה יפה של העוצמה שבמעבר הלוח ושוב בין מטריצות להעתקות ליניאריות.

9.67 דטרמיננטה של מטריצת וֶנְדֶרְמוֹנֶד

נניח ש- $n > 1$ ו- $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{F}$ אזי

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_1^2 & \cdots & \beta_1^{n-1} \\ 1 & \beta_2 & \beta_2^2 & \cdots & \beta_2^{n-1} \\ & & \ddots & & \\ 1 & \beta_n & \beta_n^2 & \cdots & \beta_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (\beta_k - \beta_j).$$

הוכחה תהי $1, z, \dots, z^{n-1}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{F})$ ונסמן ב- $e_1, \dots, e_n$ את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. נגדיר העתקה ליניארית $S: \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}^n$ על ידי $Sp = (p(\beta_1), \dots, p(\beta_n))$.

נסמן ב- A את מטריצת ונדרמונד המוצגת בניסוח מסקנה זו. נשים לב כי

$$A = \mathcal{M}(S, (1, z, \dots, z^{n-1}), (e_1, \dots, e_n)).$$

יהי $T: \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{F}) \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{F})$ האופרטור מעל $\mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{F})$ כך ש- $T1 = 1$ ו-

$$Tz^k = (z - \beta_1)(z - \beta_2) \cdots (z - \beta_k)$$

עבור $k = 1, \dots, n-1$. יהי $B = \mathcal{M}(T, (1, z, \dots, z^{n-1}), (1, z, \dots, z^{n-1}))$. אזי B היא מטריצה משולשית עליונה שכל איברי האלכסון שלה שווים 1. לפיכך $\det B = 1$ (לפי 9.48).

תהי $C = \mathcal{M}(ST, (1, z, \dots, z^{n-1}), (e_1, \dots, e_n))$. לפיכך $C = AB$ (לפי 3.81), מה שגורר ש-

$$\det A = (\det A)(\det B) = \det C.$$

הגדרותיהן של C ו- T מראות כי C שווה ל-

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \beta_2 - \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \beta_3 - \beta_1 & (\beta_3 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2) & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 1 & \beta_n - \beta_1 & (\beta_n - \beta_1)(\beta_n - \beta_2) & \cdots & (\beta_n - \beta_1)(\beta_n - \beta_2) \cdots (\beta_n - \beta_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

כעת $\det A = \det C = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (\beta_k - \beta_j)$ (א) ו-9.48.

- 1 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: $S, T \in \mathcal{L}(V) \implies \det(S + T) = \det S + \det T$.
- 2 נניח שהעמודה הראשונה של מטריצה ריבועית A מורכבת כולה מאפסים מלבד האפשרות שהאיבר הראשון $A_{1,1}$ אינו אפס. תהי B המטריצה המושגת מ- A על ידי מחיקת השורה הראשונה והעמודה הראשונה של A . הראו כי $\det A = A_{1,1} \det B$.
- 3 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ נילפוטנטי. הוכיחו כי $\det(I + T) = 1$.
- 4 נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ו- $S \in \mathcal{L}(V)$. הוכיחו כי S אוניטרי אם ורק אם $|\det S| = \|S\| = 1$.
- 5 נניח ש- A מטריצת בלוקים משולשית עליונה

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix},$$
 כאשר כל A_k לאורך האלכסון היא מטריצה ריבועית. הוכיחו כי $\det A = (\det A_1) \cdots (\det A_m)$.
- 6 נניח ש- $A = (v_1 \cdots v_n)$ היא מטריצה $n \times n$, כאשר v_k מסמן את העמודה ה- k^{th} של A . הראו כי אם $(m_1, \dots, m_n) \in \text{perm } n$, אזי $\det(v_{m_1} \cdots v_{m_n}) = (\text{sign}(m_1, \dots, m_n)) \det A$.
- 7 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ הפיך. נסמן ב- p את הפולינום האופייני של T וב- q את הפולינום האופייני של T^{-1} . הוכיחו כי $q(z) = \frac{1}{p(0)} z^{\dim V} p\left(\frac{1}{z}\right)$ לכל $z \in F$ השונה מאפס.
- 8 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור ללא ערכים עצמיים (מה שגורר ש- $F = \mathbb{R}$). הוכיחו כי $\det T > 0$.
- 9 נניח ש- V מרחב וקטורי ממשי מממד זוגי, $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\det T < 0$. הוכיחו כי יש ל- T לכל הפחות שני ערכים עצמיים שונים.
- 10 נניח ש- V מרחב וקטורי ממשי מממד אי-זוגי ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. מבלי שתשתמשו בפולינום המינימלי, הוכיחו כי יש ל- T ערך עצמי.
- 11 תוצאה זו הוכחה מוקדם יותר ללא שימוש בדטרמיננטה או בפולינום האופייני—ראו 5.34.
- 12 הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית: אם $F = \mathbb{R}$, $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $\det T > 0$, אזי יש ל- T שורש ריבועי.
- 13 אם $F = \mathbb{C}$, $T \in \mathcal{L}(V)$, $\det T \neq 0$, אזי יש ל- T שורש ריבועי (ראו 8.41).

12 נניח ש- $S, T \in \mathcal{L}(V)$ ו- S הפיך. נגדיר $p: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ על ידי

$$p(z) = \det(zS - T).$$

הוכיחו כי p פולינום ממעלה $\dim V$ וכי המקדם של $z^{\dim V}$ בפולינום זה הוא $\det S$.

13 נניח ש- $\mathbf{F} = \mathbf{C}$, $T \in \mathcal{L}(V)$ ו- $n = \dim V > 2$. נסמן ב- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ את הערכים העצמיים של T , כאשר כל ערך עצמי נכלל מספר פעמים השווה לריבוי.

א. מצאו נוסחה עבור המקדם של z^{n-2} בפולינום האופייני של T במונחים של $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

ב. מצאו נוסחה עבור המקדם של z בפולינום האופייני של T במונחים של $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

14 נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ו- T אופרטור חיובי מעל V . הוכיחו כי

$$\det \sqrt{T} = \sqrt{\det T}.$$

15 נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית ו- $T \in \mathcal{L}(V)$. השתמשו בפירוק הפולרי להוכיח כי

$$|\det T| = \sqrt{\det(T^*T)}$$

באופן שונה מההוכחה שניתנה לעיל (ראו 9.60).

16 נניח ש- $T \in \mathcal{L}(V)$. נגדיר $g: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ על ידי $g(x) = \det(I + xT)$. הראו כי $g'(0) = \operatorname{tr} T$.

חפשו פתרון נקי לתרגיל זה, מבלי שתשתמשו בנוסחה המפורשת אך המסובכת של הדטרמיננטה של מטריצה.

17 נניח ש- a, b, c מספרים חיוביים. מצאו את נפח האליפסואיד

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1 \right\}$$

על ידי מציאת קבוצה $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ שנפחה ידוע ואופרטור T מעל $\mathbf{R}^3$ כך ש- $T(\Omega)$ שווה לאליפסואיד לעיל.

18 נניח ש- A מטריצה ריבועית הפיכה. הוכיחו כי אי-שוויון אדמר (9.66) הוא שוויון אס-ורק-אם כל עמודה של A אורתוגונלית לעמודות האחרות.

19 נניח ש- V מרחב מכפלה פנימית, $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V ו- $T \in \mathcal{L}(V)$ אופרטור חיובי.

א. הוכיחו כי $\det T \leq \prod_{k=1}^n \langle Te_k, e_k \rangle$.

ב. הוכיחו כי אם T הפיך, אזי האי-שוויון ב- (א) הוא שוויון אס-ורק-אם e_k הוא וקטור עצמי של T לכל $k = 1, \dots, n$.

20 נניח ש- A מטריצה $n \times n$, ונניח ש- c כך ש- $|A_{j,k}| \leq c$ לכל $j, k \in \{1, \dots, n\}$. הוכיחו כי

$$|\det A| \leq c^n n^{n/2}.$$

הנוסחה עבור הדטרמיננטה של מטריצה (9.46) מראה כי $|\det A| \leq c^n n!$. בכל זאת, ההערכה שניתנת בתרגיל זה טובה לאין שיעור. לדוגמה, אם $c = 1$ ו- $n = 100$, אזי $c^n n! \approx 10^{158}$, אך ההערכה שניתנת בתרגיל זה היא המספר הקטן בהרבה 10^{100} . אם n חזקה שלפה של 2, אזי האי-שוויון לעיל הדוק ואין בו מקום לשיפור.

21 נניח ש- n מספר שלם חיובי ו- $\delta: C^{n,n} \rightarrow C$ פונקציה כך ש-

$$\delta(AB) = \delta(A) \cdot \delta(B)$$

לכל $A, B \in C^{n,n}$ ו- $\delta(A)$ שווה למכפלת איברי האלכסון של A לכל מטריצה אלכסונית $A \in C^{n,n}$. הוכיחו כי

$$\delta(A) = \det A$$

לכל $A \in C^{n,n}$.

נזכיר כי $C^{n,n}$ מסמן את קבוצת המטריצות $n \times n$ עם איברים ב- C . תרגיל זה מראה כי הדטרמיננטה היא הפונקציה היחידה המוגדרת מעל מטריצה ריבועית שהיא כפלית ובעלת התנהגות רצויה מעל מטריצות אלכסוניות. מסקנה זו אנלוגית לתרגיל 10 ביחידה 4, מה שמראה שהעקבה נקבעת באופן יחיד על ידי תכונותיה האלגבריות.

אני נוכח לראות כי בהרצאות היסודיות שלי, אני נוהג, מטעמים פדגוגיים, להדחיק את הדטרמיננטות אל השוליים האחוריים. לעיתים קרובות מדי חוויתי כי, בעוד הסטודנטים רוכשים מיומנות עם הנוסחאות, שהן כה שימושיות לקיצור ביטויים ארוכים, לעיתים קרובות הם כושלים בהיכרות עם משמעויותיהן, וכי המיומנות בביצוע מניפולציות אלגבריות מנעה מהסטודנטים לרדת לכל פרטי הנושא וכך מנעה מהם את השגת השליטה בו.

—מתמטיקה יסודית מנקודת מבט מתקדמת: גאומטריה, פליקס קליין

40 מכפלות טנזוריות

מכפלה טנזורית של שני מרחבים וקטוריים

המוטיבציה לנושא הבא שבו נעסוק נובעת מהרצון להגדיר את המכפלה של וקטור $v \in V$ עם וקטור $w \in W$. מכפלה זו תסומן על ידי $v \otimes w$, מבוטאת "טנזור w ", ותהיה איבר במרחב וקטורי חדש כלשהו הנקרא $V \otimes W$ (גם הוא מבוטא כ- " V טנזור W ").

את המרחב הווקטורי $V \times W$ כבר הכרנו (ראו יחידה 5), הנקרא המכפלה של V ו- W . עם זאת, $V \times W$ לא יישרת את צרכינו מאחר שאינו מספק דרך טבעית להכפלת איבר של V עם איבר של W . אנו רוצים שהמכפלה הטנזורית תקיים חלק מהתכונות הרגילות של כפל. לדוגמה, אנו מעוניינים בקיומה של תכונת הפילוג, כלומר, אם $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$ אזי

$$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \quad \text{וגם} \quad v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2.$$

נרצה בנוסף כי כפל בסקלר יעבוד בצורה חלקה עם פעולת כפל חדשה זו, כלומר

$$\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w)$$

לכל $w \in W$ ו- $\lambda \in F$, $v \in V$.

יתר על כן, יהיה נחמד אם כל בסיס של V בשילוב עם כל בסיס של W יפיקו בסיס של $V \otimes W$. בפרט, אם $e_1, \dots, e_m$ בסיס של V ו- $f_1, \dots, f_n$ בסיס של W , אזי נרצה שהרשימה (בכל סדר שהוא) המורכבת מ- $e_j \otimes f_k$, כאשר j נע מ-1 עד m ו- k נע מ-1 עד n , תהיה בסיס של $V \otimes W$. מכאן נובע כי $\dim(V \otimes W)$ צריך להיות שווה ל- $(\dim V)(\dim W)$. נזכר כי $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$ (ראו 3.92), מה שמשביר מדוע המכפלה $V \times W$ לא תשרת את צרכינו כאן.

להפקת מרחב וקטורי שממדו הוא $(\dim V)(\dim W)$ באופן טבעי מ- V ו- W , נסתכל על המרחב הווקטורי של פונקציונלים ביליניאריים, כפי שהוא מוגדר להלן.

9.68 הגדרה: פונקציונל ביליניארי מעל $V \times W$, המרחב הווקטורי $\mathcal{B}(V, W)$

- פונקציונל ביליניארי מעל $V \times W$ הוא פונקציה $\beta: V \times W \rightarrow F$ כך ש- $v \mapsto \beta(v, w)$ הוא פונקציונל ליניארי מעל V לכל $w \in W$ ו- $w \mapsto \beta(v, w)$ פונקציונל ליניארי מעל W לכל $v \in V$.
- המרחב הווקטורי של פונקציונלים ביליניאריים מעל $V \times W$ מסומן על ידי $\mathcal{B}(V, W)$.

9.1 אם $W = V$, אזי פונקציונל ביליניארי מעל $V \times W$ הוא תבנית ביליניארית; ראו

פעולות החיבור וכפל בסקלר מעל $\mathcal{B}(V, W)$ מוגדרות כפעולות החיבור והכפל בסקלר הרגילות של פונקציות. כפי שבאפשרותכם לוודא, פעולות אלו הופכות את $\mathcal{B}(V, W)$ למרחב וקטורי שאיבר הזהות שלו לחיבור הוא פונקציית האפס מ- $V \times W$ אל F .

9.69 דוגמה: פונקציונלים ביליניאריים

- נניח ש- $\varphi \in V'$ ו- $\tau \in W'$. נגדיר $\beta: V \times W \rightarrow F$ על ידי $\beta(v, w) = \varphi(v)\tau(w)$. אזי β פונקציונל ביליניארי מעל $V \times W$.
- נניח ש- $v \in V$ ו- $w \in W$. נגדיר $\beta: V' \times W' \rightarrow F$ על ידי $\beta(\varphi, \tau) = \varphi(v)\tau(w)$. אזי β פונקציונל ביליניארי מעל $V' \times W'$.
- נגדיר $\beta: V \times V' \rightarrow F$ על ידי $\beta(v, \varphi) = \varphi(v)$. אזי β פונקציונל ביליניארי מעל $V \times V'$.
- נניח ש- $\varphi \in V'$. נגדיר $\beta: V \times \mathcal{L}(V) \rightarrow F$ על ידי $\beta(v, T) = \varphi(Tv)$. אזי β פונקציונל ביליניארי מעל $V \times \mathcal{L}(V)$.
- נניח ש- m ו- n מספרים שלמים חיוביים. נגדיר $\beta: F^{m,n} \times F^{n,m} \rightarrow F$ על ידי $\beta(A, B) = \text{tr}(AB)$. אזי β פונקציונל ביליניארי מעל $F^{m,n} \times F^{n,m}$.

9.70 ממד המרחב הווקטורי של פונקציונלים ביליניאריים

$$\dim \mathcal{B}(V, W) = (\dim V)(\dim W)$$

הוכחה תהי $e_1, \dots, e_m$ בסיס של V ו- $f_1, \dots, f_n$ בסיס של W . עבור פונקציונל ביליניארי $\beta \in \mathcal{B}(V, W)$, תהי $\mathcal{M}(\beta)$ המטריצה $m \times n$ שהאיבר בשורה j , עמודה k הוא $\beta(e_j, f_k)$. ההעתקה $\beta \mapsto \mathcal{M}(\beta)$ היא העתקה ליניארית של $\mathcal{B}(V, W)$ אל $F^{m,n}$. עבור מטריצה $C \in F^{m,n}$, נגדיר פונקציונל ביליניארי β_C מעל $V \times W$ על ידי

$$\beta_C(a_1 e_1 + \dots + a_m e_m, b_1 f_1 + \dots + b_n f_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m C_{j,k} a_j b_k$$

עבור $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in F$.

ההעתקה הליניארית $\beta \mapsto \mathcal{M}(\beta)$ מ- $\mathcal{B}(V, W)$ אל $F^{m,n}$ וההעתקה הליניארית $C \mapsto \beta_C$ מ- $F^{m,n}$ אל $\mathcal{B}(V, W)$ הן ההופכיות האחת של השנייה שכן $\beta_{\mathcal{M}(\beta)} = \beta$ לכל $\beta \in \mathcal{B}(V, W)$ ו- $\mathcal{M}(\beta_C) = C$ לכל $C \in F^{m,n}$, כפי שעליכם לוודא.

לפיכך שתי ההעתקות הן איזומורפיזמים ולשני המרחבים שהן מחברות יש ממד זהה. לכן $\dim \mathcal{B}(V, W) = \dim F^{m,n} = mn = (\dim V)(\dim W)$. ■

מספר הגדרות שונות של $V \otimes W$ מופיעות בספרות המתמטית. הגדרות אלו שקולות אחת לשנייה, לכל הפחות בהקשר של ממד סופי, מאחר שכל שני מרחבים וקטוריים מממד זהה הם איזומורפיים.

המסקנה לעיל קובעת כי יש ל- $\mathcal{B}(V, W)$ את הממד שביקשנו, כפי שיש ל- $\mathcal{L}(V, W)$ ו- $F^{\dim V, \dim W}$. לפיכך אנו עלולים להתפתות ולהגדיר את $V \otimes W$ כ- $\mathcal{B}(V, W)$ או $\mathcal{L}(V, W)$ או $F^{\dim V, \dim W}$. עם זאת, אף אחת מהגדרות אלו לא תוביל להגדרה שאינה תלויה בבחירת בסיס של $w \otimes v$ עבור $v \in V$ ו- $w \in W$.

להגדרה הבאה – אף שבהתרשמות ראשונה אולי תיראה מוזרה ומופשטת – יש יתרון עצום בכך שהיא מגדירה $w \otimes v$ באופן שאינו תלוי בבחירת בסיס. אנו מגדירים את $V \otimes W$ כמרחב הווקטורי של פונקציונלים ביליניאריים מעל $V' \times W'$ במקום האפשרות המפתה יותר של מרחב וקטורי של פונקציונלים ביליניאריים מעל $V \times W$.

9.71 הגדרה: מכפלה טנזורית, $v \otimes w \in V \otimes W$

- המכפלה הטנזורית $V \otimes W$ מוגדרת כ- $\mathcal{B}(V', W')$.
- עבור $v \in V$ ו- $w \in W$, המכפלה הטנזורית $v \otimes w$ היא איבר של $V \otimes W$ המוגדר על ידי

$$(v \otimes w)(\varphi, \tau) = \varphi(v)\tau(w)$$

$$\text{לכל } (\varphi, \tau) \in V' \times W'$$

ביכולתנו להוכיח בזריזות כי הגדרת $V \otimes W$ מעניקה לו את הממד הרצוי.

9.72 ממד המכפלה הטנזורית של שני מרחבים וקטוריים

$$\dim(V \otimes W) = (\dim V)(\dim W)$$

הוכחה מאחר שלמרחב וקטורי ולדואלי שלו ממד זהה (לפי 3.111), מתקיים $\dim V' = \dim V$ ו- $\dim W' = \dim W$. לפיכך 9.70 אומרת לנו כי הממד של $\mathcal{B}(V', W')$ שווה $(\dim V)(\dim W)$.

להבנת הגדרת המכפלה הטנזורית $v \otimes w$ של שני וקטורים $v \in V$ ו- $w \in W$, התמקדו בסוג האובייקט הזה. איבר של $V \otimes W$ הוא פונקציונל ביליניארי מעל $V' \times W'$, ובפרט הוא פונקציה מ- $V' \times W'$ אל F . לפיכך עבור כל איבר של $V' \times W'$, היא אמורה להפיק איבר של F . ההגדרה לעיל מוודאת שכך תתנהג הפונקציה, מאחר ש- $v \otimes w$ המופעלת על איבר טיפוס (φ, τ) של $V' \times W'$ מפיקה את המספר $\varphi(v)\tau(w)$. האופי המופשט במידת מה של $v \otimes w$ לא אמור להטריד את מנוחתכם. הנקודה החשובה היא התנהגות אובייקטים אלו. המסקנה הבאה מראה שלמכפלות טנזוריות של וקטורים תכונות הביליניאריות הרצויות.

9.73 ביליניאריות של מכפלה טנזורית

נניח ש- $v, v_1, v_2 \in V$ ו- $w, w_1, w_2 \in W$ ו- $\lambda \in F$. אזי

$$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \quad \text{וגם} \quad v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$$

וגם

$$\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w).$$

הוכחה נניח ש- $(\varphi, \tau) \in V' \times W'$. אזי

$$\begin{aligned} ((v_1 + v_2) \otimes w)(\varphi, \tau) &= \varphi(v_1 + v_2)\tau(w) \\ &= \varphi(v_1)\tau(w) + \varphi(v_2)\tau(w) \\ &= (v_1 \otimes w)(\varphi, \tau) + (v_2 \otimes w)(\varphi, \tau) \\ &= (v_1 \otimes w + v_2 \otimes w)(\varphi, \tau). \end{aligned}$$

לפיכך $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$.

את שני השוויונות הנוספים ניתן להוכיח באופן דומה.

רשימות הן, לפי הגדרה, סדורות. לסדר יש חשיבות כאשר, לדוגמה, אנו יוצרים את המטריצה של אופרטור ביחס לבסיס. עבור רשימות ביחידה זו עם שני אינדקסים, דוגמת $\{e_j \otimes f_k\}_{j=1, \dots, m; k=1, \dots, n}$ שבמסקנה הבאה, הסדר לא משפיע ואיננו מציינים אותו—ניתן לבחור כל סדר לפי נוחות.

אי התלות הליניארית של איברי $V \otimes W$ ב- (א) של המסקנה להלן לוכדת את הרעיון כי אין קשרים בין וקטורים ב- $V \otimes W$ מלבד הקשרים הנובעים מהביליניאריות של המכפלה הטנזורית (ראו 9.73) והקשרים שאולי יופיעו כתוצאה מתלות ליניארית של רשימת וקטורים ב- V או רשימת וקטורים ב- W .

9.74 בסיס של $V \otimes W$

נניח ש- $e_1, \dots, e_m$ רשימת וקטורים ב- V ו- $f_1, \dots, f_n$ רשימת וקטורים ב- W .

א. אם $e_1, \dots, e_m$ ו- $f_1, \dots, f_n$ שתיהן רשימות בלתי תלויות ליניארית, אזי

$$\{e_j \otimes f_k\}_{j=1, \dots, m; k=1, \dots, n}$$

היא רשימה בלתי תלויה ליניארית ב- $V \otimes W$.

ב. אם $e_1, \dots, e_m$ בסיס של V ו- $f_1, \dots, f_n$ בסיס של W , אזי הרשימה $\{e_j \otimes f_k\}_{j=1, \dots, m; k=1, \dots, n}$ היא בסיס של $V \otimes W$.

הוכחה להוכחת (א), נניח ש- $e_1, \dots, e_m$ ו- $f_1, \dots, f_n$ שתיהן רשימות בלתי תלויות ליניאריות. אי-תלות ליניארית זו ולמת ההעתקה הליניארית (3.4) גוררים שקיימים $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in V'$ ו- $\tau_1, \dots, \tau_n \in W'$ כך ש-

$$\varphi_j(e_k) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = k, \\ 0 & \text{if } j \neq k \end{cases} \quad \text{וגם} \quad \tau_j(f_k) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = k, \\ 0 & \text{if } j \neq k, \end{cases}$$

כאשר $j, k \in \{1, \dots, m\}$ במשוואה הראשונה ו- $j, k \in \{1, \dots, n\}$ במשוואה השנייה.

נניח ש- $\{a_{j,k}\}_{j=1, \dots, m; k=1, \dots, n}$ רשימת סקלרים כך ש-

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{j,k} (e_j \otimes f_k) = 0. \quad 9.75$$

שימו לב ש- $(e_j \otimes f_k)(\varphi_M, \tau_N)$ שווה 1 אם $j = M$ ו- $k = N$, ושווה 0 בכל מקרה אחר. לפיכך הפעלת שני אנפי 9.75 על (φ_M, τ_N) מראה ש- $a_{M,N} = 0$ ובכך הוכחנו כי $\{e_j \otimes f_k\}_{j=1, \dots, m; k=1, \dots, n}$ בלתי תלויה ליניארית.

כעת (ב) נובע מ- (א), המשוואה $\dim V \otimes W = (\dim V)(\dim W)$ [ראו 9.72], ומהמסקנה כי רשימה בלתי תלויה ליניארית באורך הנכון היא בסיס (ראו 2.38). ■

כל איבר של $V \otimes W$ הוא סכום סופי של איברים מהצורה $v \otimes w$, כאשר $v \in V$ ו- $w \in W$, כפי שנובע מסעיף (ב) במסקנה לעיל. עם זאת, אם $\dim V > 1$ ו- $\dim W > 1$, אזי תרגיל 4 מראה כי

$$\{v \otimes w : (v, w) \in V \times W\} \neq V \otimes W.$$

9.76 דוגמה: מכפלה טנזורית של איבר של F^m עם איבר של F^n

נניח ש- m ו- n מספרים שלמים חיוביים. נסמן ב- $e_1, \dots, e_m$ את הבסיס הסטנדרטי של F^m וב- $f_1, \dots, f_n$ את הבסיס הסטנדרטי של F^n . נניח ש-

$$v = (v_1, \dots, v_m) \in F^m \quad \text{וגם} \quad w = (w_1, \dots, w_n) \in F^n.$$

אזי

$$\begin{aligned} v \otimes w &= \left(\sum_{j=1}^m v_j e_j \right) \otimes \left(\sum_{k=1}^n w_k f_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (v_j w_k) (e_j \otimes f_k). \end{aligned}$$

לפיכך ביחס אל הבסיס $\{e_j \otimes f_k\}_{j=1, \dots, m; k=1, \dots, n}$ של $F^m \otimes F^n$ שניתן על ידי 9.74(ב), המקדמים של $v \otimes w$ הם המספרים $\{v_j w_k\}_{j=1, \dots, m; k=1, \dots, n}$. אם במקום לכתוב מספרים אלו כרשימה, נכתוב אותם כמטריצה $m \times n$ עם $v_j w_k$ בשורה j , עמודה k , אזי נוכל לזהות את $v \otimes w$ עם המטריצה $m \times n$

$$\begin{pmatrix} v_1 w_1 & \cdots & v_1 w_n \\ & \ddots & \\ v_m w_1 & \cdots & v_m w_n \end{pmatrix}.$$

ראו תרגילים 5 ו-6 לתרגול השימוש בזיהוי מהדוגמה לעיל.

כעת אנו מגדירים העתקות ביליניאריות, השונות מפונקציונלים ביליניאריים בכך שמרחב היעד יכול להיות מרחב וקטורי שרירותי במקום רק שדה הסקלרים.

9.77 הגדרה: העתקה ביליניארית

העתקה ביליניארית מ- $V \times W$ אל מרחב וקטורי U היא פונקציה $\Gamma: V \times W \rightarrow U$ כך ש- $\Gamma(v, w) \mapsto v$ היא העתקה ליניארית מ- V אל U לכל $w \in W$ ו- $\Gamma(v, w) \mapsto w$ היא העתקה ליניארית מ- W אל U לכל $v \in V$.

9.78 דוגמה: העתקות ביליניאריות

- כל פונקציונל ביליניארי מעל $V \times W$ הוא העתקה ביליניארית מ- $V \times W$ אל F .
- הפונקציה $\Gamma: V \times W \rightarrow V \otimes W$ המוגדרת על ידי $\Gamma(v, w) = v \otimes w$ היא העתקה ביליניארית מ- $V \times W$ אל $V \otimes W$ (לפי 9.73).
- הפונקציה $\Gamma: \mathcal{L}(V) \times \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathcal{L}(V)$ המוגדרת על ידי $\Gamma(S, T) = ST$ היא העתקה ביליניארית מ- $\mathcal{L}(V) \times \mathcal{L}(V)$ אל $\mathcal{L}(V)$.
- הפונקציה $\Gamma: V \times \mathcal{L}(V, W) \rightarrow W$ המוגדרת על ידי $\Gamma(v, T) = Tv$ היא העתקה ביליניארית מ- $V \times \mathcal{L}(V, W)$ אל W .

מכפלות טנזוריות מאפשרות לנו להמיר העתקות ביליניאריות מעל $V \times W$ להעתקות ליניאריות מעל $V \otimes W$ (ולהיפך), כפי שמראה לנו המסקנה הבאה. בספרות המתמטית, סעיף (א) של המסקנה להלן נקרא "התכונה האוניברסלית" של מכפלות טנזוריות.

9.79 המרת העתקות ביליניאריות להעתקות ליניאריות

נניח ש- U מרחב וקטורי.

א. נניח ש- $\Gamma: V \times W \rightarrow U$ העתקה ביליניארית. אזי קיימת העתקה ליניארית יחידה $\hat{\Gamma}: V \otimes W \rightarrow U$ כך ש-

$$\hat{\Gamma}(v \otimes w) = \Gamma(v, w)$$

לכל $(v, w) \in V \times W$.

ב. בכיוון ההפוך, נניח ש- $T: V \otimes W \rightarrow U$ העתקה ליניארית. אזי קיימת העתקה ביליניארית יחידה $T^\#: V \times W \rightarrow U$ כך ש-

$$T^\#(v, w) = T(v \otimes w)$$

לכל $(v, w) \in V \times W$.

הוכחה יהי $e_1, \dots, e_m$ בסיס של V ויהי $f_1, \dots, f_n$ בסיס של W . באמצעות למת ההעתקה הליניארית (3.4) ו- 9.74(ב), קיימת העתקה ליניארית יחידה $\hat{\Gamma}: V \otimes W \rightarrow U$ כך ש-

$$\hat{\Gamma}(e_j \otimes f_k) = \Gamma(e_j, f_k)$$

לכל $j \in \{1, \dots, m\}$ ו- $k \in \{1, \dots, n\}$.

כעת נניח ש- $(v, w) \in V \times W$. קיימים $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in F$ כך ש- $v = a_1 e_1 + \dots + a_m e_m$ ו- $w = b_1 f_1 + \dots + b_n f_n$. לפיכך

$$\hat{\Gamma}(v \otimes w) = \hat{\Gamma}\left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (a_j b_k) (e_j \otimes f_k)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_j b_k \hat{\Gamma}(e_j \otimes f_k)$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_j b_k \Gamma(e_j, f_k)$$

$$= \Gamma(v, w),$$

כפי שרצינו, כאשר השורה השנייה מתקיימת מאחר ש- $\hat{\Gamma}$ ליניארית, השורה השלישית מתקיימת עקב ההגדרה של $\hat{\Gamma}$, והשורה הרביעית מתקיימת מאחר ש- Γ ביליניארית. היחידות של ההעתקה ליניארית $\hat{\Gamma}$ המקיימת $\hat{\Gamma}(v \otimes w) = \Gamma(v, w)$ נובעת מ- 9.74(ב), ובכך השלמנו את הוכחת (א).

להוכחת (ב), נגדיר פונקציה $T^\#: V \times W \rightarrow U$ על ידי $T^\#(v, w) = T(v \otimes w)$ לכל $(v, w) \in V \times W$. הביליניאריות של המכפלה הטנזורית (ראו 9.73) והליניאריות של T גוררים ש- $T^\#$ ביליניארית.

בחירה של $T^\#$ המקיימת את התנאים היא בוודאות יחידה.

להוכחת 9.79(א), לא היינו יכולים פשוט להגדיר $\hat{\Gamma}(v \otimes w) = \Gamma(v, w)$ לכל $v \in V$ ו- $w \in W$ (ואז להרחיב את $\hat{\Gamma}$ באופן ליניארי לכל איברי $V \otimes W$) מאחר שאין לאיברים של $V \otimes W$ ייצוג יחיד כסכום סופי מהצורה $v \otimes w$. ההוכחה שלנו משתמשת בבסיס של V ובסיס של W לעקוף בעיה זו.

אף שבניית $\hat{\Gamma}$ בהוכחת 9.79(א) תלויה בבסיס של V ובסיס של W , המשוואה $\hat{\Gamma}(v \otimes w) = \Gamma(v, w)$ המתקיימת לכל $v \in V$ ו- $w \in W$ מראה כי $\hat{\Gamma}$ אינה תלויה בבחירת בסיסים עבור V ו- W .

מכפלה טנזורית של מרחבי מכפלה פנימית

במסקנה להלן מופיעות שלוש מכפלות פנימיות שונות—אחת מעל $V \otimes W$, אחת מעל V ואחת מעל W , אף שאנו משתמשים באותו הסמל $\langle \cdot, \cdot \rangle$ לכל שלושת המכפלות הפנימיות.

9.80 מכפלה פנימית מעל מכפלה טנזורית של שני מרחבי מכפלה פנימית

נניח ש- V ו- W מרחבי מכפלה פנימית. אזי קיימת מכפלה פנימית יחידה מעל $V \otimes W$ כך ש-

$$\langle v \otimes w, u \otimes x \rangle = \langle v, u \rangle \langle w, x \rangle$$

לכל $v, u \in V$ ו- $w, x \in W$.

הוכחה נניח ש- $e_1, \dots, e_m$ בסיס אורתונורמלי של V ו- $f_1, \dots, f_n$ בסיס אורתונורמלי של W . נגדיר מכפלה פנימית מעל $V \otimes W$ על ידי

$$9.81 \quad \left\langle \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m b_{j,k} e_j \otimes f_k, \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m c_{j,k} e_j \otimes f_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m b_{j,k} \overline{c_{j,k}}.$$

הווידוא המיידני ש- 9.81 מגדירה מכפלה פנימית מעל $V \otimes W$ מושאר לקוראים (השתמשו ב- 9.74(ב)).

נניח ש- $v, u \in V$ ו- $w, x \in W$. יהי $v_1, \dots, v_m \in F$ כך ש- $v = v_1 e_1 + \dots + v_m e_m$ וביטויים דומים עבור u, w ו- x . אזי

$$\begin{aligned} \langle v \otimes w, u \otimes x \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^m v_j e_j \otimes \sum_{k=1}^n w_k f_k, \sum_{j=1}^m u_j e_j \otimes \sum_{k=1}^n x_k f_k \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m v_j w_k e_j \otimes f_k, \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m u_j x_k e_j \otimes f_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m v_j \overline{u_j} w_k \overline{x_k} \\ &= \left(\sum_{j=1}^m v_j \overline{u_j} \right) \left(\sum_{k=1}^n w_k \overline{x_k} \right) \\ &= \langle v, u \rangle \langle w, x \rangle. \end{aligned}$$

קיימת מכפלה פנימית יחידה מעל $V \otimes W$ כך ש- $\langle v \otimes w, u \otimes x \rangle = \langle v, u \rangle \langle w, x \rangle$ לכל $v, u \in V$ ו- $w, x \in W$ מאחר שכל איבר של $V \otimes W$ ניתן לכתיבה כצירוף ליניארי של איברים מהצורה $v \otimes w$ [לפי 9.74(ב)].

ההגדרה להלן של מכפלה פנימית טבעית מעל $V \otimes W$ כעת מוצדקת לפי 9.80. לא היינו יכולים פשוט להגדיר את $\langle v \otimes w, u \otimes x \rangle$ כ- $\langle v, u \rangle \langle w, x \rangle$ (ואז להשתמש באדיטיביות בכל רכיב בנפרד להרחבת ההגדרה ל- $V \otimes W$) ללא הוכחה כלשהי מאחר שלאיברים של $V \otimes W$ אין ייצוג יחיד כסכום סופי של איברים מהצורה $v \otimes w$.

9.82 הגדרה: מכפלה פנימית מעל מכפלה טנזורית של שני מרחבי מכפלה פנימית

נניח ש- V ו- W מרחבי מכפלה פנימית. המכפלה הפנימית מעל $V \otimes W$ היא הפונקציה היחידה $\langle \cdot, \cdot \rangle$ מ- $(V \otimes W) \times (V \otimes W)$ אל F כך ש-

$$\langle v \otimes w, u \otimes x \rangle = \langle v, u \rangle \langle w, x \rangle$$

לכל $v, u \in V$ ו- $w, x \in W$.

ניקח $x = w$ ו- $u = v$ במשוואה לעיל ואז נוציא שורשים ריבועיים להראות כי

$$\|v \otimes w\| = \|v\| \|w\|$$

לכל $v \in V$ ולכל $w \in W$.

מבנה המכפלה הפנימית בהוכחת 9.80 תלוי בבסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_m$ של V ובבסיס אורתונורמלי $f_1, \dots, f_n$ של W . נוסחה 9.81 גוררת ש- $\{e_j \otimes f_k\}_{j=1, \dots, m; k=1, \dots, n}$ היא רשימה אורתונורמלית בעלת אינדקס כפול ב- $V \otimes W$ ולכן היא בסיס אורתונורמלי של $V \otimes W$ [לפי 9.74(ב)]. חשיבות המסקנה הבאה מתעוררת מאחר שהבסיסים האורתונורמליים שבשימוש יכולים להיות שונים מהבסיסים האורתונורמליים שבשימוש במכפלה הפנימית ב- 9.80. למרות הסימון הזהה עבור הבסיסים בהוכחת 9.80 ובמסקנה להלן, חשבו עליהם כשתי קבוצות שונות של בסיסים אורתונורמליים.

9.83 בסיס אורתונורמלי של $V \otimes W$

נניח ש- V ו- W מרחבי מכפלה פנימית, ו- $e_1, \dots, e_m$ בסיס אורתונורמלי של V ו- $f_1, \dots, f_n$ בסיס אורתונורמלי של W . אזי

$$\{e_j \otimes f_k\}_{j=1, \dots, m; k=1, \dots, n}$$

בסיס אורתונורמלי של $V \otimes W$.

הוכחה ידוע לנו כי $\{e_j \otimes f_k\}_{j=1, \dots, m; k=1, \dots, n}$ הוא בסיס של $V \otimes W$ [לפי 9.74(ב)]. לפיכך כל שעלינו לוודא הוא האורתונורמליות. לצורך כך, נניח ש- $j, M \in \{1, \dots, m\}$ ו- $k, N \in \{1, \dots, n\}$. אזי

$$\langle e_j \otimes f_k, e_M \otimes f_N \rangle = \langle e_j, e_M \rangle \langle f_k, f_N \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } j = M \text{ and } k = N, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

לכן הרשימה בעלת האינדקסים הכפולים $\{e_j \otimes f_k\}_{j=1, \dots, m; k=1, \dots, n}$ היא בהחלט בסיס אורתונורמלי של $V \otimes W$. ■

ראו תרגיל 11 לדוגמה לאופן שבו מבנה המכפלה הפנימית מעל $V \otimes W$ משתלב עם אופרטורים מעל V ו- W .

מכפלה טנזורית של מספר מרחבים וקטוריים

עד כה עסקנו בתכונות המכפלה הטנזורית של שני מרחבים וקטוריים מממד סופי. כעת נפנה את תשומת ליבנו למכפלה טנזורית של מספר מרחבים וקטוריים מממד סופי. הכללה זו אינה דורשת רעיונות חדשים, מלבד סימון מעט יותר מסובך. קוראים בעלי הבנה טובה של המכפלה הטנזורית של שני מרחבים וקטוריים יוכלו לבצע את ההרחבה למכפלה טנזורית של יותר משני מרחבים וקטוריים מממד סופי. לפיכך בתת-יחידה זו, לא יסופקו הוכחות. ההגדרות והניסוחים של המסקנות שיסופקו להלן אמורים להיות מספקים כדי לאפשר לקוראים להשלים את הפרטים, תוך שימוש במה שכבר נלמד בנוגע למכפלה טנזורית של שני מרחבים וקטוריים. אנו נפתח עם הנחות הסימון הבאות.

9.84 סימון: $V_1, \dots, V_m$

עד תום יחידה זו, m מסמן מספר שלם הגדול מ-1 ו- $V_1, \dots, V_m$ מסמנים מרחבים וקטוריים מממד סופי.

הרעיון של פונקציונל m -ליניארי, שאותו אנו עומדים להגדיר, מכליל את רעיון הפונקציונל הביניארי (ראו 9.68). נזכר כי השימוש במילה "פונקציונל" הוא חיווי לכך שאנו מעתיקים אל שדה הסקלרים F . נזכיר בנוסף כי הטרמינולוגיה "תבנית m -ליניארית" גם היא בשימוש במקרה הפרטי $V_1 = \dots = V_m$ (ראו 9.25). הסימון $\mathcal{B}(V_1, \dots, V_m)$ הוא הכללה של הסימון $\mathcal{B}(V, W)$ לעיל.

9.85 הגדרה: פונקציונל m -ליניארי, המרחב הווקטורי $\mathcal{B}(V_1, \dots, V_m)$

- פונקציונל m -ליניארי מעל $V_1 \times \dots \times V_m$ הוא פונקציה $\beta: V_1 \times \dots \times V_m \rightarrow F$ שהיא פונקציונל ליניארי בכל רכיב כאשר הרכיבים האחרים מקובעים.
- המרחב הווקטורי של פונקציונלים m -ליניאריים מעל $V_1 \times \dots \times V_m$ מסומן על ידי $\mathcal{B}(V_1, \dots, V_m)$.

9.86 דוגמה: פונקציונל m -ליניארי

נניח ש- $\varphi_k \in V_k'$ לכל $k \in \{1, \dots, m\}$. נגדיר $\beta: V_1 \times \dots \times V_m \rightarrow F$ על ידי $\beta(v_1, \dots, v_m) = \varphi_1(v_1) \times \dots \times \varphi_m(v_m)$. אזי β פונקציונל m -ליניארי מעל $V_1 \times \dots \times V_m$.

את המסקנה הבאה ניתן להוכיח באמצעות חיקוי של הוכחת 9.70.

9.87 מעד המרחב הווקטורי של פונקציונלים m -ליניאריים

$$\dim \mathcal{B}(V_1, \dots, V_m) = (\dim V_1) \cdots (\dim V_m)$$

כעת באפשרותנו להגדיר את המכפלה הטנזורית של מספר מרחבים וקטוריים ואת המכפלה הטנזורית של איברי מרחבים וקטוריים אלו. ההגדרה הבאה היא אנלוגית לחלוטין להגדרה (9.71) עבור המקרה של $m = 2$.

9.88 הגדרה: מכפלה טנזורית, $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$, $v_1 \otimes \cdots \otimes v_m$

- המכפלה הטנזורית $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$ מוגדרת כ- $\mathcal{B}(V_1', \dots, V_m')$
 - עבור $v_1 \in V_1, \dots, v_m \in V_m$, המכפלה הטנזורית $v_1 \otimes \cdots \otimes v_m$ היא האיבר של $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$ המוגדר על ידי
- $$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m)(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = \varphi_1(v_1) \cdots \varphi_m(v_m)$$
- לכל $(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in V_1' \times \cdots \times V_m'$.

את המסקנה הבאה ניתן להוכיח באמצעות התחקות אחרי ההוכחה שניתנה במסקנה האנלוגית כאשר $m = 2$ (ראו 9.72).

9.89 ממד המכפלה הטנזורית

$$\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_m) = (\dim V_1) \cdots (\dim V_m)$$

המסקנה הבאה מכילה את 9.74.

9.90 בסיס של $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$

נניח ש- $\dim V_k = n_k$ ו- $e_1^k, \dots, e_{n_k}^k$ בסיס של V_k עבור $k = 1, \dots, m$. אזי

$$\{e_{j_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{j_m}^m\}_{j_1=1, \dots, n_1; \dots; j_m=1, \dots, n_m}$$

בסיס של $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$.

נניח ש- $m = 2$ ו- $e_1^1, \dots, e_{n_1}^1$ בסיס של V_1 ו- $e_1^2, \dots, e_{n_2}^2$ בסיס של V_2 . אזי ביחס לבסיס $\{e_{j_1}^1 \otimes e_{j_2}^2\}_{j_1=1, \dots, n_1; j_2=1, \dots, n_2}$ במסקנה לעיל, מקדמי האיברים של $V_1 \otimes V_2$ ניתנים לייצוג באמצעות מטריצה $n_1 \times n_2$ המכילה את המקדם של $e_{j_1}^1 \otimes e_{j_2}^2$ בשורה j_1 , עמודה j_2 . לפיכך נצטרך מטריצה, שהיא מערך המיוצג באמצעות שני אינדקסים, כדי לייצג איבר של $V_1 \otimes V_2$.

אם $m > 2$, אזי המסקנה לעיל מראה כי אנו צריכים מערך המוגדר באמצעות m אינדקסים כדי לייצג איבר שרירותי של $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$. לפיכך ייתכן שמכפלה טנזורית תופיע כאשר נדון באובייקטים המוגדרים על ידי מערכים בעלי אינדקסים מרובים. ההגדרה הבאה מכילה את רעיון ההעתקה הביליניארית (ראו 9.77). בדומה להעתקות הביליניאריות, מרחב היעד יכול להיות מרחב וקטורי שרירותי.

9.91 הגדרה: העתקה m -ליניארית

העתקה m -ליניארית מ- $V_1 \times \cdots \times V_m$ למרחב וקטורי U היא פונקציה $\Gamma: V_1 \times \cdots \times V_m \rightarrow U$ שהיא העתקה ליניארית בכל רכיב כאשר כל הרכיבים האחרים מקובעים.

את המסקנה הבאה ניתן להוכיח בכך שנתחקה אחרי תבנית ההוכחה של 9.79.

9.92 המרת העתקות m -ליניאריות להעתקות ליניאריות

נניח ש- U מרחב וקטורי.

א. נניח ש- $\Gamma: V_1 \times \dots \times V_m \rightarrow U$ העתקה m -ליניארית. אזי קיימת העתקה ליניארית יחידה $\hat{\Gamma}: V_1 \otimes \dots \otimes V_m \rightarrow U$ כך ש-

$$\hat{\Gamma}(v_1 \otimes \dots \otimes v_m) = \Gamma(v_1, \dots, v_m)$$

לכל $(v_1, \dots, v_m) \in V_1 \times \dots \times V_m$.

ב. בכיוון ההפוך, נניח ש- $T: V_1 \otimes \dots \otimes V_m \rightarrow U$ העתקה ליניארית. אזי קיימת העתקה m -ליניארית יחידה $T^\#: V_1 \times \dots \times V_m \rightarrow U$ כך ש-

$$T^\#(v_1, \dots, v_m) = T(v_1 \otimes \dots \otimes v_m)$$

לכל $(v_1, \dots, v_m) \in V_1 \times \dots \times V_m$.

ראו תרגילים 12 ו- 13 עבור מכפלות טנזוריות של מרחבי מכפלה פנימית.

תרגילים 40

1 נניח ש- $v \in V$ ו- $w \in W$. הוכיחו כי $v \otimes w = 0$ אם ורק אם $v = 0$ או $w = 0$.

2 הביאו דוגמה של שישה וקטורים שונים $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3$ ב- $\mathbb{R}^3$ כך ש-

$$v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + v_3 \otimes w_3 = 0$$

 אך אף אחד מ- $v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2, v_3 \otimes w_3$ אינו כפולת סקלר של איבר אחר ברשימה זו.

3 נניח ש- $v_1, \dots, v_m$ רשימה בלתי תלויה ליניארית ב- V . נניח בנוסף כי $w_1, \dots, w_m$ רשימה ב- W כך ש-

$$v_1 \otimes w_1 + \dots + v_m \otimes w_m = 0.$$

הוכיחו כי $w_1 = \dots = w_m = 0$.

4 נניח ש- $\dim V > 1$ ו- $\dim W > 1$. הוכיחו כי

$$\{v \otimes w : (v, w) \in V \times W\}$$

אינו תת-מרחב של $V \otimes W$.

תרגיל זה גורר שאם $\dim V > 1$ ו- $\dim W > 1$, אזי

$$\{v \otimes w : (v, w) \in V \times W\} \neq V \otimes W.$$

5 נניח ש- m ו- n מספרים שלמים חיוביים. עבור $v \in \mathbb{F}^m$ ו- $w \in \mathbb{F}^n$, זהו את $v \otimes w$ עם מטריצה $m \times n$ כמו בדוגמה 9.76. עם זיהוי זה, הראו כי הקבוצה $\{v \otimes w : v \in \mathbb{F}^m \text{ and } w \in \mathbb{F}^n\}$ היא קבוצת המטריצות $m \times n$ (עם איברים ב- $\mathbb{F}$) שדרגתן היא לכל היותר 1.

6 נניח ש- m ו- n מספרים שלמים חיוביים. תנו תיאור אנלוגי לתרגיל 5, של קבוצת המטריצות $m \times n$ (עם איברים ב- $\mathbb{F}$) שדרגתן לכל היותר 2.

7 נניח ש- $\dim V > 2$ ו- $\dim W > 2$. הוכיחו כי $\{v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 : v_1, v_2 \in V \text{ and } w_1, w_2 \in W\} \neq V \otimes W$.

8 נניח ש- $v_1, \dots, v_m \in V$ ו- $w_1, \dots, w_m \in W$ הם כך ש- $v_1 \otimes w_1 + \dots + v_m \otimes w_m = 0$.

נניח ש- U מרחב וקטורי ו- $\Gamma : V \times W \rightarrow U$ העתקה ביליניארית. הראו כי $\Gamma(v_1, w_1) + \dots + \Gamma(v_m, w_m) = 0$.

9 נניח ש- $S \in \mathcal{L}(V)$ ו- $T \in \mathcal{L}(W)$. הוכיחו כי קיים אופרטור יחיד מעל $V \otimes W$ המעתיק $v \otimes w$ אל $Sw \otimes Tw$ לכל $v \in V$ ו- $w \in W$. בשימוש חופשי בסימון, האופרטור מעל $V \otimes W$ המוצג בתרגיל זה לעיתים קרובות נקרא $S \otimes T$.

10 נניח ש- $S \in \mathcal{L}(V)$ ו- $T \in \mathcal{L}(W)$. הוכיחו כי $S \otimes T$ הוא אופרטור הפיך מעל $V \otimes W$ אם ורק אם S ו- T שניהם אופרטורים הפיכים. בנוסף, הוכיחו כי אם S ו- T שניהם אופרטורים הפיכים, אזי $(S \otimes T)^{-1} = S^{-1} \otimes T^{-1}$, כאשר אנו משתמשים בסימון מההערה שאחרי תרגיל 9.

11 נניח ש- V ו- W שניהם מרחבי מכפלה פנימית. הוכיחו כי אם $S \in \mathcal{L}(V)$ ו- $T \in \mathcal{L}(W)$, אזי $(S \otimes T)^* = S^* \otimes T^*$, כאשר אנו משתמשים בסימון מההערה שאחרי תרגיל 9.

12 נניח ש- $V_1, \dots, V_m$ מרחבי מכפלה פנימית מממד סופי. הוכיחו כי קיימת מכפלה פנימית יחידה מעל $V_1 \otimes \dots \otimes V_m$ כך ש- $\langle v_1 \otimes \dots \otimes v_m, u_1 \otimes \dots \otimes u_m \rangle = \langle v_1, u_1 \rangle \dots \langle v_m, u_m \rangle$ לכל $(v_1, \dots, v_m)$ ו- $(u_1, \dots, u_m)$ ב- $V_1 \times \dots \times V_m$. שימו לב שהמשוואה לעיל גוררת ש-

$$\|v_1 \otimes \dots \otimes v_m\| = \|v_1\| \times \dots \times \|v_m\|$$

לכל $(v_1, \dots, v_m) \in V_1 \times \dots \times V_m$.

- 13** נניח ש- $V_1, \dots, V_m$ מרחבי מכפלה פנימית מממד סופי ו- $V_1 \otimes \dots \otimes V_m$ הפך למרחב מכפלה פנימית בשימוש במכפלה הפנימית מתרגיל 12. נניח ש- $e_1^k, \dots, e_{n_k}^k$ בסיס אורתונורמלי של V_k לכל $k = 1, \dots, m$. הראו כי הרשימה
- $$\{e_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{j_m}^m\}_{j_1=1, \dots, n_1; \dots; j_m=1, \dots, n_m}$$
- היא בסיס אורתונורמלי של $V_1 \otimes \dots \otimes V_m$.

קרדיטים לתמונות

- page **v**: Photos by Carrie Heeter and Bishnu Sarangi. Public domain image.
- page **1**: Original painting by Pierre Louis Dumesnil; 1884 copy by Nils Forsberg. Public domain image downloaded on 29 March 2022 from https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ren_Descartes_i_samtal_med_Sveriges_drottning,_Kristina.jpg.
- page **27**: Public domain image downloaded on 4 February 2022 from https://commons.wikimedia.org/wiki/File:IAS_Princeton.jpg.
- page **51**: Photo by Stefan Schäfer; Creative Commons Attribution Share Alike license. Downloaded on 28 March 2022 from <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:BurgDankwarderode2016.jpg>.
- page **119**: Photo by Alireza Javaheri. Creative Commons Attribution license. Downloaded on 12 March 2023 from https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hakim_Omar_Khayam_-_panoramio.jpg.
- page **132**: Statue completed by Giovanni Paganucci in 1863. Photo by Hans-Peter Postel; Creative Commons Attribution license. Downloaded on 14 March 2022 from https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonardo_da_Pisa.jpg.
- page **181**: Photo by Matthew Petroff; Creative Commons Attribution Share Alike license. Downloaded on 31 March 2022 from <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:George-peabody-library.jpg>.
- page **227**: Photo by Petar Milošević; Creative Commons Attribution Share Alike license. Downloaded on 30 March 2022 from <https://en.wikipedia.org/wiki/Lviv>.
- page **297**: Photo by David Iliff; Creative Commons Attribution Share Alike license. Downloaded on 30 March 2022 from https://en.wikipedia.org/wiki/File:Long_Room_Interior,_Trinity_College_Dublin,_Ireland_-_Diliff.jpg.
- page **332**: Photo by Daniel Schwen; Creative Commons Attribution Share Alike license. Downloaded on 9 July 2019 from https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mathematik_Gttingen.jpg.

אינדקס סמלים וסימנים

$\ T\ $, 280	$\Leftrightarrow$, 23	A^{-1} , 91
$T^\#$, 375, 380	120, Im	$A_{j,\cdot}$, 74
$\text{tr } A$, 326	$-\infty$, 31	$A_{j,k}$, 69
$\text{tr } T$, 327		$A_{\cdot,k}$, 74
$T _U$, 133	$\mathcal{L}(V)$, 52	α_T , 354
T/U , 142	$\mathcal{L}(V, W)$, 52	A^* , 231
		A^t , 77
$U^\perp$, 211	$\mathcal{M}(\beta)$, 334	
U^0 , 109	$\mathcal{M}(T)$, 69, 154	380, 375, $\hat{\Gamma}$
$\langle u, v \rangle$, 183	$\mathcal{M}(v)$, 88	B , 287
		$\mathcal{B}(V_1, \dots, V_m)$, 378
V , 15	perm , 348	$\mathcal{B}(V, W)$, 370
V' , 105, 204	$\mathcal{P}(\mathbf{F})$, 30	
V/U , 99	π , 101	$\mathbf{C}$, 2
$-v$, 15	$\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$, 31	$\circ$, 55
$V_1 \otimes \dots \otimes V_m$, 379	$p(T)$, 137	
$v_1 \otimes \dots \otimes v_m$, 379	P_U , 214	$\deg$, 31
$V^{(2)}$, 334	q_β , 341	Δ , 196
$V_{\text{alt}}^{(2)}$, 339		$\det A$, 355
$V_{\text{sym}}^{(2)}$, 337	$\mathbf{R}$, 2	$\det T$, 354
V_C , 17	120, Re	$\dim$, 44
V^m , 103		$\oplus$, 21
V^m , 346	$S \otimes T$, 381	
$V^{(m)}$, 346	$\subsetneq$, 299	$E(s_1 f_1, \dots, s_n f_n)$, 287
$V_{\text{alt}}^{(m)}$, 347	253, $\sqrt{T}$	$E(\lambda, T)$, 164
$V \otimes W$, 372	102, $\tilde{T}$	
$v \otimes w$, 372	T' , 107	$\mathbf{F}$, 4
$v + U$, 98	T^* , 228	$\mathbf{F}^\infty$, 13
	T^{-1} , 82	$\mathbf{F}^{m,n}$, 72
$\ v\ $, 186	$T(\Omega)$, 288	$\mathbf{F}^n$, 6
		$\mathbf{F}^S$, 13
120, $\bar{z}$	T_C , 68	
$ z $, 120	$T^\dagger$, 221	$G(\lambda, T)$, 308
	T^m , 137	
		I , 52, 90

- n-יה, 5
- אורתונורמלית
- רשימה, 197
- אי-שוויון אֶדְמֶר, 365
- אי-שוויון בֶּסֶל, 198
- אי-שוויון המשולש, 121, 190, 281
- אי-שוויון המשולש ההפוך, 129, 193, 294
- אי-שוויון קושי-שוורץ, 189
- איבר נגדי לחיבור
- ב- C , 3, 4
- ב- F^n , 9
- במרחב וקטורי, 12, 15
- אידיאל דו-צדדי, 58
- איזומטריה, 258
- אלגברת סי כוכב, 295
- אלגוריתם חלוקת פולינומים, 124
- אליפסואיד, 287
- אלכסון מטריצה ריבועית, 155
- אסוציאטיביות, 3, 12, 56
- ארטין, אמיל, 80
- בונֶיִקוֹבְסְקִי, ויקטור, 189
- בית המשפט העליון, 210
- בלתי תלויה ליניארית, 32
- בנך, סטפן, 227
- בסיס, 39
- של וקטורים עצמיים, 165, 245, 246, 250
- של וקטורים עצמיים מוכללים, 301
- בסיס זיורדן, 322
- בסיס סטנדרטי
- של F^n , 39
- של $\mathcal{P}_m(F)$, 39
- גֶרֶם, יוֹרְגֵן פֶּדֶרְסֵן, 200
- גאוס, קרל פרידריך, 51
- one-to-one, 60
- span, 29
- SVD, ראה פירוק לערכים סינגולריים
- איזומורפיזם, 86
- אבוט, אדווין אבוט, 6
- אדיטיביות, 52
- אילר, לאונרד, 2
- אוניברסיטת גטינגן, 332
- אוניברסיטת דבלין, 297
- אופרטור, 133
- אופרטור אוניטרי, 260
- אופרטור אנטי-צמוד, 240, 247, 269
- אופרטור הזהות, 52, 56
- אופרטור היפו-נורמלי, 241
- אופרטור חיובי, 251
- אופרטור נגזרת חלקית, 175
- אופרטור נורמלי, 235
- אופרטור נילפוטנטי, 303, 322
- אופרטור צמוד לעצמו, 233
- אופרטור קומוטטיבי, 138
- אופרטורים מתחלפים, 175–180, 209, 235, 248–249, 256
- אורך רשימה, 5
- אורתוגונלי
- היטל, 214
- משלים, 211
- אורתוגונליים
- וקטורים, 187
- אורתונורמלי
- בסיס, 199

- גרעין, 59
גרף של העתקה ליניארית, 103
גרשגורן, סמיון ארנוב'יץ', 171
דואלי
מרחב וקטורי, 105, 204
של אופרטור, 140, 153, 162, 174
של בסיס, 106
של העתקה ליניארית, 107
דטרמיננטה
של אופרטור, 354
של אופרטור אוניטרי, 362
של אופרטור חיובי, 362
של מטריצה, 355
דקארט, רנה, 1
דרגה של מטריצה, 79
דרגת העמודות של מטריצה, 77, 114
דרגת השורות של מטריצה, 77, 114
דרגת מטריצה, 114, 239
דרגת עמודות של מטריצה, 239
דרגת שורות של מטריצה, 239
הומוגניות, 52
הופכי מור-פנרוז, 221
הופכית
של העתקה ליניארית, 82
של מטריצה, 91
הזזה, 99
הלמוש, פול, 27
המילטון, ויליאם, 297
המכון למחקר מתקדם, 27
המשפט היסודי של האלגברה, 125
המשפט היסודי של ההעתקות
הליניאריות, 62
הסטה לאחור, 53, 59, 84, 140
הסטה לפנים, 140
העתקה
מנה, 101
העתקה m -ליניארית, 379
העתקה ביליניארית, 374
העתקה ליניארית, 52
העתקה ליניארית הפיכה, 82
- העתקת הגזירה, 53, 56, 59, 61, 62, 67,
70, 79, 138, 208, 304
הפוליוס האופייני, 363
הצמודה של העתקה ליניארית, 228
הצמודה-משוחלפת של מטריצה, 231
התמרת פורייה בדידה, 269
וקטור, 8, 12
וקטור עצמי, 135
וקטור עצמי מוכלל, 300
ז'ורדן, קאמי, 324
ח'אם, עומר, 119
חד-חד-ערכית, 60
חיבור
במרחב מנה, 100
וקטורים, 12
וקטורים ב- F^n , 6
מטריצות, 71
מספרים מרוכבים, 2
פונקציות, 13
של העתקות ליניאריות, 55
תתי-מרחב, 19
חיובית לחלוטין, 266
חילוק מרוכבים, 4
חיסור מרוכבים, 4
חלק מדומה, 120
חלק ממשי, 120
טווח, 61
של T' , 112
של T^* , 231
של חזקות של אופרטור, 306
טור פורייה, 207
טרנספורמציה ליניארית, 52
כדור, 287
כלל המקבילית, 191
כפל
וקטור בסקלר, 12
מספרים מרוכבים, 2
כפל בסקלר, 9, 12
במרחב מנה, 100
של העתקות ליניאריות, 55

- כפל סקלר
במטריצה, 71
כריסטינה, מלכת שוודיה, 1
לִפְתַּת ההעתקה הליניארית, 54
לִפְתַּת התלות הליניארית, 33
לאונרדו מפיזה, 132
לבוב, 227
לביב, 227
לכסין, 163, 172, 176, 245, 246, 294, 307, 316
לכסינות ב־זִמְנִית, 176
למברג, 227
לפלסיאן, 196
מֶאֱפֶס, 109
מבצע לראיה ופה אליס מצאה שט, 11
מוֹן, v, xii
מזעור מרחק, 217
מטריצה, 69
כפל, 73
מכפלת העתקות ליניאריות, 91
של אופרטור, 154
של אופרטור נילפוטנטי, 305
של T' , 113
של T^* , 232
של העתקה ליניארית, 69
של וקטור, 88
של מכפלת העתקות ליניאריות, 74
של תבנית ביליניארית, 334
מטריצה אוניטרית, 263
מטריצה אי־סינגולרית, 91
מטריצה אלכסונית, 163, 274
מטריצה הפיכה, 91
מטריצה מלווה, 152
מטריצה משולפת, 77
מטריצה משולשית עליונה, 155–160, 264, 314, 267
סימולטנית לאופרטור, 178
מטריצה משולשית תחתונה, 162, 267
מטריצה סימטרית, 269, 337
מטריצה סינגולרית, 91
מטריצה ריבועית, 91
מטריצת בלוקים אלכסונית, 314
מטריצת הזהות, 90
מטריצת היחידה, 90
מטריצת הילברט, 256
מטריצת וִנְדֵרְמוֹנְד, 366
מירכוב
וקטורים עצמיים מוכללים של, 318
ערך עצמי של, 140
פולינום מינימלי של, 153
ריבוי של ערכים עצמיים, 318
של העתקה ליניארית, 68
של מרחב וקטורי, 17, 43
של מרחב מכפלה פנימית, 194
מכפלה
מרחבים וקטוריים, 96
של העתקות ליניאריות, 55
של מטריצות, 73
של סקלר והעתקות ליניאריות, 55
של סקלר ווקטור ב־ F^n , 9
של פולינומים, 138
מכפלה טנזורית, 372, 379
מכפלה סקלרית, 182
מכפלה פנימית, 183
מכפלה פנימית אוקלידית, 184
ממד, 44
סכום תתי־מרחב, 47
מנה
אופרטור, 142, 153, 162, 173
מספר מרוכב, 2
מעגל היחידה ב־ C , 262, 269
מעלת פולינום, 31
מערכת הומוגנית של משוואות ליניאריות, 95, 65
מרחב
מנה, 99
מרחב דואלי כפול, 118
מרחב האפס, 59
של T' , 111
של T^* , 231

- סימטריית צמוד (הרמיטיות), 183
 סימן של תמורה, 349
 סכום, ראה חיבור
 סכום ישר, 21, 42, 98
 של $\text{null } T^{\dim V}$ ו- $\text{range } T^{\dim V}$, 299
 של תת־מרחב והמשלים האורתוגונלי
 שלו, 212
 סכום תתי־מרחב, 19
 ספריית פיבודי, 181
 סקלר, 4
 עֵל, 62
 עיגולי גרשגורן, 170
 עקבה
 של אופרטור, 327
 של מטריצה, 326
 ערך מוחלט, 120
 ערך עצמי
 במרחב מממד אי־זוגי, 150
 מעל מרחב מממד אי־זוגי, 318
 מרחב מממד אי־זוגי, 367
 של אופרטור, 134
 של אופרטור אוניטרי, 262
 של אופרטור חיובי, 252
 של אופרטור צמוד לעצמו, 233
 של דואלי של אופרטור, 140
 של הצמוד, 239
 ערכים סינגולריים, 271, 362
 פֶּרְנִקְשֵׁיטִיו, 50
 פְּסִידו־הופכי, 221
 פוגֶלְדֶה, 248
 פולינום, 30
 פולינום אופייני
 מעל מרחב וקטורי מרוכב, 311
 פולינום טיילור, 219
 פולינום מינימלי
 הגדרה, 145
 ובסיס של וקטורים עצמיים מוכללים, 306
 והפיכות, 149
 של חזקות אופרטור, 298
 מרחב וקטורי, 12
 מרחב וקטורי מממד אינסופי, 31
 מרחב וקטורי מממד סופי, 30
 מרחב וקטורי ממשי, 13
 מרחב וקטורי מרוכב, 13
 מרחב מכפלה פנימית, 184
 מרחב עצמי, 164
 מרחב עצמי מוכלל, 308
 מרחבים וקטוריים אֵיזוֹמוֹרְפִּים, 86
 משוואות ליניאריות, 64–65, 95
 משוחלפת של מטריצה, 231
 משפט אפולוניוס, 195
 משפט דה־מואבר, 125
 משפט ההצגה של ריס, 205, 210, 216,
 224, 225
 משפט הפירוק הספקטרלי, 245, 246
 משפט הפירוק הספקטרלי הממשי, 245
 משפט הפירוק הספקטרלי המרוכב, 246
 משפט הפירוק של שור, 204
 משפט עיגולי גרשגורן, 171
 משפט פיתגורס, 187
 משפט קיילי־המילטון, 364
 מעל מרחב וקטורי מרוכב, 312
 נֶתֶר, אָמִי, 332
 נוסחת שינוי בסיס
 לאופרטורים, 93
 של תבניות ביליניאריות, 336
 נורמה של העתקה ליניארית, 280
 נורמה של וקטור, 182, 186
 נורמת הילברט־שמידט, 331
 נורמת פרובניוס, 331
 נפח, 292, 363
 של תיבה, 291
 נקודה, 12
 סגירות תחת חיבור, 18
 סגירות תחת כפל בסקלר, 18
 סדרת פיבונאצ'י, 174
 סורג'קטיבית, 62
 סילבסטר, ג'יימס, 181

- והפירוק למרחבים עצמיים מוכללים, צירוף ליניארי, 28
- 316 צירים ראשיים, 287
- ולכסינות, 169 צמד שמידט, 278
- ומטריצה משולשית עליונה, 159, 203 צמוד מרוכב, 120
- ומרחבים עצמיים מוכללים, 317 קואורדינטה, 6
- ופולינום אופייני, 312 קומוטטיביות, 3, 7, 12, 25, 56, 73, 80
- חישוב, 145 קושי, אוגוסטין-לואי, 189
- כפולת פולינום של, 148 קיילי, ארתור, 312
- ללא פירוק סכום ישר, 325 קלוד, 196, 279
- מחלק משותף מרבי עם נגזרתו, 173 קרדיטים לתמונות, 383
- שורשים של, 146 קרול, לואיס, 11
- של אופרטור מנה, 153 ריבוי אלגברי, 311
- של אופרטור מצומצם, 148 ריבוי גאומטרי, 311
- של אופרטור נורמלי, 241 ריבוי של ערך עצמי, 310
- של אופרטור נילפוטנטי, 305, 324 ריס, פרידייש, 205
- של אופרטור צמוד לעצמו, 244 רשימה, 5
- של העתקה דואלית, 153 וקטורים, 28
- של הצמוד, 241 שְׁמִידֵט, אֶרְהַרְדְּ, 200
- של מטריצה מלווה, 152 שְׁלִי, מְרִי ווֹלְסְטוֹנְקֶרֶאפֶט, 50
- של מירכוב, 153 שור, ישי, 204
- פולינום מתוקן, 144 שדה, 10
- פולינומי ברנשטיין, 49 שוויון פֶּרְסֶבֶל, 200
- פונקציה הרמונית, 196 שוורץ, הרמן, 189
- פונקציונל m -ליניארי, 378 שולסקי, אנדרה-לואי, 267
- פונקציונל ביליניארי, 370 שורש פולינום, 122
- פונקציונל ליניארי, 105, 204 שורש ריבועי של אופרטור, 248, 251, 253
- פורסת, 29 שדה, 10
- פיבונאצ'י, 132 שוויון פֶּרְסֶבֶל, 200
- פירוק QR, 264, 365 שוורץ, הרמן, 189
- פירוק לערכים סינגולריים שולסקי, אנדרה-לואי, 267
- של העתקה ליניארית, 273 שורש פולינום, 122
- של פסידו-הופכי, 275 שורש ריבועי של אופרטור, 248, 251, 253
- של צמודה, 275 שדה, 10
- פירוק עמודה-שורה, 78 שוויון פֶּרְסֶבֶל, 200
- פירוק פולרי, 286 שוורץ, הרמן, 189
- פירוק שולסקי, 267 שולסקי, אנדרה-לואי, 267
- פסידו-הופכי, 250, 255, 275, 279 תבנית m -ליניארית, 346
- פריסה, 29 תבנית m -ליניארית מתחלפת, 347
- פריסה ליניארית, 29 תבנית ביליניארית, 333
- צורת ז'ורדן, 324 תבנית ביליניארית מתחלפת, 339
- תבנית מולטי-ליניארית, 346 תבנית ביליניארית סימטרית, 337
- תהליך גרס-שמידט, 200 תבנית ריבועית, 341

תכונת הדיסטריבוטיביות, 3, 12, 15, 56,

80

תלויה ליניארית, 33

תמורה, 348

תת־מרחב, 18

תת־מרחב ליניארי, 18

תת־מרחב שמור, 133

קולופון: הערות בנוגע לסדר

- ספר זה סודר ב-Lua $\text{\TeX}$ על ידי המחבר, אשר כתב את קוד ה- $\text{\TeX}$ הממש את עיצוב הספר.
- תוכנת ה- $\text{\TeX}$ ששימשה עבור ספר זה נכתבה על ידי Leslie Lamport. תוכנת ה- $\text{\TeX}$, המהווה את הבסיס של $\text{\TeX}$, נכתבה על ידי Donald Knuth.
- גופן הטקסט הלטיני בספר זה הוא גרסת ה-Open Type Format של $\text{\TeX}$ Gyre Terms, גופן המבוסס על Times, שעוצב על ידי Stanley Morison ו-Victor Lardent עבור העיתון הבריטי The Times בשנת 1931.
- גופן המתמטיקה הראשי בספר זה הוא גרסת ה-Open Type Format של $\text{\TeX}$ Gyre Pagella Math, גופן המבוסס על Palatino, שעוצב על ידי Hermann Zapf.
- הגופן הסאנס-סריף הלטיני, ששימש לרכיבי עיצוב ולטקסט באנגלית, הוא גרסת ה-Open Type Format של $\text{\TeX}$ Gyre Heros, גופן המבוסס על Helvetica, שעוצב על ידי Max Miedinger ו-Eduard Hoffmann.
- חבילות ה-Lua $\text{\TeX}$ בשם fontspec ו-unicode-math, שתיהן נכתבו על ידי Will Robertson, שימשו לניהול הגופנים.
- חבילת ה- $\text{\TeX}$ בשם fontsize, שנכתבה על ידי Ivan Valbusa, שימשה לשינוי מעודן של הגופנים הראשיים לגודל 10.5 נקודות.
- האיורים בספר הופקו באמצעות Mathematica, בעזרת קוד Mathematica שנכתב על ידי המחבר. Mathematica נוצרה על ידי Stephen Wolfram. חבילת ה-Mathematica בשם Ma $\text{\TeX}$, שנכתבה על ידי Szabolcs Horvát, שימשה למיקום תוויות שיוצרו על ידי $\text{\TeX}$ באיורי ה-Mathematica.
- חבילת ה- $\text{\TeX}$ בשם graphicx, שנכתבה על ידי David Carlisle ו-Sebastian Rahtz, שימשה לשילוב תמונות ואיורים.
- חבילת ה- $\text{\TeX}$ בשם multicol, שנכתבה על ידי Frank Mittelbach, שימשה לעקיפת המגבלה של $\text{\TeX}$ לפיה תבנית דו-טורית חייבת להתחיל בעמוד חדש (נדרש עבור אינדקס הסמלים והאינדקס).
- חבילות ה- $\text{\TeX}$ בשם TikZ, שנכתבה על ידי Till Tantau, ו-tcolorbox, שנכתבה על ידי Thomas Sturm, שימשו להפקת תיבות ההגדרה ותיבות המסקנה.
- חבילת ה- $\text{\TeX}$ בשם color, שנכתבה על ידי David Carlisle, שימשה להוספת צבע מתאים לרכיבי עיצוב שונים.
- חבילת ה- $\text{\TeX}$ בשם wrapfig, שנכתבה על ידי Donald Arseneau, שימשה לעטיפת טקסט סביב תיבות ההערות.

- חבילת ה- $\text{\LaTeX}$ בשם microtype, שנכתבה על ידי Robert Schlicht, שימשה להפחתת מיקוף ולהפקת יישור נאה יותר.
- המהדורה העברית תורגמה וסודרה על ידי צורי בר יוחאי. קוד ה- $\text{\LaTeX}$ של המהדורה האנגלית הותאם לסדר ימין-לשמאל עם תמיכה דו-כיוונית בנוסחאות מתמטיות.
- חבילת ה- $\text{\LaTeX}$ בשם babel, המתוחזקת על ידי Javier Bezos ושנכתבה במקור על ידי Johannes Braams, שימשה עם האפשרות `bidi=basic-r` לכיוון פסקה ימין-לשמאל, לטיפול דו-כיווני בטקסט, ולמיקום נכון של נוסחאות מתמטיות בתוך טקסט עברי.
- גופן הטקסט העברי במהדורה זו הוא David CLM, מפרויקט קולמוס (Culmus). גופן דוד עוצב במקור על ידי איתמר (איסמר) דוד בשנת 1954.
- לתרגום הספר פותחה על ידי צורי בר יוחאי מערכת ייעודית לפיצול קוד המקור של $\text{\LaTeX}$ ליחידות תרגום תוך שמירה על כל התוכן המתמטי, הפקודות, ומבנה המסמך. היחידות המתורגמות הורכבו מחדש ללא אובדן לקובצי ה- $\text{\LaTeX}$ העבריים.
- חבילת ה- $\text{\LaTeX}$ בשם varoref, שנכתבה על ידי Frank Mittelbach, שימשה עם הגדרות תבנית מותאמות אישית להצגת מספרי הפרקים כאותיות עבריות ולעישוב ההפניות לפי מוסכמת מהדורה זו — אות הפרק ולאחריה מספר יחידה.